Derivación de funciones reales de una variable

Derivada de una función en un punto. Interpretación física y geométrica

Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

Derivabilidad

Cálculo de derivadas

Regla de L'Hôpital

Derivadas sucesivas

Extremos relativos y absolutos

Teoremas para funciones derivables en intervalos cerrados

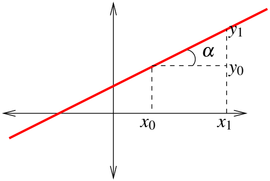
Concavidad y convexidad

Teorema de Taylor

Derivación de una función en un punto

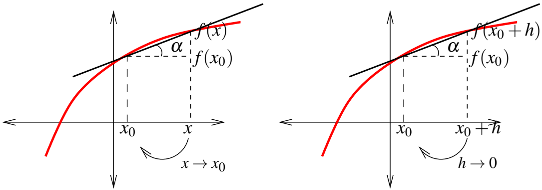
Definición de derivada. Introducción

Recordemos la definición de pendiente de una recta:



$$\text{Pendiente} = m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Y ahora consideremos las pendientes de las rectas secantes a una función, lo que, en el límite, será la definición de derivada:



$$\tan\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \tan\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Se dice que f es **derivable** *en el punto $x_0 \in (a, b)$ si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En ese caso, dicho límite se representa por $f'(x_0)$ y se denomina **derivada de f en x_0**.

Derivación de una función en un punto

Definición de derivada. Observaciones

1. Vemos la utilidad de excluir el punto x_0 (o bien el punto $h = 0$) en la definición de límite. En la expresión $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ no podemos hacer nada si $h = 0$, ya que tendríamos una división entre 0.
2. El cociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mide la variación de la función respecto a la variación de la variable. Por ese motivo a $f'(x_0)$ se le denomina, en ocasiones, coeficiente de variación de f o razón de cambio de la función f en el punto x_0.
3. La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es (fórmula punto-pendiente):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0).$$

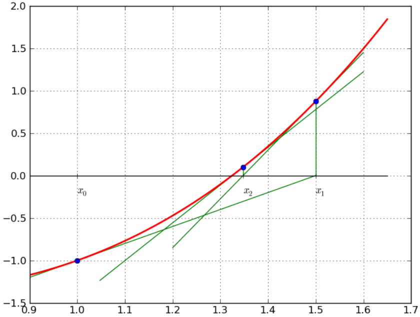
Por tanto, la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

Introducción

Para un primer punto x_0, aproximación de una raíz de f, construimos x_1 calculando la intersección de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ con el eje de abscisas:



Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

- La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

- El punto de corte de esta recta con el eje de abscisas $(\,y = 0\,)$ es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{si } f'(x_0) \neq 0$$

- Para $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{si } f'(x_k) \neq 0$$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α de la función f.

Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$.

Definición

- *Definimos la* **derivada por la izquierda** *de f en x_0 como*

$$f'(x_0^-) := \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

- *Definimos la* **derivada por la derecha** *de f en x_0 como*

$$f'(x_0^+) := \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

siempre que estos límites existan.

Propiedad

La función f es derivable en x_0 si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0 y $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$.

Propiedad

Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.
El recíproco no es cierto.

Consecuencia: Si f no es continua en x_0, entonces f no es derivable en x_0.

Recuerda:

- Derivable en $x_0 \Rightarrow$ continua en x_0
- No continua en $x_0 \Rightarrow$ no derivable en x_0

Cálculo de derivadas

Derivadas elementales

- $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$
- $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x},$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e,$
- $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a,$
- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x,$
- $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x},$
- $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Propiedades aritméticas

Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, dos funciones derivables en un punto $x_0 \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, si $g(x_0) \neq 0$.

Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones tales que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Una ecuación $F(x,y)=0$ **define implícitamente una función** f en un intervalo (a,b) si:

$$F(x,f(x))=0 \qquad \forall x\in(a,b).$$

Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2+y^2=4,$$

define la función

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad \forall x\in(-2,+2).$$

Propiedad

Si f es derivable, entonces F también lo es.

- Como consecuencia, podemos calcular f' a partir de F'
- Para calcular $F'=\frac{dF}{dx}$, derivaremos los términos en los que aparezcan expresiones de "x" de forma usual, mientras que para los términos con "y" tendremos en cuenta la regla de la cadena.

- Dada la ecuación $x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$, deseamos calcular y'.

  Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$2x + 4y\,y' - 3y - 3x\,y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3y - 2x}{4y - 3x}.$$

- Dada la ecuación $\dfrac{x-1}{4} + 4y^2 = 1$, deseamos calcular y'.

  Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{1}{4} + 8y\,y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{32y}.$$

Cálculo de derivadas

Se usa para derivar funciones de la forma $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

Para calcular $f'(x)$ primero tomamos logaritmos,

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(g(x)^{h(x)}\right) \Rightarrow \ln(f(x)) = h(x)\ln(g(x)),$$

después derivamos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)}\right).$$

Finalmente, sustituyendo $f(x)$ por su valor, resulta:

$$f'(x) = g(x)^{h(x)}\left(h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)}\right).$$

Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, con $x_0 \in (a,b)$ y $r > 0$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces,

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital

Propiedades

- El recíproco no es cierto:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \not\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- El enunciado del teorema también es válido si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

  o cuando calculamos los límites en $\pm\infty$

- Si en la expresión $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a producir una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, se puede volver a aplicar L'Hôpital (si se verifican las hipótesis).

- Las indeterminaciones $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞ se pueden reducir a indeterminaciones de tipo L'Hôpital.

Definición

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable en (a,b). Definimos la función derivada como:

$$\begin{array}{rccc} f': & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f'(x) \end{array}$$

- Dado $x_0\in(a,b)$, se define:

$$f''(x_0)=(f')'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

  si este límite existe y es finito. En este caso, se dice que f es derivable dos veces en x_0
- En general, una vez que se tiene $f^{(n)}:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, se define:

$$f^{(n+1)}(x_0)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0)$$

Definición

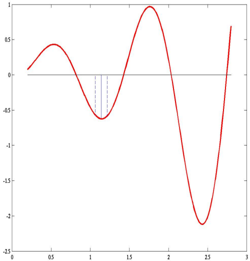
Se dice que f **es de clase** n **en** (a,b), $f \in \mathscr{C}^n(a,b)$, *si existe la derivada de orden* n *de* f *en* (a,b) *y* $f^{(n)}$ *es continua en* (a,b).

- Se dice que $f \in \mathscr{C}^\infty(a,b)$ si $f \in \mathscr{C}^n(a,b)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Se dice que $f \in \mathscr{C}^n[a,b]$ si existe $(c,d) \supset [a,b]$ tal que $f \in \mathscr{C}^n(c,d)$

Definición

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. *Se dice que la función* f *tiene un* **mínimo relativo** *(o mínimo local) en* $x_0\in(a,b)$ *si existe* $r>0$ *tal que:*

$$f(x_0)\leq f(x)\,,\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)$$

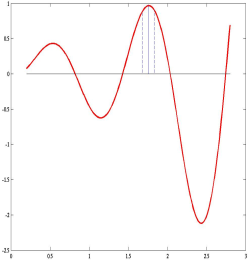


Extremos relativos y absolutos

Definición

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. Se dice que la función f tiene un **máximo relativo** *(o máximo local) en $x_0\in(a,b)$ si existe $r>0$ tal que:*

$$f(x_0)\geq f(x)\,,\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)$$



Propiedad

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a,b)$. Si f tiene en x_0 un extremo relativo, entonces $f'(x_0) = 0$.

Criterio de la primera derivada

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $x_0 \in (a,b)$ y sea $r > 0$ tal que f es derivable en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$.

- Si $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces f presenta en x_0 un mínimo relativo
- Si $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo

Criterio de la segunda derivada

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ con derivada segunda continua en (a,b). Sea $x_0\in(a,b)$ tal que $f'(x_0)=0$. Entonces:

- si $f''(x_0)<0$, f presenta en x_0 un máximo relativo,
- si $f''(x_0)>0$, f presenta en x_0 un mínimo relativo.

Propiedad

Sean $f\in\mathscr{C}^n(a,b)$ y $x_0\in(a,b)$ tales que $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ y $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Entonces

- *Si n es par y $f^{(n)}(x_0)<0$, f presenta en x_0 un máximo relativo.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(x_0)>0$, f presenta en x_0 un mínimo relativo.*
- *Si n es impar, f no tiene extremo relativo en x_0.*

Extremos relativos y absolutos

Extremos absolutos

Sabemos por el teorema de Weierstrass que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo en el intervalo $[a,b]$. Son los denominados **extremos absolutos** de f en $[a,b]$.
Puede alcanzarlos en:

1. Puntos de (a,b) donde f es derivable y $f'(x) = 0$.
2. Puntos de (a,b) donde f no es derivable.
3. Los extremos del intervalo, a y b.

Calculando las imágenes de los puntos obtenidos en los pasos anteriores y comparándolas, obtenemos los extremos absolutos de f en $[a,b]$.

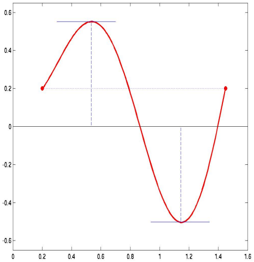
Teoremas para funciones derivables en intervalos cerrados

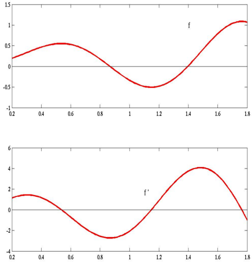
Teorema (de Rolle)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$. Entonces existe al menos un punto $x_0\in(a,b)$ tal que $f'(x_0)=0$.

Consecuencias:

- Si f tiene n raíces reales, f' tendrá, al menos $n-1$ raíces reales.
- Si f' tiene n raíces reales, f tendrá, a lo sumo $n+1$ raíces reales.





Teorema (del valor medio de Lagrange)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe al menos un $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Aplicaciones:

Sea f derivable en (a,b).

1. Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **monótona creciente** en el intervalo.
2. Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **monótona decreciente** en el intervalo.
3. Si $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, f es **constante** en el intervalo.
4. Si $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **inyectiva** en el intervalo.

Concavidad y convexidad

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua.

Definición

Se dice que f es **convexa** *en $[a,b]$ si*

$$f(x)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\,,\qquad \forall x\in[a,b].$$

Definición

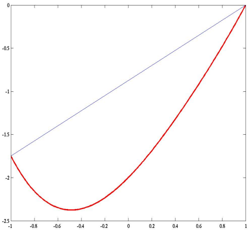
Se dice que f es **cóncava** *en $[a,b]$ si $(-f)$ es convexa en $[a,b]$.*

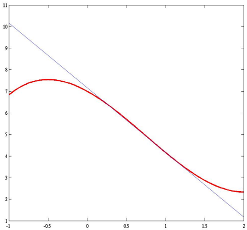
Definición

Se dice que f tiene un **punto de inflexión** *en x_0 si cambia de cóncava a convexa (o viceversa) en x_0.*

Propiedad

- *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b). *Entonces* f *es convexa en* $[a,b]$ *si y sólo si* f' *es creciente en* (a,b). *Esto equivale a que* $f'' \geq 0$, *si* f *tiene derivada segunda.*
- *Análogamente,* f *es cóncava en* $[a,b]$ *si y sólo si* f' *es decreciente en* (a,b) *(es decir, si y sólo si* $f'' \leq 0$ *en caso de existir derivada segunda).*





Teorema de Taylor

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que admite derivada de orden $(n+1)$ continua y sea $x_0\in[a,b]$.

Definición

El **polinomio de Taylor de orden n relativo a la función f y al punto x_0** *es:*

$$P_{n,f,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Teorema (de Taylor)

Para todo $x\in(a,b)$, existe $\xi\in(x,x_0)$ (ó $\xi\in(x_0,x)$, dependiendo de cuál de estos dos puntos sea mayor) tal que

$$f(x)=P_{n,f,x_0}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=P_{n,f,x_0}(x)+R_{n,f,x_0}(x).$$

Teorema de Taylor

Observaciones

- El polinomio de Taylor de orden 1 relativo a la función f y al punto x_0 define una **aproximación lineal local** de f en un entorno de x_0.
- Si $x_0 = 0$, el polinomio se denomina **de MacLaurin**
- Hay que fijarse bien en que ξ no es conocido (lo único que sabemos es que $\xi \in (x, x_0)$ ó $\xi \in (x_0, x)$).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ cuando x está cerca de x_0. Además, esta aproximación es mejor cuanto mayor sea n (el que x esté *lejos* de x_0 puede compensarse aumentando n).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ tal que en el punto x_0 coinciden él y sus derivadas hasta el orden n con f y sus derivadas.

Debemos destacar que

$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) - P_{n,f,x_0}(x) = R_{n,f,x_0}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f(x) - P_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|R_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

No conocemos cuánto vale ξ, por lo tanto no conocemos cuánto vale $\left|R_{n,f,x_0}(x)\right|$... **¡pero podemos acotarlo!** Como sabemos que ξ está entre x y x_0 (ó entre x_0 y x),

$$\left|f(x) - P_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{\max\limits_{s\in[x,x_0]}\left|f^{(n+1)}(s)\right|}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{n+1}.$$

Teorema de Taylor

Ejemplo gráfico

Polinomios de Taylor para la función $f(x) = e^x$ (en rojo, línea continua).
En **verde**, $P_{2,x,0}$. En **azul**, $P_{5,x,0}$.