Cálculo
Funciones reales de una variable real

29 de Marzo de 2016

Funciones reales de una variable real

Conjuntos de números

Números complejos

Funciones reales de una variable real

Valor absoluto

Funciones polinómicas y racionales

Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas

Límites

Continuidad

Interpolación de Lagrange

Conjuntos de números

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ t.q. $a < q < b$

Números complejos

Definición

El conjunto de los **números complejos** *es*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \;/\; a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ *es la unidad imaginaria.*

En $\mathbb{C}$ se opera de la siguiente manera:

- $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
- $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Distintas representaciones de un número complejo z:

$$a + ib \equiv (a, b) \equiv |z|_\theta$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ es el **módulo** del número complejo z, que coincide con la distancia al origen del punto de coordenadas (a, b).

$\theta \in [0, 2\pi)$ es el **argumento** del número complejo

Propiedades:

- Sea $a \in \mathbb{R}$; entonces $a = a + 0i \in \mathbb{C}$. Luego, se puede considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C})$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$. (Teorema fundamental del Álgebra)

Función real de una variable real

Sea $A \subset \mathbb{R}$

Definición

La correspondencia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función** *si a cada $x \in A$ le asigna una única imagen $f(x) \in \mathbb{R}$*

Se llama:

- **dominio**: $\mathscr{D}(f) = \{x \in A \,/\, \text{ existe } f(x)\} = \{x \in A \,/ f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Dom}(f)$
- **imagen**: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$

Propiedades de monotonía

Definición

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $B \subset A$.

- *f es* **creciente** *en B si*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$
- *f es* **estrictamente creciente** *en B si*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$
- *f es* **decreciente** *en B si*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$
- *f es* **estrictamente decreciente** *en B si*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B.$$

Definición

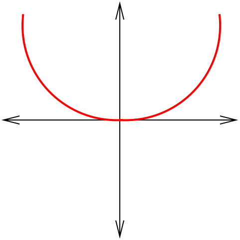
Se dice que f es **inyectiva** *si:*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

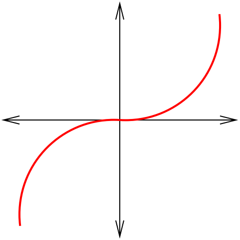
Simetrías

Definición

Se dice que una función f es **par** *si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathscr{D}(f)$. Se dice que f es* **impar** *si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathscr{D}(f)$.*



Función par



Función impar

Nota

El nombre proviene de los monomios fundamentales. Los monomios con exponente par (x^2, x^4, x^6,...) tienen simetría par y los monomios con exponente impar (x, x^3, x^5,...) tienen simetría impar.

Periodicidad

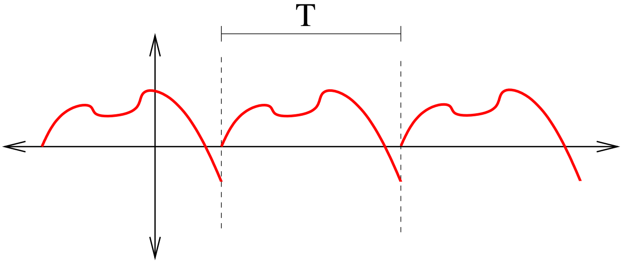
Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f *es* **periódica**, *con período* T, *si*

$$f(x) = f(x+T), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El ejemplo más clásico de funciones periódicas son las funciones trigonométricas.

Si sabemos que una función tiene un período T, será suficiente con representarla en $[0,T]$. Después se repetirá.



Composición de funciones

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, con* $Im(f) \subset B$*. La* **función compuesta** $g \circ f$ *(se lee "f compuesta con g") es la función*

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f & : & A \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x \in A & \to & (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{array}$$

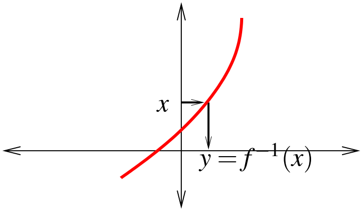
$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B \xrightarrow{g} g(f(x))$$

Función inversa

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva. Existe una única función* $h : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(f(x)) = x,\ \forall x \in A$.
Esta función se denomina **inversa de f** *y se suele denotar por* f^{-1}.

Es decir, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$. Además, en este caso se verifica que la composición es conmutativa, es decir, que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ (siendo Id la función identidad, es decir, $\mathrm{Id}(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$).



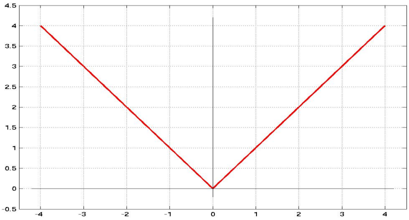
¡Atención: f^{-1} no es lo mismo que $\frac{1}{f}$!
La forma práctica de calcular una función inversa es despejar x en función de y (es decir, de $f(x)$) e intercambiar sus papeles.

Valor absoluto

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$*. Se llama* **valor absoluto** *de* x *a la cantidad:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0, \\ x, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$



Observación

Se verifica que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Valor absoluto

Propiedad

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular)*
- $|xy| = |x|\,|y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.
- *Si* $C > 0, \quad |x| \leq C \iff -C \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq C$

Definición

Dado $x \in \mathbb{R}$, *su distancia al origen es* $d(x,0) := |x|$. *En general, para* x, $y \in \mathbb{R}$, *definimos la* **distancia** *entre estos dos puntos como*

$$d(x,y) := |x-y|.$$

Funciones polinómicas

Las **funciones polinómicas** son funciones del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, y $a_n \neq 0$.

Se dice que

- el **grado del polinomio** es n,
- el **coeficiente principal** o **coeficiente director** es a_n.

Ejemplos de funciones polinómicas son

1. $p_1(x) = 5x^3 - 4x + 2$,
2. $p_2(x) = 8x^3 - \sqrt{2}$,
3. $p_3(x) = \pi x^4 + 2x^3 - 3x$.

El dominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$; su imagen varía en cada caso.

Funciones racionales

Las **funciones racionales** son cocientes de funciones polinómicas, es decir,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son funciones polinómicas.

Ejemplos de funciones racionales son

1. $f_1(x) = \dfrac{5x^3 - 4x + 2}{8x^3 - \sqrt{2}}$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2}$.

El dominio de estas funciones son todos los reales, excepto aquéllos que anulen el denominador,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\},$$

mientras que su imagen varía en cada caso.

Funciones exponenciales

Sea $a > 0$. Definimos la **función exponencial** de base a como

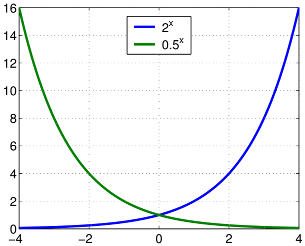
$$f(x) = a^x.$$

Si $a \neq 1$,

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$,
- $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$,
- $f(0) = a^0 = 1$.

1. $\boldsymbol{0 < a < 1}$. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente,
     $$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x > a^y,$$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$,
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
2. $\boldsymbol{a > 1}$. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente,
     $$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y,$$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$,
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Funciones exponenciales



La función exponencial más importante es la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$ (recordemos que $e = 2{,}7182818\ldots$). Esta función es la que se suele conocer por defecto como **función exponencial**.

Propiedad

i) $a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ *(consecuencia de la propiedad anterior).*

Funciones logarítmicas

Definición

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, se dice que y es el **logaritmo** *en base a de x si $a^y = x$,*

$$y = \log_a(x) :\Longleftrightarrow a^y = x.$$

La función $\log_a$ es la función inversa de la exponencial de base a.

Propiedad

Para cualquier valor de $a > 0$, $a \neq 1$,

- *el* **dominio** *de la función logaritmo en base a lo forman los números positivos:* $\mathrm{Dom}(\log_a) = (0, +\infty)$,
- *la* **imagen** *de la función logaritmo en base a es $\mathbb{R}$,*
- $\log_a(1) = 0$.

Propiedad

i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,, \qquad \forall x, y > 0,$

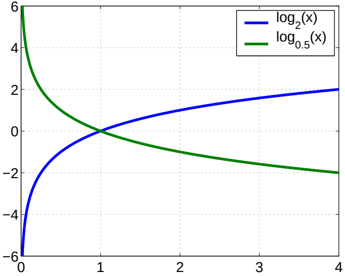
ii) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)\,, \qquad \forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R},$

iii) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall x, y > 0.$

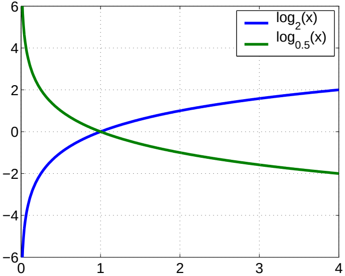
Funciones logarítmicas

1. $\boldsymbol{a > 1}$. En este caso,
   - $f(x) = \log_a(x)$ es una función estrictamente creciente,
   $$x < y \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) < \log_a(y),$$
   - $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty,$
   - $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$

2. $\boldsymbol{a < 1}$. En este caso la situación se invierte, como se muestra en la gráfica.



Función logarítmica



El logaritmo más utilizado es el logaritmo en base e, $f(x) = \log_e(x)$. Se denomina **logaritmo neperiano**, y se suele denotar por $\ln(x)$ o, simplemente, $\log(x)$. Cualquier otro logaritmo se puede expresar en función del ln mediante la fórmula

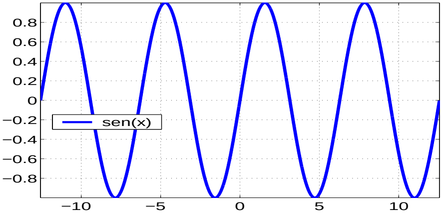
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Funciones trigonométricas

Función seno

La función $f(x) = \sin(x)$, verifica

- su dominio es $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función impar,
- es una función periódica con período 2π.

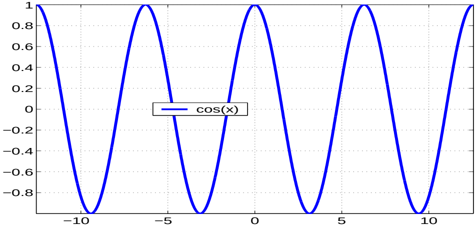


Funciones trigonométricas

Función coseno

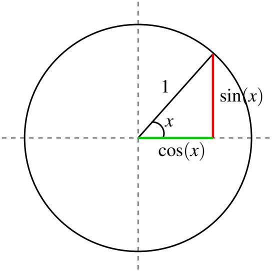
La función $f(x) = \cos(x)$, verifica

- su dominio es $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función par,
- es una función periódica con período 2π.



Funciones trigonométricas

El seno y el coseno pueden entenderse como las longitudes de las proyecciones sobre los ejes del ángulo, en radianes, dibujado sobre la circunferencia de radio unidad.



Propiedad

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \forall x,$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$

Funciones trigonométricas

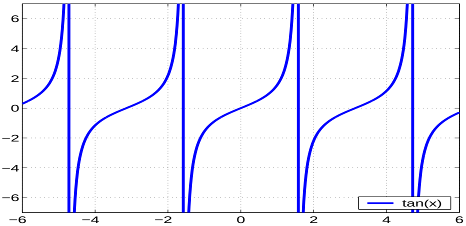
La **función tangente** se define como

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

El dominio de esta función lo forman todos los puntos de $\mathbb{R}$ en los que el coseno no se anula, es decir,

$$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

mientras que su imagen es $\mathbb{R}$. Además, es una función impar y periódica, con período π.



Funciones trigonométricas

Otras funciones trigonométricas

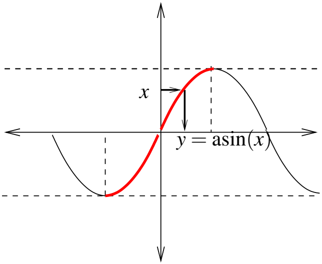
- Cosecante, $\operatorname{cosec}(x) := \dfrac{1}{\sin(x)}$,
- Secante, $\sec(x) := \dfrac{1}{\cos(x)}$,
- Cotangente, $\operatorname{cotan}(x) := \dfrac{1}{\tan(x)}$.

Funciones trigonométricas inversas

Función arco-seno

Es la inversa de la función seno. Como la función seno no es una función inyectiva, restringimos su dominio, quedándonos con el seno definido sólo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Definimos entonces la función arco-seno, $\arcsin(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1,1]$, le asocia el único $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin(y) = x$.

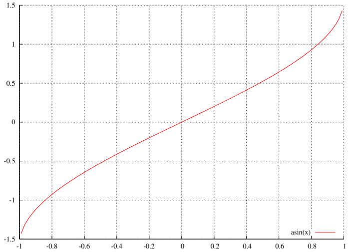


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-seno

Por tanto, $\mathrm{Dom}(\arcsin) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La función arco-seno es una función impar.

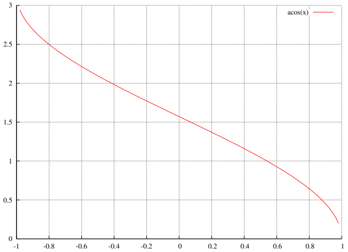


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-coseno

Es la inversa de la función coseno. En este caso, restringimos el dominio de la función coseno para quedarnos con el coseno definido en el intervalo $[0, \pi]$.

Definimos entonces la función arco-coseno, $\arccos(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1, 1]$, le asocia el único $y \in [0, \pi]$ tal que $x = \cos(y)$.

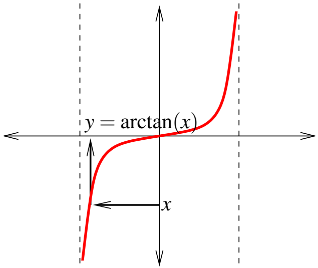


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-tangente

Es la inversa de la función tangente. En este caso, restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Definimos entonces la función arco-tangente, $\arctan(x)$, como la función que, dado un $x \in \mathbb{R}$, le asocia el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x = \tan(y)$.

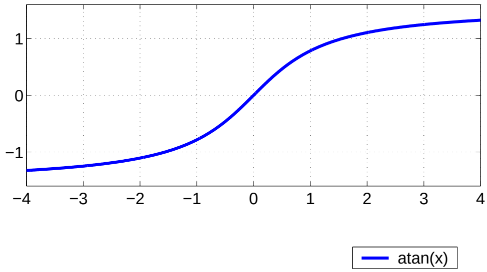


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-tangente

Por tanto, $\mathrm{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La función arco-tangente es una función impar.



Definición de límite. Introducción

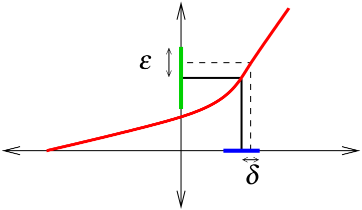


Figura: Eligiendo x en el intervalo azul, $f(x)$ estará en el intervalo verde

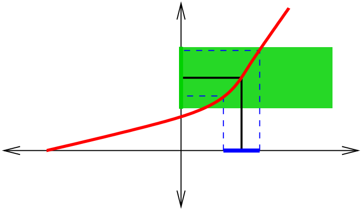


Figura: Si x está en el intervalo azul, $(x, f(x))$ está dentro del rectángulo verde

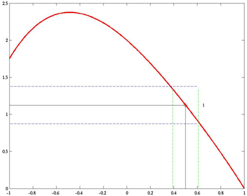
Límite de una función en un punto

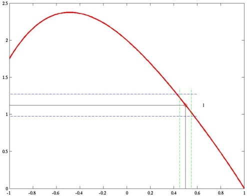
Definición

Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ *es* **límite** *de* f *en* x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$





Propiedad

El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Propiedad

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$. *Entonces,*

- $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \ell_1 \pm \ell_2$
- $\lim_{x\to x_0} (f\, g)(x) = \ell_1\, \ell_2$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \quad si \quad \ell_2 \neq 0$

Límites laterales

Definición

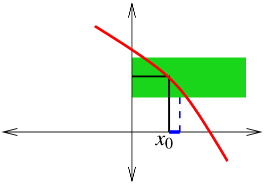
- *El límite de f cuando x se acerca a x_0 por la derecha es l si*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \Big/ \ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right].$$

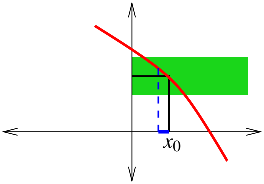
- *El límite de f cuando x se acerca a x_0 por la izquierda es l si*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \Big/ \ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right].$$

Límites laterales



Límite por la derecha



Límite por la izquierda

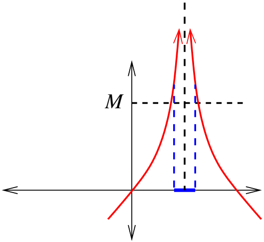
Propiedad

Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *si y sólo si existen* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *y son iguales.*

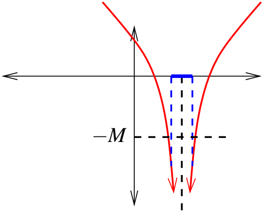
Límites infinitos

Definición

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty :\Longleftrightarrow \left[\forall M > 0, \exists \delta > 0 \big/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\right]$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty :\Longleftrightarrow$
  $\left[\forall M > 0, \exists \delta > 0 \big/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M\right]$.



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

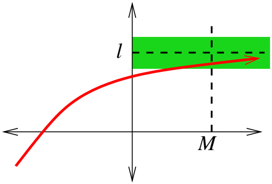


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

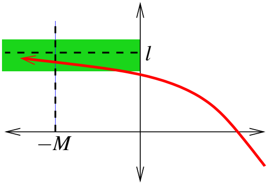
Límites en el infinito

Definición

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \Big[\forall\varepsilon>0, \exists M>0 \Big/ x>M \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\Big]$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \Big[\forall\varepsilon>0, \exists M>0 \Big/ x<-M \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\Big]$.



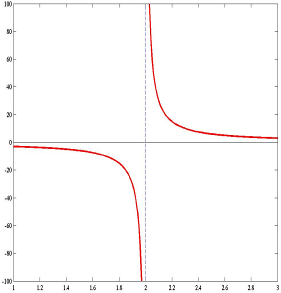
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

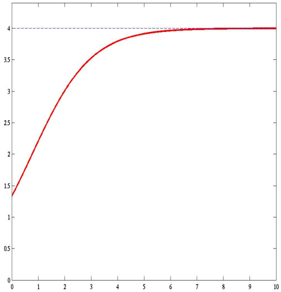


$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

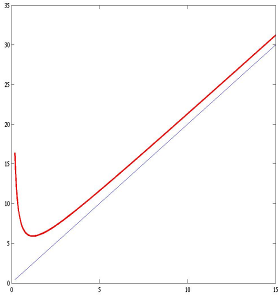
Asíntotas

- La recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la función f si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ y/o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.
- La recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de la función f si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.





Asíntotas



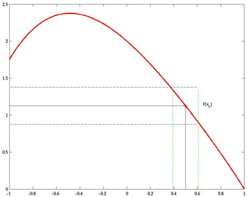
- La recta $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una **asíntota oblicua** de la función f si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+n)) = 0$ y/o $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n)) = 0$.
  Para determinar si una función f tiene asíntotas oblícuas, calculamos
  $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si $m \neq 0$ y $m \neq \infty$, entonces calculamos
  $n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.
  La ecuación de la asíntota es: $y = mx + n$

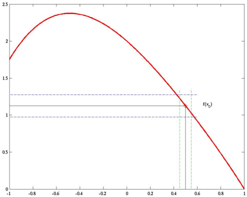
Continuidad

Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$.

Definición

Se dice que la función f *es* **continua** *en* x_0 *si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

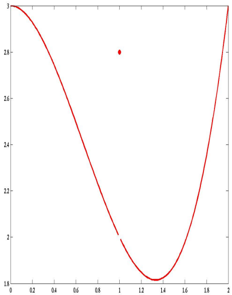


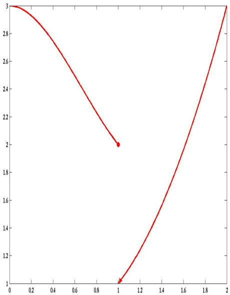


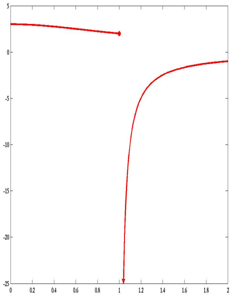
Tipos de discontinuidades

Cuando f no es continua en x_0, se dice que f es **discontinua** en x_0.
Las discontinuidades pueden ser de varios tipos:

- **evitable**: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- **esencial**: no existe el límite de f en x_0, porque:
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
  - alguno de los límites laterales (o ambos) no existe







Propiedad

Si $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones continuas en* $x_0 \in (a,b)$,

- λf *es continua en* x_0, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- $(f \pm g)$ *y* $(f \cdot g)$ *son continuas en* x_0,
- *si* $g(x_0) \neq 0$, *entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* x_0.

Propiedad

El límite conmuta con las funciones continuas, es decir, si f *y* g *son funciones tales que existe* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *y* g *es una función continua en* l, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(l).$$

Propiedad

Si f *es continua en* x_0 *y* g *es continua en* $f(x_0)$, *entonces la función* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

Continuidad en intervalos

Definición

Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f **es continua en** (a,b) *si* f *es continua en todos los puntos de* (a,b).

Definición

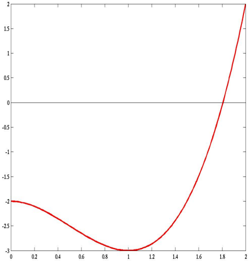
Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f **es continua en** $[a,b]$ *si*

1. f *es continua en* (a,b),
2. f *es continua en* a *por la derecha:* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$,
3. f *es continua en* b *por la izquierda:* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Teorema de Bolzano

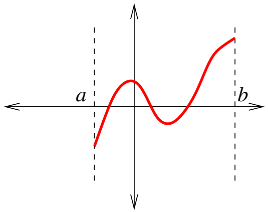
Teorema (de Bolzano)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$. *Supongamos que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces* $\exists x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f(x_0) = 0$.

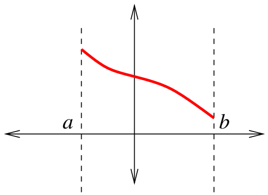


Teorema de Bolzano. Comentarios

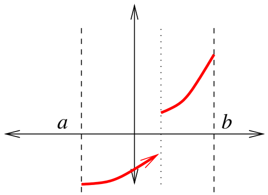
1. Pueden existir varias raíces:



2. Si se suprime alguna de las hipótesis, el teorema no es aplicable:



$f(a)f(b) > 0$



f no continua en $[a,b]$

Método de bisección o dicotomía

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$.

Para aproximar una raíz de f en $[a,b]$, el *método de bisección*:

- Divide el intervalo dado a la mitad.
- Toma el punto medio del intervalo como aproximación de la raíz.
- Repite el proceso con la mitad del intervalo en la que f presenta un cambio de signo.

Método de bisección o dicotomía

- Inicializar $[a_1, b_1] = [a, b]$.
- Para $k = 1, 2, \ldots$

  Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

  Si $f(a_k)f(x_k) < 0$, actualizar $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$

  Si no, $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α. Notamos que

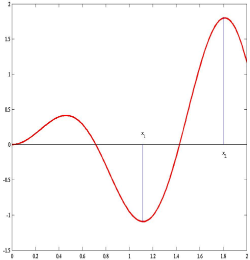
$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

Teorema de Weierstrass

Teorema (de Weierstrass)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$*, entonces* f *alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo* $[a,b]$*, es decir, existen* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tales que:*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a,b]$$



Interpolación de Lagrange

Polinomio de interpolación de Lagrange

Dados

- $n+1$ puntos distintos $\quad x_0, x_1, \ldots, x_n;$
- $n+1$ valores cualesquiera $\quad \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n;$

existe un único polinomio p_n de grado $\leq n$ tal que

$$p_n(x_i) = \omega_i\,, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Este polinomio p_n se denomina polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$.
En particular, si $\omega_i = f(x_i)$, decimos que p_n es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los puntos x_i.

Interpolación de Lagrange. Funciones de base

Polinomios fundamentales:

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe un único polinomio ℓ_i de grado $\leq n$ tal que $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ se dicen polinomios fundamentales de Lagrange de grado n

Fórmula de Lagrange:

El polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ es

$$p_n(x) = \omega_0\,\ell_0(x) + \omega_1\,\ell_1(x) + \ldots + \omega_n\,\ell_n(x)$$

Interpolación de Lagrange. Diferencias divididas

Diferencias divididas

- Diferencias divididas de orden 0:

$$[\omega_i] = \omega_i\,, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

- Diferencias divididas de orden k $(k = 1, \ldots, n)$:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{i+k}] = \frac{[\omega_i, \omega_{i+1}, ..., \omega_{i+k-1}] - [\omega_{i+1}, ..., \omega_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}, \forall i = 0, 1, ..., n-k$$

Ejemplos

- Diferencias divididas de orden uno:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}] = \frac{\omega_i - \omega_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\,, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

- Diferencias divididas de orden dos:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}, \omega_{i+2}] = \frac{[\omega_i, \omega_{i+1}] - [\omega_{i+1}, \omega_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}\,, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-2\,.$$

Nota

Si $\omega_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *denotamos*

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = [f(x_i), \ldots, f(x_{i+k})]$$

Interpolación de Lagrange. Diferencias divididas

Tabla de diferencias divididas

En la práctica, el cálculo de las diferencias divididas se dispone como

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & \omega_0 & [\omega_0,\omega_1] & [\omega_0,\omega_1,\omega_2] & \dots & [\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n] \\
x_1 & \omega_1 & [\omega_1,\omega_2] & [\omega_1,\omega_2,\omega_3] & \dots & \\
x_2 & \omega_2 & [\omega_2,\omega_3] & [\omega_2,\omega_3,\omega_4] & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
x_{n-1} & \omega_{n-1} & [\omega_{n-1},\omega_n] & & & \\
x_n & \omega_n & & & &
\end{array}
$$

Nota

Después de construir la tabla, se puede añadir un dato adicional aprovechando los cálculos ya realizados

Fórmula de Newton

El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ es

$$p_n(x) = [\omega_0] + [\omega_0, \omega_1](x - x_0) + [\omega_0, \omega_1, \omega_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Nota

En la práctica, se pueden calcular $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sucesivamente como

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$