Cálculo
Series numéricas y de potencias

24 de Noviembre de 2014

Series numéricas y de potencias

Series numéricas

Sucesiones de números reales

Definición

Una **sucesión de números reales** *es una aplicación*

$$\begin{array}{rcrcl} a & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & a(n) \end{array}$$

Se suele escribir a_n en vez de $a(n)$.

Definición

Se dice que el límite de la sucesión (a_n) cuando n tiende a infinito es $l \in \mathbb{R}$, y se escribe $l = \lim_{n\to\infty} a_n$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

En este caso, se dice que la sucesión (a_n) es convergente.

Series numéricas

Definición

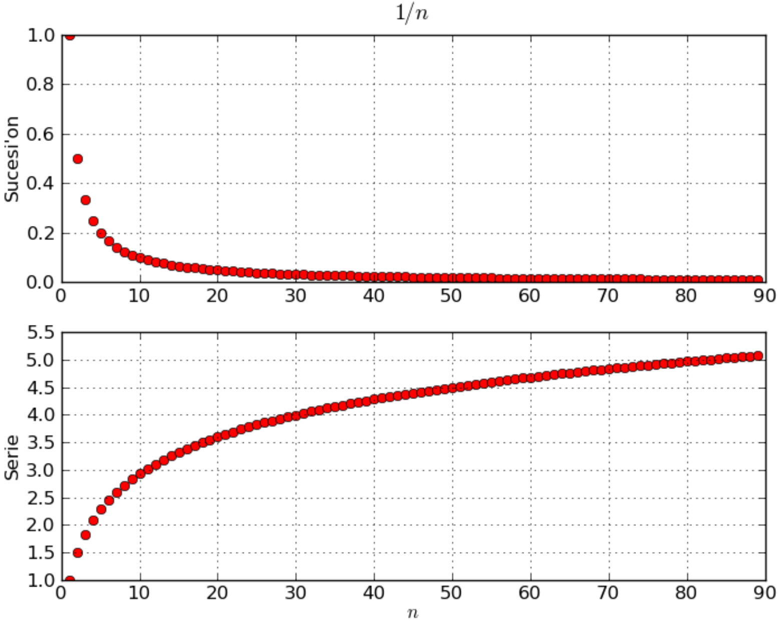
Dada una sucesión (a_n), *sea* $s_n = a_1 + \ldots + a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
La sucesión (s_n) *se llama sucesión de sumas parciales.*

Se llama serie de término general (a_n), *y se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *al límite de la sucesión de sumas parciales* (s_n), *cuando éste existe:*

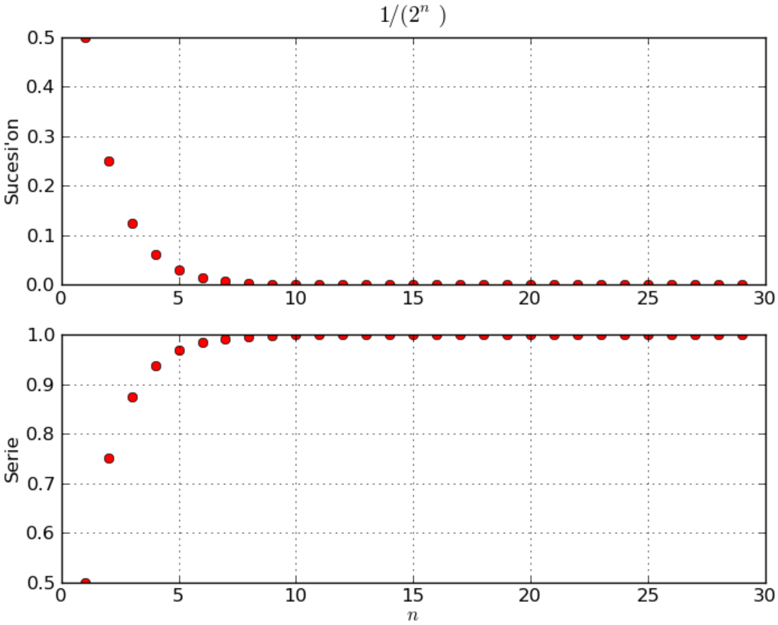
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

La serie se dice convergente cuando la sucesión de sumas parciales es convergente.

Series numéricas



Series numéricas



Series numéricas. Propiedades

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) La serie suma $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Teorema (**Condición necesaria de convergencia de series**)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio del cociente (o de D'Alembert)

Si $a_n > 0 \; \forall n$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

entonces:

1) si $r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) si $r > 1$ o $r = +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

3) Si $r = 1$, el criterio no decide.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio del cociente (o de D'Alembert). Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$

   Luego la serie es convergente.

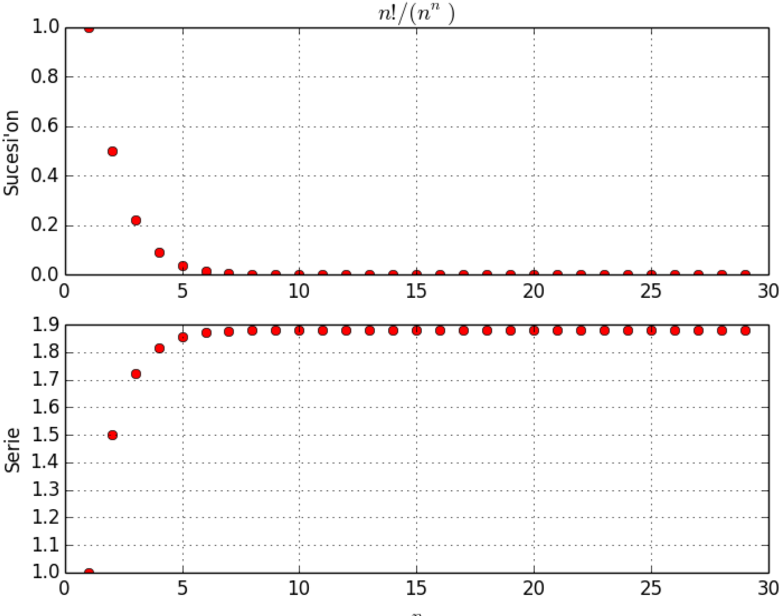
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3+n!}$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{3+n!}{3+(n+1)!} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n!}+1}{\frac{3}{n!}+n+1} = 0$

   Luego la serie es convergente.

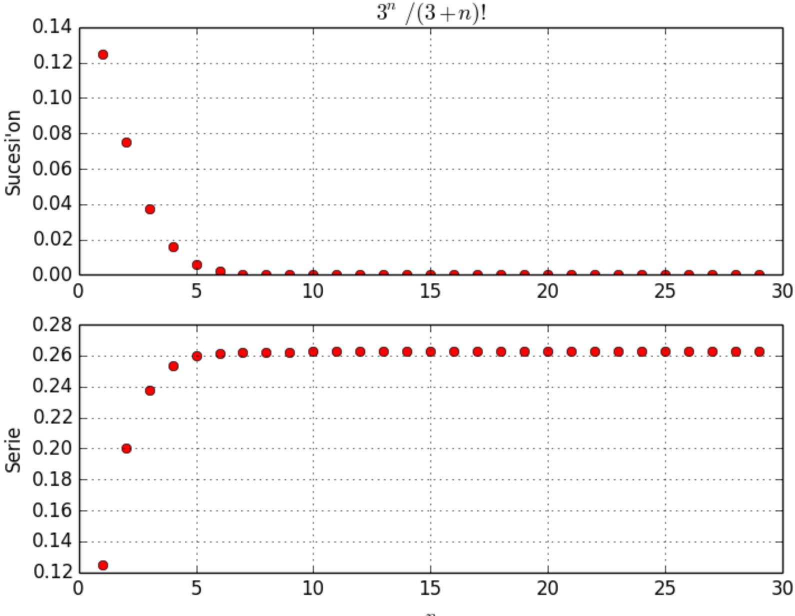
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(n+1)^s} = 1$

   En este caso el criterio no decide.

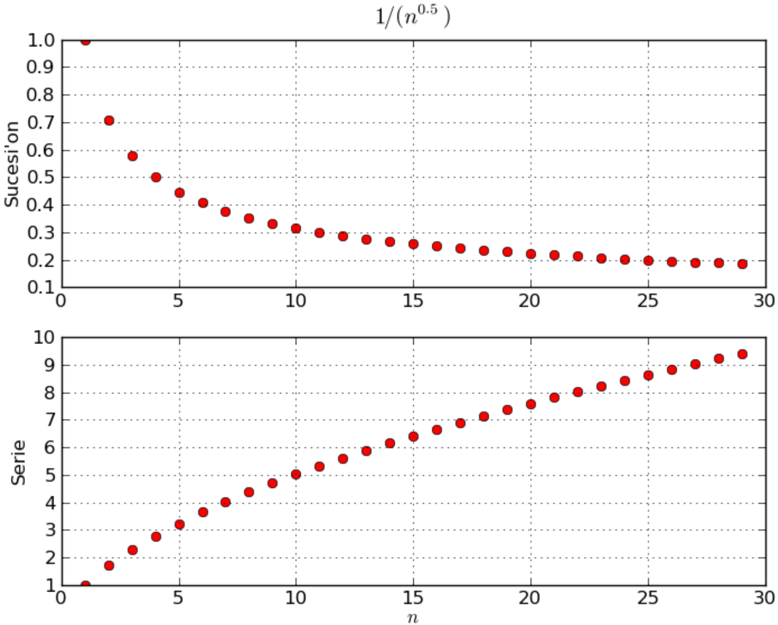
Criterios de convergencia para series de términos positivos



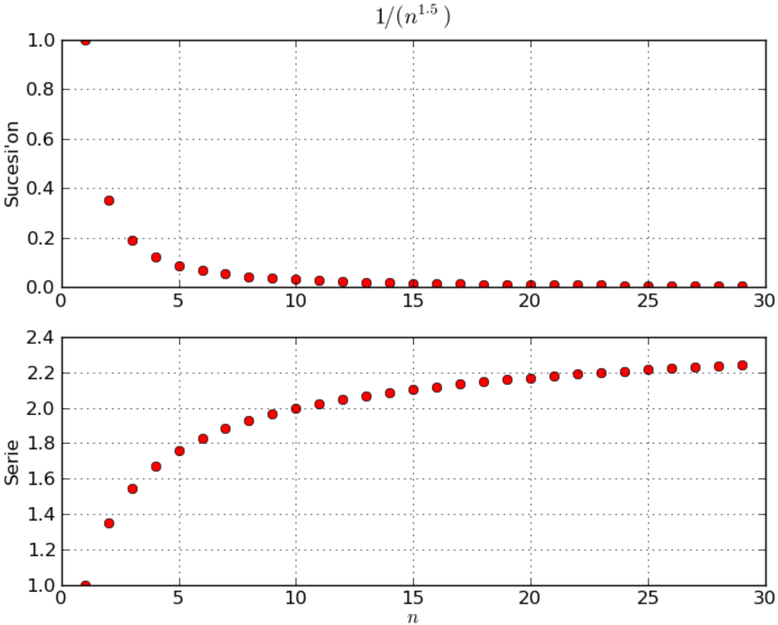
Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos



Convergencia de las series armónicas y geométricas

- La serie armónica de grado s,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

  es

  - convergente si $s > 1$
  - divergente si $s \leq 1$

- La serie geométrica de razón r,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

  es convergente si y solo si $|r| < 1$.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de la raíz (o de Cauchy)

Si $a_n > 0 \ \forall n$, y existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

entonces:

1) si $r < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) si $r > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

3) si $r = 1$, el criterio no decide.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de la raíz. Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$

   Luego la serie es convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$:

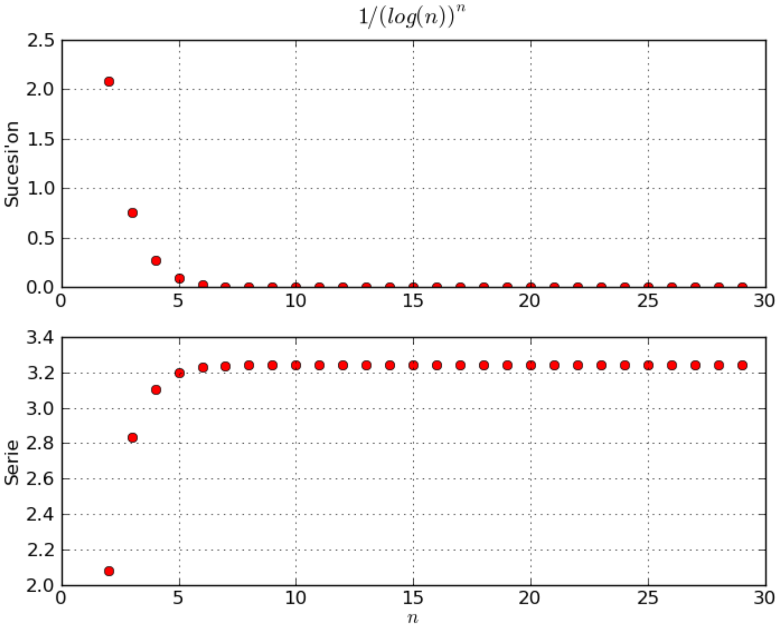
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{2}}\right]^{-\frac{2n}{n+2}} = e^{-2} < 1$$

   Luego la serie es convergente.

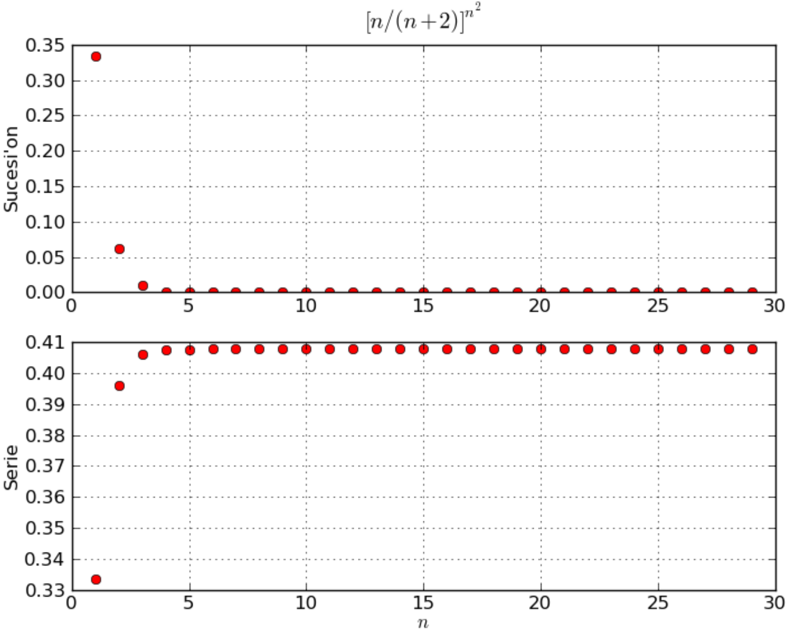
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^{1/n})^s} = 1$

   En este caso el criterio no decide.

Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de comparación de Gauss

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tales que

$$a_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces:

1) si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo es.

2) si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también lo es.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de comparación de Gauss. Ejemplos:

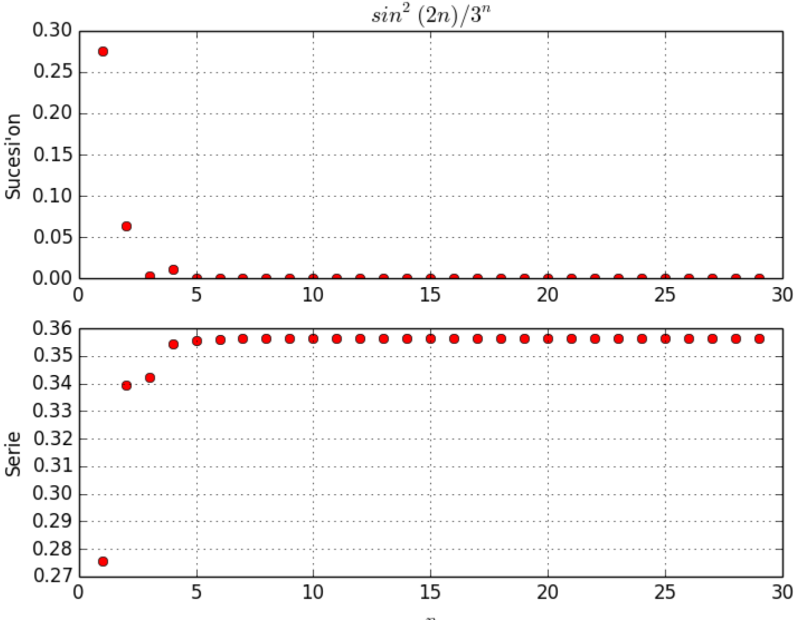
1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n)}{3^n}$

   Como $\displaystyle\frac{\sin^2(2n)}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es convergente (criterio de la raíz), la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n)}{3^n}$ es convergente.

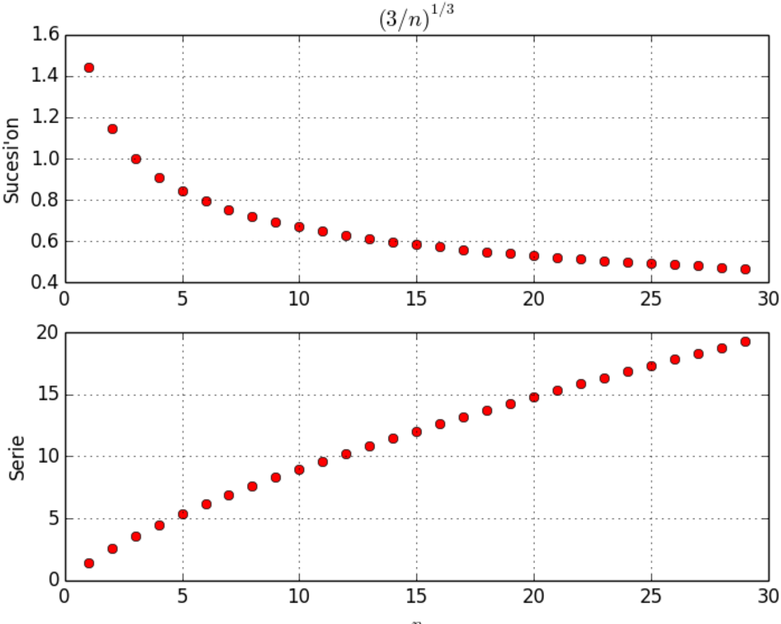
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^{1/3}$

   Como $\displaystyle\left(\frac{3}{n}\right)^{1/3} > \frac{1}{n^{1/3}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y la serie armónica de grado $1/3$ es divergente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^{1/3}$ es divergente.

Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos y sea $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
Entonces:

1) si $l \in (0, +\infty)$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.
2) si $l = 0$, entonces:
   - si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo es.
   - si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también lo es.
3) si $l = +\infty$, entonces:
   - si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo es.
   - si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también lo es.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de comparación en el límite. Ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^3+4n+5}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{3n^3+4n+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2}{3n^3+4n+5} = \frac{2}{3} \in (0,+\infty)$$

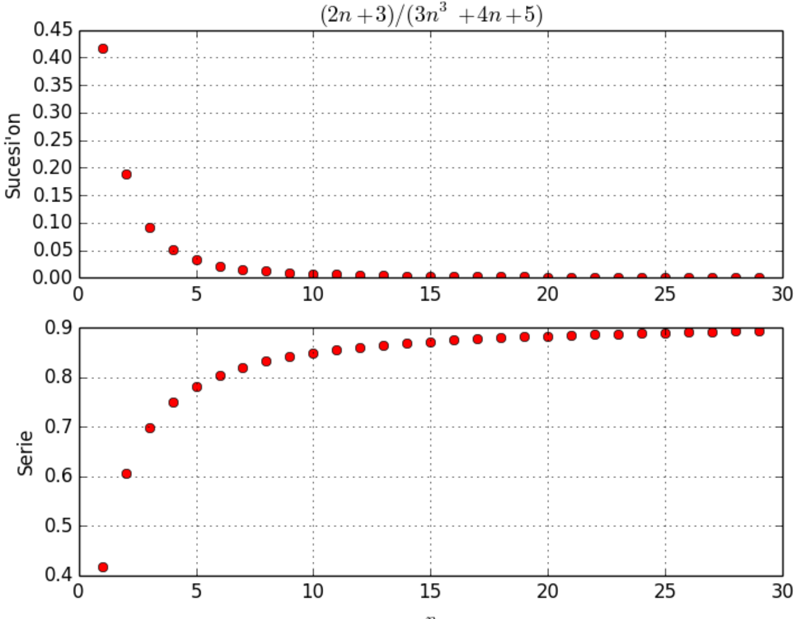
y la serie armónica de grado 2 es convergente. Por tanto, la serie dada es convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$:

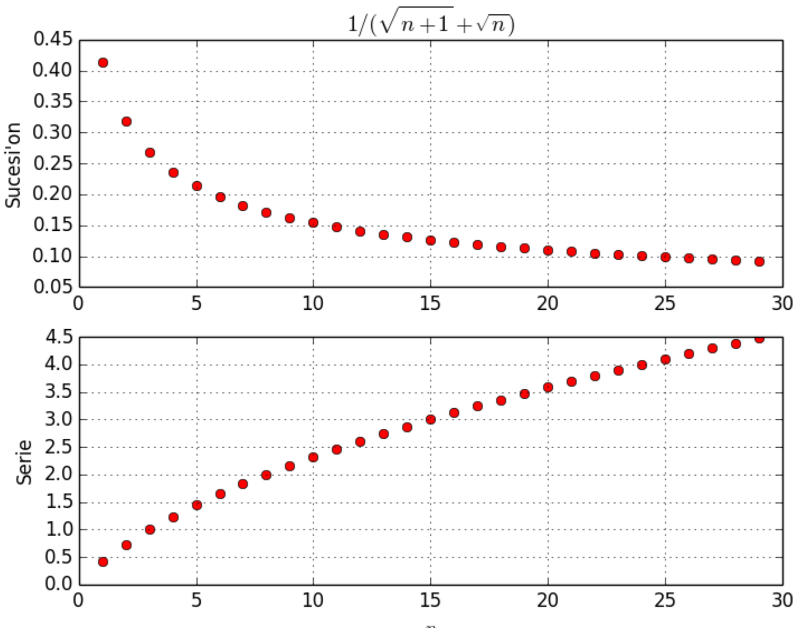
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \in (0,+\infty)$$

y la serie armónica de grado $1/2$ es divergente. Luego la serie dada es divergente.

Criterios de convergencia para series de términos positivos



Criterios de convergencia para series de términos positivos



Series numéricas alternadas

Definición

Una serie se dice alternada si sus términos son alternativamente positivos y negativos. Por tanto, una serie alternada es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\,, \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\,,$$

con $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Criterio de Leibniz)

Una serie alternada de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, *con* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *es convergente si la sucesión* (a_n) *es decreciente y tiende a cero, en cuyo caso:*

$$s_{2n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n < s_{2n} \quad \text{y} \quad |\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - s_n| < a_{n+1}$$

Series numéricas absolutamente convergentes

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice absolutamente convergente si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Teorema (Convergencia absoluta $\Rightarrow$ convergencia)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

Observación

- *El recíproco no siempre es cierto. Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente pero no absolutamente convergente, se dice condicionalmente convergente.*
- *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es una serie de términos positivos. Por tanto, su convergencia se puede estudiar usando los criterios de convergencia para series de términos positivos.*

Series de potencias

Series de potencias

Definición

Una serie de potencias es una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

- a_n *se llama coeficiente n-ésimo de la serie de potencias.*
- a *se llama centro de la serie de potencias.*

Teorema

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *hay tres posibilidades:*

1. *La serie sólo converge para* $x = a$.
2. *La serie converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe un número real* $R > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|x-a| < R$ *y no converge si* $|x-a| > R$. *La convergencia en los puntos* $x = a-R$ *y* $x = a+R$ *se debe estudiar separadamente.*

Series de potencias. Radio de convergencia

Definición

El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *es*

- $R = 0$ *si la serie sólo converge para* $x = a$.
- $R = +\infty$ *si la serie es convergente para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- R *si la serie es convergente para* $x \in (a-R, a+R)$ *y no es convergente para* $x \in \mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$.

El intervalo en que la serie de potencias es convergente se llama campo de convergencia de la serie.

Series de potencias. Radio de convergencia

El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ se puede calcular mediante el criterio del cociente o el criterio de la raíz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ejemplos:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$: $\quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} = 0$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$: $\quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es la serie geométrica de razón x. Esta serie es convergente si y solo si $|x| < 1$. Por tanto, $R = 1$ y el campo de convergencia es $(-1,1)$.