Cálculo
Derivación de funciones reales de una variable real

29 de Marzo de 2016

Derivación de funciones reales de una variable real

Derivada de una función en un punto. Interpretación física y geométrica

Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

Derivabilidad

Cálculo de derivadas

- Derivadas de las funciones elementales
- Propiedades de la derivada. Regla de la cadena
- Derivación implícita y logarítmica
- La regla de L'Hôpital
- Derivadas sucesivas

Extremos relativos y absolutos

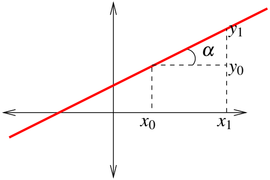
Teoremas de Rolle y del valor medio de Lagrange

Concavidad y convexidad

Polinomio de Taylor

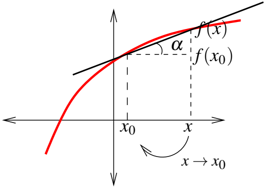
Definición de derivada. Introducción

Recordemos la definición de pendiente de una recta:

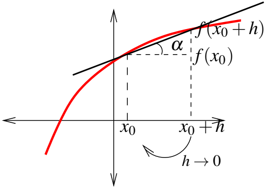


$$\text{Pendiente} = m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Y ahora consideremos las pendientes de las rectas secantes a una función, lo que, en el límite, será la definición de derivada:



$$\tan\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



$$\tan\alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definición de derivada

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Se dice que f es **derivable** *en el punto $x_0 \in (a, b)$ si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En ese caso, dicho límite se representa por $f'(x_0)$ y se denomina **derivada de f en x_0**.

Definición de derivada. Observaciones

1. Vemos la utilidad de excluir el punto x_0 (o bien el punto $h = 0$) en la definición de límite. En la expresión $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ no podemos hacer nada si $h = 0$, ya que tendríamos una división entre 0.
2. El cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mide la variación de la función respecto a la variación de la variable. Por ese motivo a $f'(x_0)$ se le denomina, en ocasiones, coeficiente de variación de f o razón de cambio de la función f en el punto x_0.
3. La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es (fórmula punto-pendiente):

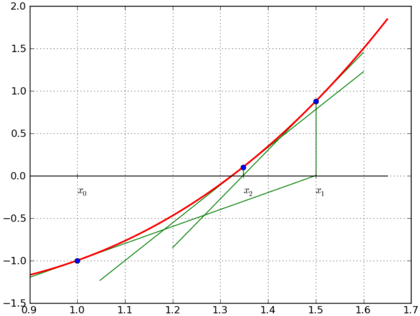
$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0).$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ es $(m = f'(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

Dada una aproximación x_0 de una raíz de f, construimos x_1 calculando la intersección de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ con el eje de abscisas:



Aproximación de raíces: Método de Newton–Raphson

- La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- El punto de corte de esta recta con el eje de abscisas ($y = 0$) es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{si } f'(x_0) \neq 0$$

- Para $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{si } f'(x_k) \neq 0$$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α de la función f.

Derivadas laterales

Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$.

Definición

Se llama

- **derivada por la izquierda** *de* f *en* x_0 *a*

$$f'(x_0^-) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

- **derivada por la derecha** *de* f *en* x_0 *a*

$$f'(x_0^+) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que estos límites existan.

Propiedad

La función f *es derivable en* x_0 *si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en* x_0 *y* $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

Derivable $\Rightarrow$ continua

Propiedad

Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.
El recíproco no es cierto.

Consecuencia: Si f no es continua en x_0, entonces f no es derivable en x_0.

Recuerda:

- Derivable en $x_0 \Rightarrow$ continua en x_0
- No continua en $x_0 \Rightarrow$ no derivable en x_0

Derivadas elementales

- ▷ $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$, $\qquad \dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\qquad \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- ▷ $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Propiedades de la derivada

Propiedades aritméticas

Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, dos funciones derivables en un punto $x_0 \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, si $g(x_0) \neq 0$.

Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones tales que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Derivación implícita

Una ecuación $F(x,y)=0$ **define implícitamente una función** f en un intervalo (a,b) si:

$$F(x,f(x))=0 \qquad \forall x\in(a,b)$$

- Por ejemplo, la ecuación:

  $$x^2+y^2=4$$

  define la función

  $$f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad \forall x\in(-2,+2)$$

Propiedad

Si f es derivable, entonces F también lo es.

- Como consecuencia, podemos calcular f' a partir de F'
- Para calcular $F'=\frac{dF}{dx}$, derivaremos los términos en los que aparezcan expresiones de x de forma usual, mientras que para los términos con y tendremos en cuenta la regla de la cadena.

Derivación implícita. Ejemplos

- Dada la ecuación $x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$, deseamos calcular y'.

  Derivamos aplicando la regla de la cadena:

  $$2x + 4yy' - 3y - 3xy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3y - 2x}{4y - 3x}.$$

- Dada la ecuación $\frac{x-1}{4} + 4y^2 = 1$, deseamos calcular y'.

  Derivamos aplicando la regla de la cadena:

  $$\frac{1}{4} + 8yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{32y}.$$

Derivación logarítmica

- Se usa para derivar funciones de la forma $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

- Supongamos que queremos calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$
  Sea $y = x^x$. Tomando logaritmos:

  $$\ln y = x \ln x$$

  y derivando:

  $$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$$

  de donde: $\quad y' = y(1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, con $x_0 \in (a,b)$ y $r > 0$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces,

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital

- El recíproco no es cierto:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \not\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- El enunciado del teorema también es válido si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

  o cuando calculamos los límites en $\pm\infty$

- Si en la expresión $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a producir una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, se puede volver a aplicar L'Hôpital (si se verifican las hipótesis).

- Las indeterminaciones $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞ se pueden reducir a indeterminaciones de tipo L'Hôpital

Derivadas sucesivas

Definición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en* (a,b). *Definimos la función derivada como:*

$$\begin{array}{rccc} f' : & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f'(x) \end{array}$$

- Dado $x_0 \in (a,b)$, se define:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

  si este límite existe y es finito. En este caso, se dice que f es derivable dos veces en x_0

- En general, una vez que se tiene $f^{(n)} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, se define:

$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$$

Definición

Se dice que f es de **clase** *n en (a,b),*

$$f \in \mathscr{C}^n(a,b)$$

si existe la derivada de orden n de f en (a,b) y $f^{(n)}$ es continua en (a,b).

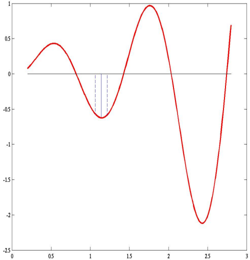
- Se dice que $f \in \mathscr{C}^\infty(a,b)$ si $f \in \mathscr{C}^n(a,b)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Se dice que $f \in \mathscr{C}^n[a,b]$ si existe $(c,d) \supset [a,b]$ tal que $f \in \mathscr{C}^n(c,d)$

Extremos relativos

Definición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se dice que la función* f *tiene un* **mínimo local** *o relativo en* $x_0 \in (a,b)$ *si existe* $r > 0$ *tal que:*

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

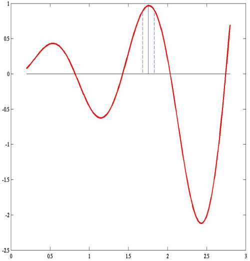


Extremos relativos

Definición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se dice que la función* f *tiene un* **máximo local** *o relativo en* $x_0 \in (a,b)$ *si existe* $r > 0$ *tal que:*

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$



Propiedad

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable en $x_0\in(a,b)$. Si f tiene en x_0 un extremo relativo, entonces $f'(x_0)=0$.

Criterio de la primera derivada

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua, $x_0\in(a,b)$ y sea $r>0$ tal que f es derivable en $(x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r)$.

- Si $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0-r,x_0)$ y $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0,x_0+r)$, entonces f presenta en x_0 un mínimo relativo
- Si $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0-r,x_0)$ y $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0,x_0+r)$, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo

Criterio de la segunda derivada

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ con derivada segunda continua en (a,b). Sea $x_0\in(a,b)$ tal que $f'(x_0)=0$. Entonces:

- si $f''(x_0)<0$, $\quad f$ presenta en x_0 un máximo relativo,
- si $f''(x_0)>0$, $\quad f$ presenta en x_0 un mínimo relativo.

Propiedad

Sean $f\in\mathscr{C}^n(a,b)$ y $x_0\in(a,b)$ tales que
$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ *y* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. *Entonces*

- *Si n es par y $f^{(n)}(x_0)<0$, f presenta en x_0 un máximo relativo.*
- *Si n es par y $f^{(n)}(x_0)>0$, f presenta en x_0 un mínimo relativo.*
- *Si n es impar, f no tiene extremo relativo en x_0.*

Extremos absolutos

Sabemos por el teorema de Weierstrass que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo en el intervalo $[a,b]$. Son los denominados **extremos absolutos** de f en $[a,b]$. Puede alcanzarlos en:

1. Puntos de (a,b) donde f es derivable y $f'(x) = 0$.
2. Puntos de (a,b) donde f no es derivable.
3. Los extremos del intervalo, a y b.

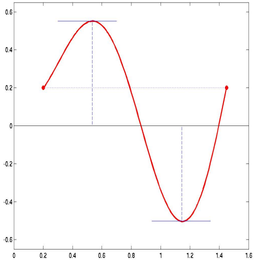
Calculando las imágenes de los puntos obtenidos en los pasos anteriores y comparándolas, obtenemos los extremos absolutos de f en $[a,b]$.

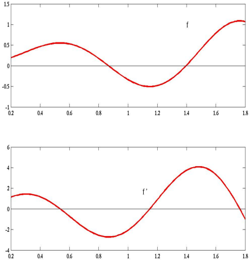
Teorema (de Rolle)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$*, derivable en* (a,b) *y tal que* $f(a)=f(b)$*. Entonces existe al menos un punto* $x_0\in(a,b)$ *tal que* $f'(x_0)=0$

Consecuencias:

- Si f tiene n raíces reales, f' tendrá, al menos $n-1$ raíces reales
- Si f' tiene n raíces reales, f tendrá, a lo sumo $n+1$ raíces reales





Teorema del valor medio de Lagrange

Teorema (del valor medio de Lagrange)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b). *Entonces existe al menos un* $x_0 \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aplicaciones:

Sea f derivable en (a,b).

1. Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **monótona creciente** en el intervalo
2. Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **monótona decreciente** en el intervalo
3. Si $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, f es **constante** en el intervalo
4. Si $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, f es **inyectiva** en el intervalo

Concavidad y convexidad

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Definición

Se dice que f es **convexa** *en $[a,b]$ si*

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a), \qquad \forall x \in [a,b]$$

Definición

Se dice que f es **cóncava** *en $[a,b]$ si $(-f)$ es convexa en $[a,b]$*

Definición

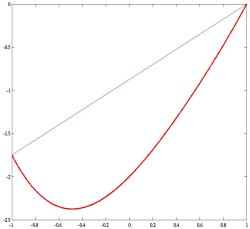
Se dice que f tiene un **punto de inflexión** *en x_0 si cambia de cóncava a convexa (o viceversa) en x_0*

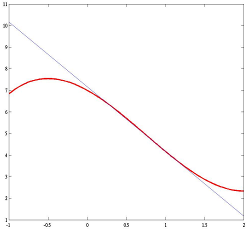
Concavidad y convexidad

Propiedad

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). Esto equivale a que $f'' \geq 0$, si f tiene derivada segunda.

- Análogamente, f es cóncava en $[a,b]$ si y sólo si f' es decreciente en (a,b) (es decir, si y sólo si $f'' \leq 0$ en caso de existir derivada segunda).





Polinomio de Taylor

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivada de orden $(n+1)$ continua y sea $x_0 \in [a,b]$.
El polinomio de Taylor de orden n relativo a la función f y al punto x_0 es:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Entonces, para todo $x \in (a,b)$, existe $\xi \in (x,x_0)$ (ó $\xi \in (x_0,x)$, dependiendo de cuál de estos dos puntos sea mayor) tal que:

$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x).$$

Polinomio de Taylor. Observaciones

- El polinomio de Taylor de orden 1 relativo a la función f y al punto x_0 define una **aproximación lineal local** de f en un entorno de x_0.
- Si $x_0 = 0$, el polinomio se denomina **de MacLaurin**
- Hay que fijarse bien en que ξ no es conocido (lo único que sabemos es que $\xi \in (x, x_0)$ ó $\xi \in (x_0, x)$).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ cuando x está cerca de x_0. Además, esta aproximación es mejor cuanto mayor sea n (el que x esté *lejos* de x_0 puede compensarse aumentando n).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ tal que en el punto x_0 coinciden él y sus derivadas hasta el orden n con f y sus derivadas.

Teorema de Taylor. Acotación del error

Debemos destacar que

$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) - P_{n,f,x_0}(x) = R_{n,f,x_0}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f(x) - P_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|R_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

No conocemos cuánto vale ξ, por lo tanto no conocemos cuánto vale $\left|R_{n,f,x_0}(x)\right|$... ¡pero podemos acotarlo! Como sabemos que ξ está entre x y x_0 (ó entre x_0 y x),

$$\left|f(x) - P_{n,f,x_0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{\max\limits_{s\in[x,x_0]} \left|f^{(n+1)}(s)\right|}{(n+1)!} \left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

Polinomio de Taylor. Representación gráfica