Cálculo
Integración de funciones reales de una variable real

24 de octubre de 2014

Integración de funciones reales de una variable real

La integral indefinida. Cálculo de primitivas

La integral de Riemann

Integración numérica

Integración impropia

Cálculo de áreas y volúmenes

Introducción a las ecuaciones diferenciales

La integral indefinida

La integral indefinida

Sea $f : I \to \mathbb{R}$

Definición

Se dice que F es una **primitiva** *de f en I si*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

Teorema

Si F y G son dos primitivas de una misma función f en un intervalo I, entonces,

$$\exists k \in \mathbb{R} \textit{ tal que } F(x) = G(x) + k, \qquad \forall x \in I$$

En consecuencia, si conocemos una primitiva F de f, conocemos todas.

La integral indefinida

Definición

Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama **integral indefinida** *de f al conjunto de todas las primitivas de f, y se escribe:*

$$\int f(x)\,dx = \left\{F \,/\, F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I\right\}$$

- En consecuencia, si conocemos una primitiva F de f:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + k, \quad \forall k \in \mathbb{R}\}$$

Propiedad (linealidad de la integral)

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Integrales inmediatas

$$\int f(x)^m f'(x)\,dx = \frac{1}{m+1} f(x)^{m+1} + C, \quad m \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int [\sin f(x)]\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int [\cos f(x)]\, f'(x)\,dx = \sin f(x) + C$$

Integrales inmediatas

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + C$$

$$\int [\tan f(x)]\, f'(x)\,dx = -\ln|\cos f(x)| + C$$

$$\int [\cot f(x)]\, f'(x)\,dx = \ln|\sin f(x)| + C$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = (uv)(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

o bien,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Es conveniente cuando el integrando es un producto de:

- polinomio y exponencial
- polinomio y *seno* o *coseno*
- exponencial y *seno* o *coseno*

Integración por cambio de variable

Sean:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,

$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva, con derivada continua y tal que:

$$\varphi\left([\alpha,\beta]\right) \subset [a,b]$$

Entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

La integral de Riemann

Sumas de Riemann

Sea un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Definición

Se llama **partición** $\mathscr{P}$ *de* $[a,b]$ *a un conjunto de puntos* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *que verifica:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definición

Dada una partición $\mathscr{P}$*, denotamos*

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \qquad\qquad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Sumas de Riemann

Definición

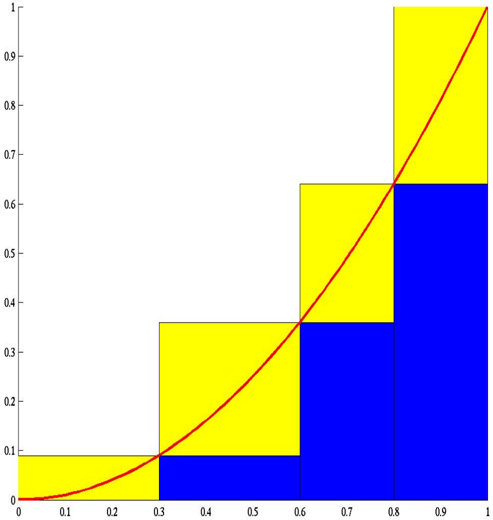
Se llama **suma superior de Riemann** *de la función f relativa a la partición $\mathscr{P}$ a:*

$$U(\mathscr{P},f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

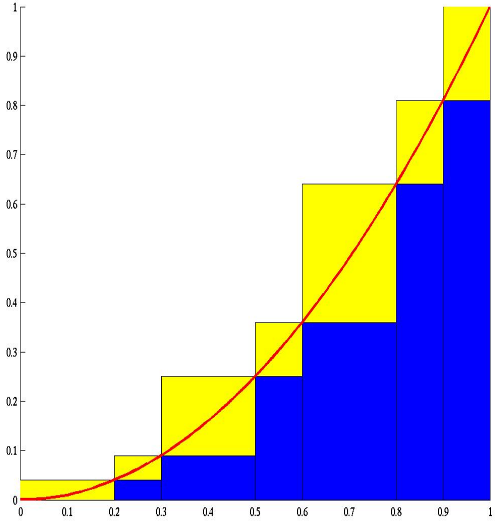
Definición

Se llama **suma inferior de Riemann** *de la función f relativa a la partición $\mathscr{P}$ a:*

$$L(\mathscr{P},f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$



0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Integral de Riemann

Definición

Dada una función f acotada, se dice que f es integrable en $[a,b]$ en el sentido de Riemann si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathscr{P} \textit{ partición de } [a,b] \textit{ tal que } U(\mathscr{P},f) - L(\mathscr{P},f) < \varepsilon.$$

Se escribe $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Interpretación geométrica

Si f es una función positiva en un intervalo $[a,b]$, su integral de Riemann, $\int_a^b f(x)\,dx$, representa el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje $y = 0$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Teorema (de integrabilidad)

- *Toda función* **continua** *en* $[a,b]$ *es integrable en* $[a,b]$.

  En consecuencia, toda función **derivable** *es integrable.*
- *Toda función* **monótona** *y* **acotada** *en* $[a,b]$ *es integrable en* $[a,b]$.
- *Toda función* **acotada** *en* $[a,b]$ *que presenta en dicho intervalo un número finito de puntos de discontinuidad, es integrable en* $[a,b]$
- *Sea* f *una función* **integrable** *en* $[a,b]$ *en el sentido de Riemann, y tal que:*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b]$$

  Si g *es* **continua** *en* $[m,M]$*, entonces la* **función compuesta** $g \circ f$ *es integrable en* $[a,b]$.

Propiedad

Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. *Entonces:*

- $f \pm g \in \mathscr{R}[a,b]$ *y* $cf \in \mathscr{R}[a,b]$, $\forall c \in \mathbb{R}$, *y se cumple:*

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

- $fg \in \mathscr{R}[a,b]$
- *Si* $a < c < b$, *entonces* $f \in \mathscr{R}[a,c]$ *y* $f \in \mathscr{R}[c,b]$, *y se verifica:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Propiedad

Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$.

- *Si* $f \leq g$ *en* $[a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- *Si* $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b]$, *entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

- $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$, *y se cumple:* $\quad \displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Teorema (fundamental del cálculo)

Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Para $a \leq x \leq b$, sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, $F \in \mathscr{C}[a,b]$. Además, si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

También puede enunciarse de la siguiente manera:

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, entonces tiene primitivas en I; una de ellas es la integral definida F dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

donde $a \in I$ **es cualquiera**.

Regla de Barrow

Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y existe una primitiva F de f en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \quad F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema (Integración por partes)

Si F y G son dos funciones derivables en $[a,b]$, y se tiene:

$$\begin{cases} F' = f \\ G' = g \end{cases} \qquad \qquad \text{en } [a,b]$$

siendo f y g integrables en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$$

Teorema

Sea la función F dada por la integral definida:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$$

Entonces, la derivada de F con respecto a x viene dada por:

$$F'(x) = f(b(x))\, b'(x) - f(a(x))\, a'(x)$$

Integración numérica

Integración numérica

La integral de una función no se calcula de forma exacta cuando

- sólo conocemos los valores de la función en un número finito de puntos
- su primitiva no se expresa en términos de funciones elementales

  ejemplos: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f(x) = e^{-x^2}$

- su primitiva es muy costosa de calcular o de evaluar

  ejemplo: $f(x) = \frac{1}{(x-8)\sqrt{x^2-4x-7}}$

Integración numérica. Fórmulas simples

- Fórmula del rectángulo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)f(x_0)\,, \quad x_0 \in [a,b]$$

  En particular, si $x_0 = \frac{a+b}{2}$, la fórmula se conoce como fórmula del punto medio o de Poncelet

- Fórmula del trapecio:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

- Fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\Big)$$

Integración numérica. Fórmulas compuestas

1. Se divide el intervalo de integración en n subintervalos de igual longitud:

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad \text{con } h = \frac{b-a}{n}$$

2. Se aproxima la integral mediante una fórmula simple en cada subintervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

- Fórmula del punto medio compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

- Fórmula del trapecio compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

Integración impropia

Integración impropia

Definición

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *se dice* **impropia** *si se da al menos una de las condiciones siguientes:*

- *el intervalo* (a,b) *no es acotado*
- f *no está acotada en* (a,b)

Las integrales impropias se clasifican en:

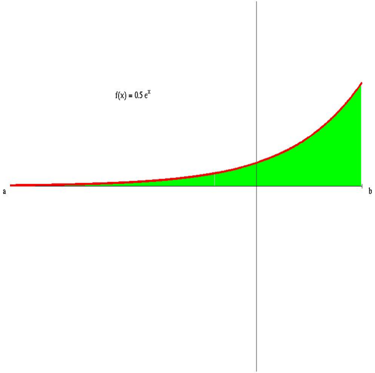
1. integrales de primera especie: (a,b) no acotado, f acotada en (a,b)
2. integrales de segunda especie: (a,b) acotado, f no acotada en (a,b)
3. integrales de tercera especie: (a,b) no acotado, f no acotada en (a,b)

Integrales impropias de primera especie

Sea $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[m,b]$, $\forall m\le b$. Se define:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{b} f(x)\,dx$$

si el límite existe. Si el límite es finito, se dice que la integral es **convergente**.



Integrales impropias de primera especie

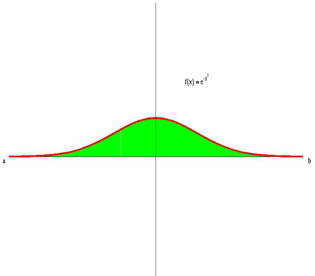
De forma similar, si $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, M], \quad \forall M \geq a$, se define

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

si el límite existe. Por último, se define

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, su valor es independiente de $a \in \mathbb{R}$.



Integrales impropias de segunda especie

Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$. Si f es integrable en $[t,b]$, $\forall\, t\in(a,b]$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

si el límite existe.

De forma análoga, si $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ es tal que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$ y f es integrable en $[a,t]$, $\forall\, t\in[a,b)$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

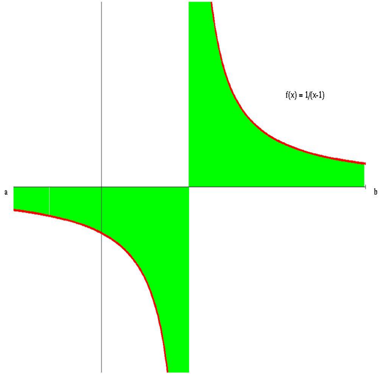
si el límite existe.

Si el límite es finito, se dice que la integral es **convergente**.

Integrales impropias de segunda especie

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, con $c \in (a,b)$, y existen $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Integrales impropias de tercera especie

Son integrales en un **intervalo no acotado** de una **función no acotada** en un número finito de puntos del intervalo.

Ejemplo

La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

se reduce a los casos anteriores de la siguiente forma:

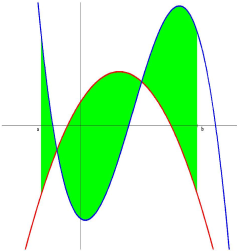
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx}_{2^a \ \textit{especie}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx}_{1^a \ \textit{especie}}$$

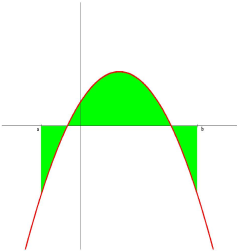
Cálculo de áreas y volúmenes

Área de superficies planas

Sean las funciones $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces el **área** A limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$





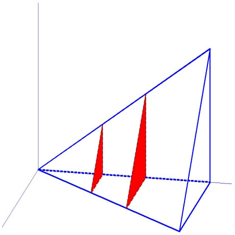
Caso particular: Si $g(x) = 0$, entonces $A = \int_a^b |f(x)| \, dx$.

Volumen de un sólido

Supongamos un sólido que, al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX, para cada $x \in [a,b]$, produce una sección de área $A(x)$.

El **volumen** del sólido comprendido entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

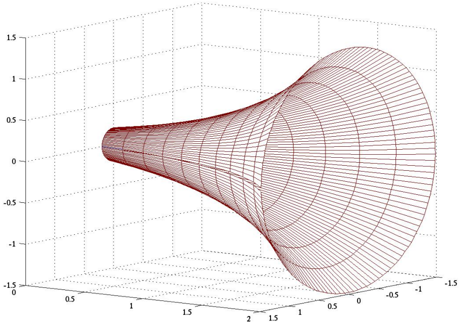


El volumen del cuerpo se puede obtener de forma similar a partir de las áreas de las secciones producidas por planos perpendiculares al eje OY en el intervalo $[a,b]$.

Volumen de un sólido de revolución

Al girar el grafo de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alrededor del eje OX, se obtiene un sólido cuyo volumen es:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$



Ecuaciones diferenciales

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias
   1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
      - Ecuaciones diferenciales separables o en variables separadas
      - Ecuaciones diferenciales lineales
      - Otros tipos: homogéneas, exactas, de Bernoulli, ...
   1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior
      - Ecuaciones diferenciales lineales
        Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes
        Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables
      - Ecuaciones diferenciales no lineales
2. Ecuaciones en derivadas parciales

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' = f(x,y)$$

donde la incógnita es la función $y = y(x)$.

Definición

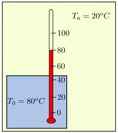
El problema: hallar $y = y(x)$ solución de

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

se llama problema de valor inicial.

Aplicación: enfriamiento de una placa

Problema: Una placa metálica se ha calentado hasta una temperatura T_0 y se ha depositado en un recinto cerrado a una temperatura constante T_a. Si $T_a = 20^o C$ y $T_0 = 80^o C$, ¿cuál es la temperatura de la placa después de t minutos?



Ley de enfriamiento de Newton: *Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, la variación en el tiempo del calor transferido hacia el cuerpo o desde el cuerpo es proporcional a la diferencia de la temperatura entre el cuerpo y el medio externo.*

Si

- $Q(t)$: calor transferido hacia o por la placa después de t minutos
- $\dfrac{dQ}{dt}$: variación de calor transferido

entonces

$$\frac{dQ}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde k es una constante cuyo valor se determina a partir de los datos del problema.

Aplicación: propagación de un virus informático

Problema: En una red de ordenadores se propaga un virus informático. La velocidad de infección es proporcional al número de equipos infectados y al número de equipos sin infectar:

$$\frac{dN}{dt} = kN(P-N)$$

Suponiendo que la red tiene $P = 1000$ equipos, el virus parte de uno de ellos y al cabo de 2 minutos hay 10 equipos infectados, queremos calcular el número de equipos infectados en cada instante.

Ecuaciones diferenciales en variables separadas

La ecuación diferencial

$$y' = f(x,y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se dice separable o en variables separadas si

$$f(x,y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Para resolverla, *separamos* las variables e integramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = g(x)dx \Rightarrow \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Nota: La constante de integración se calcula imponiendo una condición del tipo $y(x_0) = y_0$ (condición inicial).

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\,(y'(x) + p(x)\,y(x)) = (\mu(x)\,y(x))'$$

e integrando, se ve que la solución es de la forma

$$y(x) = \mu(x)^{-1}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + C\right)$$

Se puede comprobar que $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$