Cálculo
Funciones reales de una variable real

31 de agosto de 2021

Funciones reales de una variable real

Conjuntos de números

1. Números naturales: $\mathbb{N} \longrightarrow$ 1,2,3,...
2. Números enteros: $\mathbb{Z} \longrightarrow$ ...,-2,-1,0,1,2,...
3. Números racionales: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
4. Números reales: $\mathbb{R}$.
5. Números complejos: $\mathbb{C}$.

Propiedades:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2. **Propiedad arquimediana**:
   - Dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ que satisface $n > x$.
   - Dado cualquier número real $y > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ que satisface $1/n < y$.
3. **Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$**: dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ t.q. $a < q < b$. (Podéis ver la demostración aquí: `https://matematics.wordpress.com/2015/02/09/q-es-denso-en-r/`).

Conjuntos de números

Números complejos

Definición

El conjunto de los **números complejos** *es*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ *es la unidad imaginaria.*

En $\mathbb{C}$ se opera de la siguiente manera:

- $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
- $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Distintas representaciones de un número complejo z:

$$a + ib \equiv (a, b) \equiv |z|_\theta$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ es el **módulo** del número complejo z.
$\theta \in [0, 2\pi)$ es el **argumento** del número complejo

Propiedades:

- Sea $a \in \mathbb{R}$; entonces $a = a + 0i \in \mathbb{C}$. Luego, se puede considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- **Teorema Fundamental del Álgebra:** Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C})$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$

Definición

La correspondencia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función** *si a cada $x \in A$ le asigna una única imagen $f(x) \in \mathbb{R}$.*

Se llama:

- **dominio**:
  $\mathscr{D}(f) = \{x \in A /\ \text{existe}\, f(x)\} = \{x \in A / f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Dom}(f)$.
- **imagen**: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$.

Definición

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $B \subset A$.

- *f es* **creciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **estrictamente creciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **decreciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **estrictamente decreciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B.$$

Definición

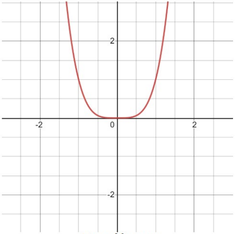
Se dice que f es **inyectiva** *si:*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

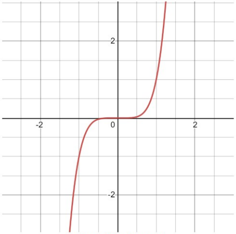
Definición

Se dice que una función f es

- **par** *si* $f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathscr{D}(f)$,
- **impar** *si* $f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathscr{D}(f)$.



Función par



Función impar

Nota

El nombre proviene de los monomios fundamentales. Los monomios con exponente par (x^2, x^4, x^6,...) tienen simetría par y los monomios con exponente impar (x, x^3, x^5,...) tienen simetría impar.

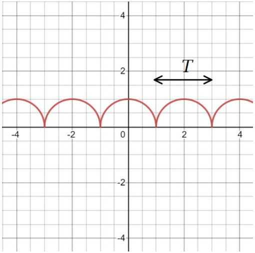
Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **periódica***, con período T, si*

$$f(x) = f(x+T), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo de funciones periódicas: las funciones trigonométricas.

Nota: Si sabemos que una función tiene un período T, será suficiente con representarla en un intervalo de longitud T. Después se repetirá.



Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* $Im(f) \subset B$.
La **función compuesta** $g \circ f$ *(se lee "f compuesta con g") es la función*

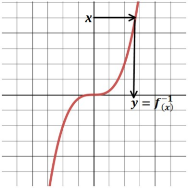
$$\begin{array}{rccl} g \circ f & : & A \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x \in A & \to & (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right) \end{array}$$

$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B \xrightarrow{g} g\left(f(x)\right)$$

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Existe una única función $h : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ tal que $h(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.
Esta función se denomina **inversa de f** *y se suele denotar por f^{-1}.*

Es decir, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$. Además, en este caso se verifica que la composición es conmutativa, es decir, que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ (siendo Id la función identidad, es decir, $\mathrm{Id}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$).



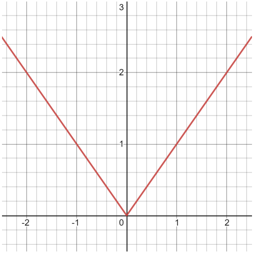
¡Atención: f^{-1} no es lo mismo que $\frac{1}{f}$!

La forma práctica de calcular una función inversa es despejar x en función de y (es decir, de $f(x)$) e intercambiar sus papeles.

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se llama **valor absoluto** *de x a la cantidad:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0, \\ x, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$



Observación

Se verifica que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Propiedad

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene:

- $|x| \geq 0$.
- $|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$.
- *Desigualdad triangular:* $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $|xy| = |x|\,|y|, \qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.
- *Si* $C > 0, \quad |x| \leq C \quad \Longleftrightarrow \quad -C \leq x \leq C$.

Definición

Dado $x \in \mathbb{R}$, su distancia al origen es $d(x,0) := |x|$.
En general, para x, $y \in \mathbb{R}$, definimos la **distancia** *entre estos dos puntos como*

$$d(x,y) := |x-y|.$$

Las **funciones polinómicas** son funciones del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, y $a_n \neq 0$.

Se dice que

- el **grado del polinomio** es n,
- el **coeficiente principal** o **coeficiente director** es a_n.

Ejemplos de funciones polinómicas son

1. $p_1(x) = 5x^3 - 4x + 2$,
2. $p_2(x) = \dfrac{8}{\sqrt{2}} x^3 - \sqrt{e}$,
3. $p_3(x) = \pi x^4 + \dfrac{2}{5} x^3 - 3x$.

El dominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$; su imagen varía en cada caso.

Las **funciones racionales** son cocientes de funciones polinómicas, es decir,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son funciones polinómicas.

Ejemplos de funciones racionales son

1. $f_1(x) = \dfrac{5x^3 - \frac{4}{3}x + 2}{8x^3 - \sqrt{2}}$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 + \pi}$.

El dominio de estas funciones son todos los números reales, excepto aquéllos que anulen el denominador,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\},$$

mientras que su imagen varía en cada caso.

Funciones elementales

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Definimos la **función exponencial de base a** como

$$f(x) = a^x.$$

Se tiene:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$,
- $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$,
- $f(0) = a^0 = 1$.

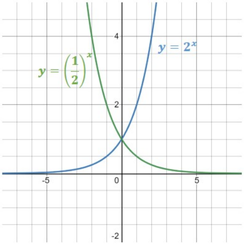
1. **$0 < a < 1$**. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente,
   $$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x > a^y,$$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$,
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
2. **$a > 1$**. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente,
   $$x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y,$$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$,
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Propiedad

i) $a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ *(consecuencia de la propiedad anterior).*



La función exponencial más importante es la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$ (recordemos que $e = 2.7182818\ldots$). Esta función es la que se suele conocer por defecto como **función exponencial**.

Definición

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, se dice que y es el **logaritmo en base a** *de x si $a^y = x$,*

$$y = \log_a(x) :\Longleftrightarrow a^y = x.$$

La función $\log_a$ es la función inversa de la exponencial de base a.

Propiedad

Para cualquier valor de $a > 0$, $a \neq 1$,

- **dominio**: $\mathrm{Dom}(\log_a) = (0, +\infty)$,
- **imagen**: $\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$,
- $\log_a(1) = 0$.

Propiedad

i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \forall x, y > 0,$

ii) $\log_a(x^y) = y \log_a(x), \qquad \forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R},$

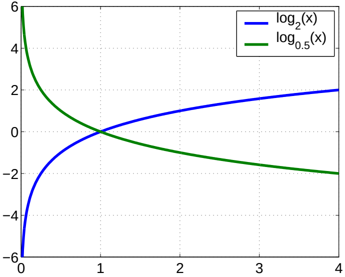
iii) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall x, y > 0.$

Funciones elementales

Funciones logarítmicas

1. $\boldsymbol{a > 1}$. En este caso,
   - $f(x) = \log_a(x)$ es una función estrictamente creciente,
   $$x < y \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) < \log_a(y),$$
   - $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty,$
   - $\lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$

2. $\boldsymbol{a < 1}$. En este caso la situación se invierte, como se muestra en la gráfica.



El logaritmo más utilizado es el logaritmo en base e, $f(x) = \log_e(x)$. Se denomina **logaritmo neperiano**, y se suele denotar por $\ln(x)$ o, simplemente, $\log(x)$.

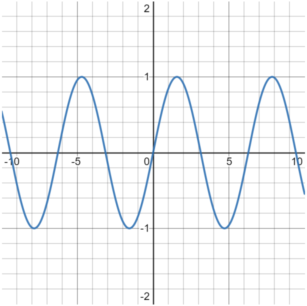
Cualquier otro logaritmo se puede expresar en función del ln mediante la fórmula

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Función seno

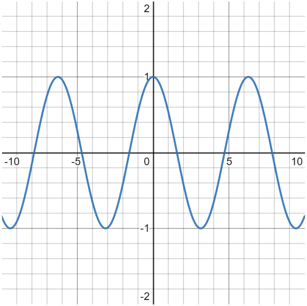
La función $f(x) = \sin(x)$, verifica

- su dominio es $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función impar,
- es una función periódica con período 2π.

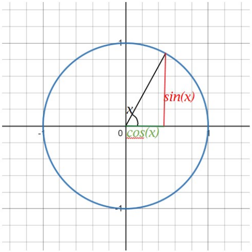


La función $f(x) = \cos(x)$, verifica

- su dominio es $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función par,
- es una función periódica con período 2π.



El seno y el coseno pueden entenderse como las longitudes de las proyecciones sobre los ejes del ángulo, en radianes, dibujado sobre la circunferencia de radio unidad.



Propiedad

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

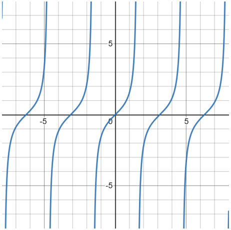
La **función tangente** se define como

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

El **dominio** de esta función lo forman todos los puntos de $\mathbb{R}$ en los que el coseno no se anula, es decir,

$$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

mientras que su **imagen** es $\mathbb{R}$. Además, es una función impar y periódica, con período π.

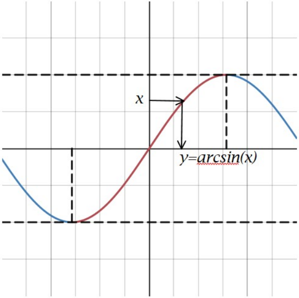


- Cosecante, $\operatorname{cosec}(x) := \dfrac{1}{\sin(x)}$,
- Secante, $\sec(x) := \dfrac{1}{\cos(x)}$,
- Cotangente, $\operatorname{cotan}(x) := \dfrac{1}{\tan(x)}$.

Función arco-seno: inversa de la función seno.

Como la función seno no es una función inyectiva, restringimos su dominio, quedándonos con el seno definido sólo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

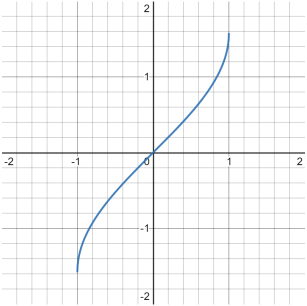
Definimos entonces la función arco-seno, $\arcsin(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1, 1]$, le asocia el único $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin(y) = x$.



Función arco-seno

Por tanto, $\mathrm{Dom}(\arcsin) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

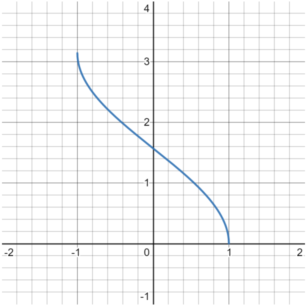
La función arco-seno es una función impar.



Función arco-coseno: inversa de la función coseno.

En este caso, restringimos el dominio de la función coseno para quedarnos con el coseno definido en el intervalo $[0, \pi]$.

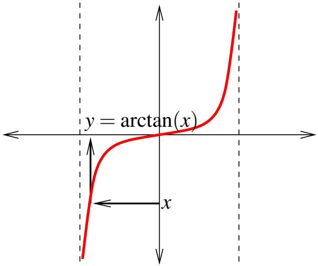
Definimos entonces la función arco-coseno, $\arccos(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1, 1]$, le asocia el único $y \in [0, \pi]$ tal que $x = \cos(y)$.



Función arco-tangente: inversa de la funicón tangente.

En este caso, restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Definimos entonces la función arco-tangente, $\arctan(x)$, como la función que, dado un $x \in \mathbb{R}$, le asocia el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x = \tan(y)$.

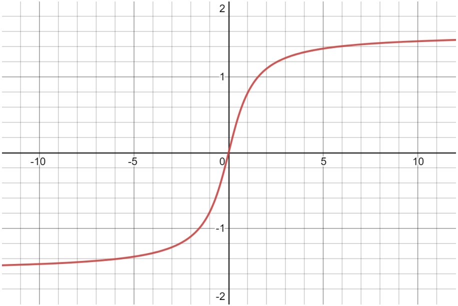


Funciones elementales

Funciones trigonométricas inversas: arco-tangente

Por tanto, $\mathrm{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La función arco-tangente es una función impar.



Definición de límite

Introducción

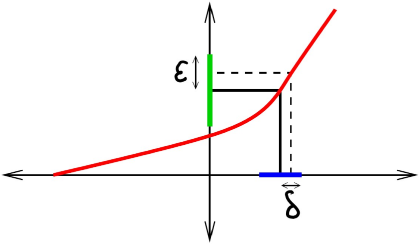


Figure: Eligiendo x en el intervalo azul, $f(x)$ estará en el intervalo verde.

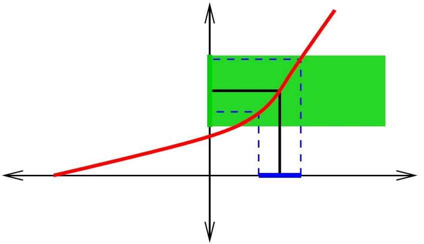


Figure: Si x está en el intervalo azul, $(x,f(x))$ está dentro del rectángulo verde.

Definición de límite

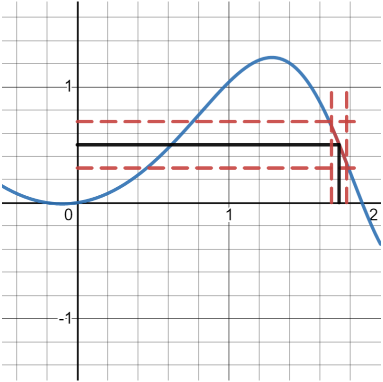
Límite de una función en un punto

Definición

Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ **es límite de** f **en** x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ \textit{tal que} \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



Propiedad

El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Propiedad

Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$. *Entonces,*

- $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \ell_1 \pm \ell_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f\,g)(x) = \ell_1\,\ell_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad$ *si* $\ell_2 \neq 0$.

Definición de límite

Límites laterales

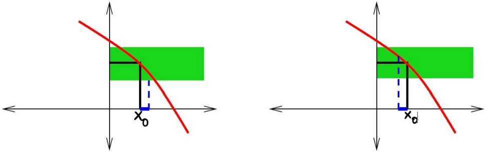
Definición

- *El límite de f cuando x se acerca a x_0 por la derecha es l si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \middle/ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right].$$

- *El límite de f cuando x se acerca a x_0 por la izquierda es l si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \middle/ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right].$$



Límite por la derecha

Límite por la izquierda

Propiedad

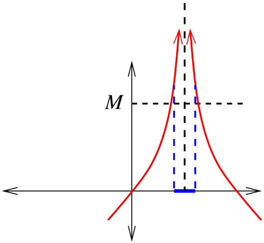
Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ si y sólo si existen $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y son iguales.

Definición de límite

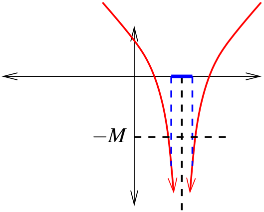
Límites infinitos

Definición

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty :\Leftrightarrow \left[\forall M > 0, \exists\delta > 0 \Big/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\right],$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty :\Leftrightarrow \left[\forall M > 0, \exists\delta > 0 \Big/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M\right].$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$



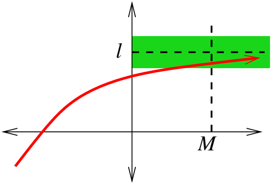
$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Definición de límite

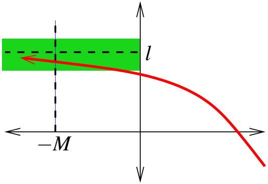
Límites en el infinito

Definición

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 \middle/ x > M \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\right]$,
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 \middle/ x < -M \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\right]$.



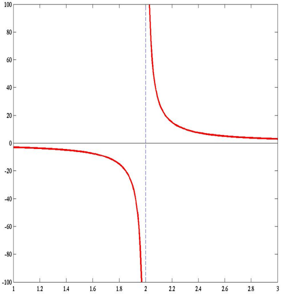
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

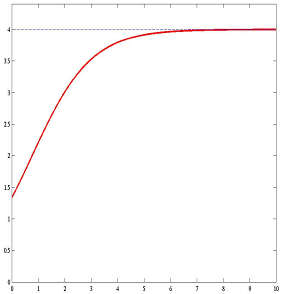


$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

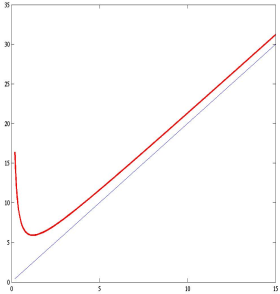
Asíntotas

- La recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la función f si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ y/o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.
- La recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de la función f si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.





Asíntotas

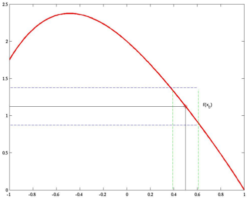


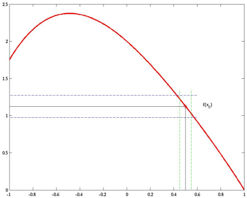
- La recta $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una **asíntota oblicua** de la función f si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ y/o $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.
  Para determinar si una función f tiene asíntotas oblícuas, calculamos
  $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si $m \neq 0$ y $m \neq \infty$, entonces calculamos
  $n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.
  La ecuación de la asíntota es: $y = mx + n$.

Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$.

Definición

Se dice que la función f es **continua** *en x_0 si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.



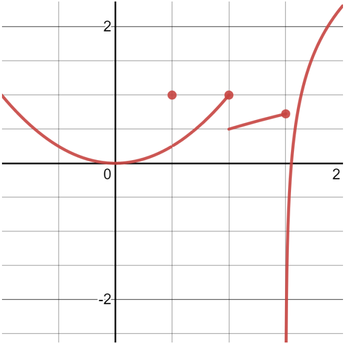


Continuidad

Tipos de discontinuidades

Cuando f no es continua en x_0, se dice que f es **discontinua** en x_0.
Las discontinuidades pueden ser:

- **Evitables**: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
- **esencial**: $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$. Puede ser porque:
  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o
  - alguno de los límites laterales (o ambos) no existe.



Propiedad

Si $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones continuas en* $x_0 \in (a,b)$*,*

- λf *es continua en* x_0*,* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*,*
- $(f \pm g)$ *y* $(f \cdot g)$ *son continuas en* x_0*,*
- *si* $g(x_0) \neq 0$*, entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* x_0*.*

Propiedad

El límite conmuta con las funciones continuas, es decir, si f *y* g *son funciones tales que existe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *y* g *es una función continua en* l*, entonces*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(l).$$

Propiedad

Si f *es continua en* x_0 *y* g *es continua en* $f(x_0)$*, entonces la función* $g \circ f$ *es continua en* x_0*.*

Continuidad en intervalos

Definición

Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f **es continua en** (a,b) *si f es continua en todos los puntos de (a,b).*

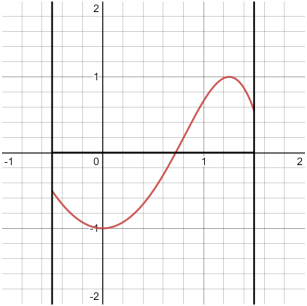
Definición

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f **es continua en** $[a,b]$ *si*

1. *f es continua en (a,b),*
2. *f es continua en a por la derecha:* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$,
3. *f es continua en b por la izquierda:* $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Teorema (de Bolzano)

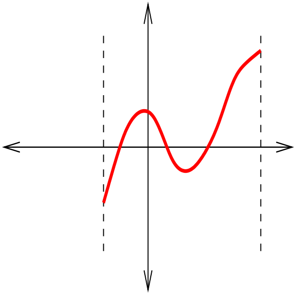
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$. *Supongamos que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces* $\exists x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f(x_0) = 0$.



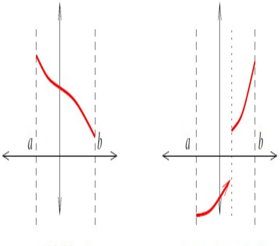
Continuidad en intervalos

Teorema de Bolzano

1. Pueden existir varias raíces:



2. Si se suprime alguna de las hipótesis, el teorema no es aplicable:



Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$.

Para aproximar una raíz de f en $[a,b]$, el **método de dicotomía**:

- Divide el intervalo dado a la mitad.
- Toma el punto medio del intervalo como aproximación de la raíz.
- Repite el proceso con la mitad del intervalo en la que f presenta un cambio de signo.

Algoritmo del método de dicotomía:

- Inicializar $[a_1, b_1] = [a, b]$.
- Para $k = 1, 2, \ldots$

  Calcular $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

  Si $f(a_k)f(x_k) < 0$, actualizar $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$.

  Si no, $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$.

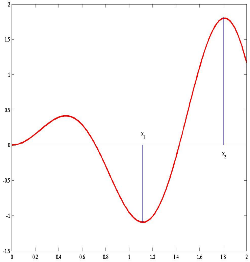
Nota: El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α.

Cota de error: $|x_k - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^k}$.

Teorema (de Weierstrass)

Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo $[a,b]$.
Es decir, existen $x_1,x_2\in[a,b]$ tales que:

$$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)\,,\qquad \forall x\in[a,b].$$



Interpolación de Lagrange

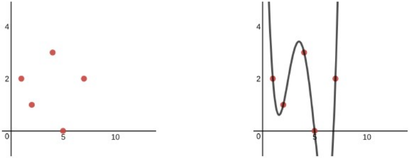
Dados

- $n+1$ puntos distintos $\quad x_0, x_1, \ldots, x_n$;
- $n+1$ valores cualesquiera $\quad y_0, y_1, \ldots, y_n$;

existe un único polinomio p_n de grado $\leq n$ tal que

$$p_n(x_i) = y_i\,, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Este polinomio p_n se denomina **polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ **relativo a los valores** $y_0, y_1, \ldots, y_n$.



En particular, si $y_i = f(x_i)$, decimos que p_n **es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función** f **en los puntos** x_i.

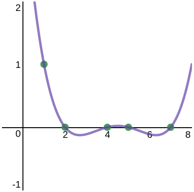
Interpolación de Lagrange

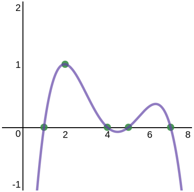
Definición

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe un único polinomio ℓ_i de grado $\leq n$ tal que $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$):

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ *se dicen* **polinomios fundamentales de Lagrange de grado n**.





Fórmula de Lagrange:

El polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ es

$$p_n(x) = y_0 \,\ell_0(x) + y_1 \,\ell_1(x) + \ldots + y_n \,\ell_n(x).$$

Interpolación de Lagrange

Tabla de diferencias divididas

- Diferencias divididas de orden 0:
$$[y_i] = y_i\,, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n\,.$$
- Diferencias divididas de orden k $(k = 1, \ldots, n)$:
$$[y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k}] = \frac{[y_i, y_{i+1}, ..., y_{i+k-1}] - [y_{i+1}, ..., y_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}, \forall i = 0, 1, ..., n-k\,.$$

En la práctica, el cálculo de las diferencias divididas se dispone en tabla:

x_0	y_0	$[y_0, y_1]$	$[y_0, y_1, y_2]$	$\ldots$	$[y_0, y_1, \ldots, y_n]$
x_1	y_1	$[y_1, y_2]$	$[y_1, y_2, y_3]$	$\ldots$	
x_2	y_2	$[y_2, y_3]$	$[y_2, y_3, y_4]$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
x_{n-1}	y_{n-1}	$[y_{n-1}, y_n]$			
x_n	y_n				

Nota

Después de construir la tabla, se puede añadir un dato adicional aprovechando los cálculos ya realizados.

Fórmula de Newton: El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} p_n(x) = [y_0] + [y_0,y_1]\,(x-x_0) + [y_0,y_1,y_2]\,(x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ + [y_0,y_1,\ldots,y_n]\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$