UNIVERSIDADE DA CORUÑA

TESIS DOCTORAL

VALORES COALICIONALES EN JUEGOS COOPERATIVOS CON UTILIDAD TRANSFERIBLE

Julián Costa Bouzas

2015

Valores coalicionales en juegos cooperativos con utilidad transferible

Autor: Julián Costa Bouzas

Tesis doctoral UDC / 2015

Directores:

José María Alonso Meijide
Ignacio García Jurado

Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

VALORES COALICIONALES EN JUEGOS COOPERATIVOS CON UTILIDAD TRANSFERIBLE

VALORES COALICIONALES EN JUEGOS COOPERATIVOS CON UTILIDAD TRANSFERIBLE

JULIÁN COSTA BOUZAS

La presente memoria constituye la tesis doctoral realizada
por el doctorando Julián Costa Bouzas bajo la dirección de los doctores
José María Alonso Meijide, de la Universidade de Santiago de Compostela,
e Ignacio García Jurado, de la Universidade da Coruña.

Departamento de Matemáticas
Universidade da Coruña
Mayo, 2015

Realizado el acto público de defensa y mantenimiento de esta tesis doctoral el día 8 de mayo de 2015, en la Facultad de Informática de la Universidade da Coruña, ante el tribunal formado por:

Presidenta:	Dra. María Gloria Fiestras Janeiro
Vocales:	Dra. María Gómez Rúa
	Dr. Joaquín Sánchez Soriano
	Dr. Andrés Jiménez Losada
Secretaria:	Dra. Silvia María Lorenzo Freire

obtuvo la máxima calificación de *sobresaliente cum laude*; siendo sus directores los doctores José María Alonso Meijide e Ignacio García Jurado.

Para Puri

Y aun hace mas en los buenos casados,
que aunque tienen dos almas,
no tienen mas de una voluntad.

MIGUEL DE CERVANTES SAAVEDRA,
El ingenioso hidalgo don Quixote de la Mancha

Agradecimientos

Es obligado, y ampliamente merecido, empezar agradeciendo a mis directores de tesis, José María Alonso Meijide e Ignacio García Jurado, todo el apoyo y ayuda que me han brindado durante estos últimos años hasta hacer posible el trabajo que se muestra en estas páginas. No es exagerado decir que Ignacio me ha enseñado todo lo que sé (y aún todo lo que supe) de esta fascinante disciplina que es la teoría de juegos. Y Pepe ha sido un estímulo constante, fuente inagotable de buenas ideas. Agradezco a Francesc Carreras, de la Universitat Politècnica de Catalunya, todo su apoyo y brillantes aportaciones a esta tesis.

También deseo agradecer el apoyo de mis compañeros de trabajo del Departamento de Matemáticas de la Universidade da Coruña y de mis compañeros de teoría de juegos del grupo interuniversitario de investigación SaGaTh. Entre todos han conseguido convertir el trabajo en una parte agradable de mi vida.

Deseo agradecer a mis amigos, pocos pero sinceros, que me hayan ofrecido lo más valioso que podían compartir conmigo: su amistad. A mi familia, una extensión de mi mismo. Y a Puri.

Quiero también hacer constar mi agradecimiento al Ministerio de Ciencia e Innovación por su apoyo financiero a través del proyecto MTM2011-27731-C03-01.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

En esta memoria se estudian diversas cuestiones relativas a la teoría del valor en juegos cooperativos con utilidad transferible en los que existe una estructura coalicional que condiciona la negociación entre los jugadores.

Dentro del contexto de los problemas de asignación de costes, se hace un recorrido por valores coalicionales de Shapley eficientes, y se estudia su aplicación a una subclase de estos problemas, los juegos del aeropuerto. Se analiza la utilización del valor de Owen en los juegos de asignación de costes de mantenimiento en presencia de una estructura coalicional y se propone una expresión fácil y rápida para su cálculo.

Se estudian los valores coalicionales mínimo cuadráticos. Se plantea, y resuelve, un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales que surge de forma natural al aproximar un juego genérico mediante juegos inesenciales. Se obtienen, como solución particular, el valor de Owen y el valor coalicional simétrico de Banzhaf.

Por último, se introduce el valor particional proporcional de Shapley, un nuevo valor con dominio en los juegos monótonos con una estructura coalicional que, aunque sigue el enfoque del valor de Aumann–Drèze, incorpora las opciones externas de los jugadores. Se estudian sus propiedades, comparándolas con las del valor de Aumann–Drèze, se analizan sus respectivas caracterizaciones axiomáticas y se presentan potenciales campos de aplicación.

Resumo

Nesta memoria abórdanse diversas cuestións relativas á teoría do valor en xogos cooperativos con utilidade transferible nos que existe unha estructura coalicional que condiciona a negociación entre os xogadores.

Dentro do contexto dos problemas de asignación de costes, faise un recorrido por valores coalicionais de Shapley eficientes, e estúdase a súa aplicación a unha subclase destes problemas, os xogos do aeroporto. Analízase a utilización do valor de Owen nos xogos de asignación de costes de mantemento en presenza dunha estructura coalicional e proponse unha expresión fácil e rápida para o seu cálculo.

Estúdanse os valores coalicionais mínimo cuadráticos. Plantéxase, e resólvese, un problema de optimización cuadrática con restriccións lineais que xorde de forma natural ao aproximar un xogo xenérico mediante xogos inesenciais. Obtéñense, como solución particular, o valor de Owen e o valor coalicional simétrico de Banzhaf.

Por último, introdúcese o valor particional proporcional de Shapley, un novo valor con dominio nos xogos monótonos cunha estructura coalicional que, aínda que segue o enfoque do valor de Aumann–Drèze, incorpora as opcións externas dos xogadores. Estúdanse as súas propiedades, comparándoas coas do valor de Aumann–Drèze, analízanse as súas respectivas caracterizacións axiomáticas e preséntanse potenciais campos de aplicación.

Abstract

In this dissertation, we study several issues regarding value theory in transferable utility cooperative games with a coalitional structure that conditions the negotiation.

In the context of cost allocation problems, we survey the efficient coalitional Shapley values existing in the literature and apply them to the class of airport problems. We also obtain an easy expression of the Owen value for maintenance cost allocation problems with a coalitional structure. With this expression, the Owen value is computable in polynomial time.

Besides, we study least square coalitional values. In particular, we state and solve a quadratic optimization problem with linear constraints, which arises in a natural way when we approximate a generic game using inessential games. The Owen value and the symmetric coalitional Banzhaf value arise as particular solutions.

Finally, we introduce the proportional partitional Shapley value, a new value defined for monotonic games with a coalitional structure. It follows the approach of the Aumann–Drèze value but it incorporates outside options of the players. We study the properties of this new value and compare it with the Aumann–Drèze value. Besides, we provide some axiomatic characterizations, and consider several applications.

Introducción

Sobre el objeto

En los últimos años la teoría de juegos, gran área de conocimiento en la que se enmarca la presente memoria de investigación, se ha beneficiado de una creciente popularidad. En los tiempos actuales, toda persona culta reconoce el nombre y tiene al menos una vaga idea de su significado y de algunas de sus muchas aplicaciones. Y es que la teoría de juegos modeliza matemáticamente la interacción entre agentes (jugadores en la jerga técnica), en principio racionales, en un sentido estratégico: cada jugador tiene capacidad de tomar decisiones, decisiones que producen consecuencias que afectan a todos los jugadores, y tiene preferencias sobre los resultados posibles de las decisiones de todos ellos. En palabras de Robert J. Aumann, "game theory is optimal decision making in the presence of others with different objectives" (Hart, 2005). Se trata por tanto de una rama matemática, con todo el formalismo y rigor inherentes, con una orientación normativa y un carácter eminentemente aplicado, con resultados muy fructíferos en las ciencias económicas, políticas, militares, biológicas y en el estudio de las redes sociales y tecnológicas, por citar sólo algunos de sus campos de aplicación más importantes.

Las distintas situaciones de interacción o conflicto que surgen dentro de la teoría de juegos pueden clasificarse en juegos no cooperativos y juegos cooperativos. Podemos decir, de forma harto simplista, que los juegos cooperativos son aquellos en los que los agentes (jugadores) disponen de mecanismos que les permiten adoptar acuerdos vinculantes entre ellos (para esta visión clásica, véase Harsanyi y Selten, 1988). La realidad es mucho más compleja, pues este tipo de juegos permite estudiar situaciones más generales (véase van Damme y Furth, 2002), pero siempre con un enfoque más centrado en los grupos de agentes (coaliciones de jugadores) que en los agentes en sí, asumiendo que estos van a cooperar y a actuar de un modo socialmente óptimo, y más centrado en los repartos (asignaciones) de beneficios o costes, y en la medición de la distribución del poder en los sistemas de votación, que en las estrategias de juego. Lo importante, en los juegos cooperativos, es evaluar la posición estratégica de cada jugador en el juego.

Los juegos cooperativos con utilidad transferible (juegos TU, de forma abreviada) son juegos cooperativos en los que los beneficios o costes generados por los grupos de agentes pueden repartirse libremente entre ellos (i.e., cualquier reparto es posible), como es el caso cuando pueden expresarse en términos monetarios.

Los modelos de juegos TU pueden incorporar condicionamientos exógenos. Sin pretender ser exhaustivos, estos condicionamientos pueden venir determinados por:

- La existencia de una estructura coalicional o estructura de uniones *a priori*, definida mediante una partición del conjunto de jugadores. En algunos casos, la cooperación puede estar restringida a los jugadores de la misma unión o clase (véase Aumann y Drèze, 1974); en otros, los jugadores que pertenecen a la misma unión tienen mayores posibilidades de colaboración entre sí que con el resto de los jugadores (véase Owen, 1977).

- La limitación en la comunicación entre los jugadores, definida mediante un grafo. Este grafo proporciona un sistema de comunicación que determina que dos jugadores puedan comunicarse entre sí únicamente en el supuesto de que exista un conjunto de arcos del grafo que los conecte (véase Myerson, 1977).

La presente memoria se enmarca dentro del contexto de la teoría de juegos cooperativos y dedica su atención, en particular, a los juegos TU con una estructura coalicional.

Para una visión general de la teoría de juegos, remitimos al lector a las referencias Owen (1995), González-Díaz *et al.* (2010) y Maschler *et al.* (2013). Para un tratado específico sobre juegos cooperativos, véase Peleg y Sudhölter (2007).

La terminología de jugadores, juegos, coaliciones o estrategias, cuando se escucha por primera vez, puede resultar curiosa e incluso pintoresca. La razón de estos nombres, como no podía ser de otra manera, es histórica: los primeros problemas de decisión interactivos estudiados desde un punto de vista matemático fueron juegos de estrategia.

Posiblemente, el primer precursor de la teoría de juegos fue el análisis del duopolio llevado a cabo por Antoine Augustin Cournot en la primera mitad del siglo XIX (Cournot, 1838). Históricamente, el siguiente hito importante fue la publicación del teorema minimax por el matemático húngaro John von Newmann, en el contexto de los juegos bipersonales finitos de suma nula (von Newmann, 1928). De forma simbólica, suele fijarse el año 1944 como año del nacimiento de la teoría de juegos como disciplina con entidad propia: John von Newmann y el economista Oskar Morgenstern publican el influyente libro *Theory of Games and Economic Behavior* (von Newmann y Morgenstern, 1944). A partir de la publicación de este libro se consolida la denominación *teoría de juegos*[1]. La colaboración entre las matemáticas y las ciencias económicas constituyó, sobre todo en los primeros años, el gran impulsor de la nueva disciplina. En Nash (1950) y Nash (1951), el matemático estadounidense John Nash publica el concepto de equilibrio de Nash, básico en la teoría de juegos no cooperativos. En Shapley (1953), Lloyd S. Shapley publica el concepto de valor de Shapley, fundamental en el desarrollo de la teoría de juegos cooperativos.

En los últimos años, la teoría de juegos ha visto ampliamente reconocida su capacidad para generar conocimiento útil para la sociedad a través de la concesión de prestigiosos premios internacionales a sus más destacados investigadores.

Sobre los antecedentes

La teoría del valor en juegos TU se inicia en Shapley (1953), en donde se introduce el valor de Shapley, que propone para cada juego TU un reparto ecuánime de los beneficios generados por la cooperación de los jugadores. El valor de Shapley ha generado una amplia literatura y ha tenido una notable influencia en las ciencias sociales.

Las estructuras coalicionales están ya implícitas en las soluciones de von Neumann–Morgenstern (1944). En Kurz (1988) se hace un breve repaso por los primeros avances en este campo.

Los dos trabajos pioneros en la teoría del valor en juegos TU con una estructura coalicional llevan la firma de Aumann y Drèze (1974) y de Owen

[1]En Borel (1921) ya se utiliza el nombre *théorie du jeu*. O'Neill (1994) califica la elección del nombre de desafortunada: "The unfortunate name 'game theory' suggested that international politics was a frivolous pastime played for the sake of winning, and the idea of a 'solution' seemed arrogant".

(1977); en ellos se presentan sendas modificaciones del valor de Shapley: los valores de Aumann–Drèze y de Owen. En estos trabajos se incorpora la información aportada por las clases que conforman la estructura coalicional de dos maneras radicalmente distintas. En el segundo se entiende que la negociación entre los jugadores se produce a dos niveles, entre las clases y en el interior de estas, mientras que en el valor de Aumann–Drèze solo se contempla la negociación dentro de las clases.

Generalmente, el principal objetivo de los juegos TU es el reparto de beneficios generados por la cooperación de los jugadores. Cuando se reparten costes en lugar de beneficios se habla de problemas (juegos) de asignación de costes. En Littlechild y Owen (1973) se presenta una aplicación ya clásica dentro de los problemas de asignación de costes, el juego del aeropuerto, y se propone una expresión sencilla del valor de Shapley dentro de esta clase de juegos. En Vázquez-Brage *et al.* (1997) se estudian los juegos del aeropuerto incorporando una estructura coalicional y se presenta una expresión del valor de Owen fácil de calcular.

Los valores coalicionales son valores definidos sobre juegos TU con una estructura coalicional. El valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009), el valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) y el valor de Calvo y Gutiérrez (Calvo y Gutiérrez, 2013) son valores coalicionales que siguen la filosofía del valor de Owen en el sentido de que la negociación entre los jugadores se produce a dos niveles.

En Fragnelli *et al.* (2000) y Norde *et al.* (2002) se estudia un problema de asignación de costes, llamado de costes de infraestructura, que surgió de la reorganización del sector ferroviario en Europa en la década de 1990. Y se propone una expresión simple del valor de Shapley en estos juegos. Fragnelli y Iandolino (2004) aplica el valor de Owen a un problema de costes de infraestructura que surge en un consorcio de recogida y eliminación de residuos sólidos urbanos.

En Charnes *et al.* (1988) se estudia el valor de Shapley como solución de un problema de optimización con restricciones. En Hammer y Holzman (1992) se sigue un enfoque similar con el valor de Banzhaf, introducido en Banzhaf (1965) y Owen (1975). En Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro (2002) se introduce un nuevo valor coalicional, el valor coalicional simétrico de Banzhaf, en el que la negociación se produce a dos niveles utilizando el valor de Banzhaf y el valor de Shapley.

En Wiese (2007) y en Casajus (2009) se sigue el enfoque del valor de Aumann–Drèze pero se incorporan al problema las opciones externas de los jugadores: la negociación sigue realizándose a un solo nivel, dentro de las clases, pero se tiene en cuenta la posición estratégica que tendría cada jugador si no existiese la estructura coalicional.

Sobre los objetivos

Cuando se inicia un trabajo de investigación es obligado plantearse la justificación, e incluso la conveniencia, del estudio a realizar. ¿Tiene relevancia social, implicaciones prácticas, un valor teórico? Son cuestiones que surgen de forma natural.

Cuando se inició el trabajo que finalmente ha dado lugar a esta memoria, el objetivo (global) planteado fue profundizar en el estudio de los valores en juegos TU con condicionamiento exógeno. Creíamos (y seguimos creyendo) que la teoría de juegos tiene un gran valor para la sociedad porque permite entender mejor los mecanismos de interacción, sea esta en forma de conflicto o de cooperación, entre sus miembros. Y que, en consecuencia, cualquier esfuerzo por extender sus límites (aunque sea en forma tan modesta como el presente volumen) es merecedor de un intento.

El elemento común a toda la memoria es la imposición de una estructura coalicional al modelo de juego TU. Además, el valor de Owen tiene una presencia fundamental en casi todo el trabajo. Únicamente en la parte final le cede un poco el relevo al valor de Aumann–Drèze. En la primera mitad se estudian problemas de asignación de costes; mientras que en la segunda mitad se estudian juegos TU en forma general.

Concretando un poco más, los objetivos inicialmente previstos fueron los siguientes.

- Obtener expresiones fáciles de calcular para el valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009), el valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) y el valor de Calvo y Gutiérrez (Calvo y Gutiérrez, 2013) en el contexto de los juegos del aeropuerto con estructura coalicional. Comparar estos valores con el valor de Shapley y el valor de Owen.
- Obtener una expresión fácil de calcular del valor de Owen en juegos de infraestructuras con estructura coalicional y estudiar el comportamiento de tal valor ilustrándolo en diversos ejemplos.
- Obtener el valor de Owen y el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1981) como solución de un problema de optimización.

- Proponer una modificación del valor de Aumann–Drèze que tenga en cuenta, a la hora de realizar el reparto dentro de cada clase, las opciones externas de los jugadores[2] expresadas en términos de la situación de partida (en la que se consideran todos los jugadores, con sus capacidades para agruparse y generar beneficios, sin incorporar la estructura coalicional). Estudiar su comportamiento utilizando para ello sus propiedades y diversos ejemplos.

En el último capítulo, dedicado a las conclusiones de este trabajo, puede verse hasta que punto se han logrado los objetivos inicialmente previstos.

Sobre la metodología

Es poco lo que podemos aportar sobre los aspectos metodológicos del trabajo que condujo a la presente memoria. Se trata de un trabajo de investigación en teoría de juegos, una disciplina matemática, y en consecuencia podemos caer en la simplificación de creer que la metodología es meramente deductiva. Al menos, eso parecen defender importantes pensadores, entre otros Mario Bunge, uno de los filósofos de la ciencia más notables del siglo XX: "La lógica y la matemática –esto es, los diversos sistemas de lógica formal y los diferentes capítulos de la matemática pura– son racionales, sistemáticos y verificables, pero no son objetivos; no nos dan informaciones acerca de la realidad: simplemente, no se ocupan de los hechos. La lógica y la matemática tratan de entes ideales; estos entes, tanto los abstractos como los interpretados, sólo existen en la mente humana. Cuando se demuestra un teorema lógico o matemático no se recurre a la experiencia: el conjunto de postulados, definiciones, reglas de formación de las expresiones dotadas de significado, y reglas de inferencia deductiva –en suma, la base de la teoría dada–, es necesaria y suficiente para ese propósito. La demostración de los teoremas no es sino una deducción: es una operación confinada a la esfera teórica, aun cuando a veces los teoremas mismos (no sus demostraciones) sean sugeridos en alguna esfera extramatemática. La matemática y la lógica son, en suma, ciencias deductivas" (Bunge, 1960).

Trabajamos con modelos, en nuestro caso con expresiones matemáticas de valores, con formulaciones de cálculo alternativas, con propiedades, con teoremas de caracterización axiomática. Y en todo momento exigimos consistencia lógica, tanto interna como externa. Pero siempre en conexión con

[2] En esta fase inicial del trabajo aun no éramos conocedores de las aportaciones de Wiese (2007) y Casajus (2009).

problemas reales. La teoría de juegos es matemática aplicada: los postulados que estudiamos están motivados en casos reales y los resultados deben ser aplicables a casos reales. Por ese motivo incorporamos ejemplos realistas, para ilustrar utilidades potenciales. El proceso es largo: hay que comprender el problema, analizarlo, buscar posibles contraejemplos y (solo) finalmente sintetizarlo en una demostración formalmente correcta (Polya, 1945).

Por tanto, el proceso no es solo deductivo; ni siquiera lo es mayoritariamente. Generalización, especialización, analogía, inducción (Polya, 1954). Esta es la mejor descripción del trabajo realizado: la aplicación de la metodología deductiva como colofón de un trabajo previo de analogía y razonamiento inductivo.

Sobre el contenido

El primer capítulo está dedicado al estudio de los valores coalicionales en los problemas de asignación de costes. Creemos que este es un campo prometedor y no suficientemente explorado. Se analiza la utilización del valor de Owen (Owen, 1977), el valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009), el valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) y el valor de Calvo y Gutiérrez (Calvo y Gutiérrez, 2013), todos ellos valores coalicionales de Shapley, en un problema clásico de asignación de costes, el juego del aeropuerto. Se obtienen expresiones fáciles de calcular de estos tres últimos valores en los juegos del aeropuerto y se aplican los resultados obtenidos a una colección de datos referidos al aeropuerto de Santiago de Compostela. Se concluye el capítulo con las conclusiones del mismo y la exposición de varias cuestiones abiertas.

La clase de los problemas de costes de infraestructuras se introdujo en 2000 para tratar un problema de asignación de costes que surgió con la reorganización del sistema ferroviario europeo. Estos problemas se definen como la suma de un juego del aeropuerto y un juego de mantenimiento, siendo este último un problema de costes que modeliza los costes del mantenimiento de las infraestructuras. En el capítulo 2 proponemos modelizar estos problemas de asignación de costes como juegos de costes de mantenimiento con una estructura coalicional (cuando haya un sistema de uniones que surja de forma natural en el contexto del problema a analizar) y utilizar el valor de Owen como regla de asignación de los costes. Aunque en general el valor de Owen tiene una complejidad de cálculo exponencial, presentamos una expresión más sencilla para su cálculo en esta clase de juegos, con una complejidad polinómica (cúbica). Finalizamos el capítulo con un ejemplo ilustrativo utilizando datos extraídos de la literatura de gestión ferroviaria.

En el capítulo 3 se analiza y resuelve un problema de optimización (minimización) de una función cuadrática positiva con restricciones lineales. Se interpreta el problema anterior desde la perspectiva de la aproximación de un juego TU mediante juegos inesenciales (con funciones características lineales) y se aplica al estudio del valor de Owen, que se obtiene como solución de un caso particular del problema de optimización. Finalmente, se obtiene el valor coalicional simétrico de Banzhaf como solución de otro caso particular del mismo problema.

En el capítulo 4 se propone y estudia un nuevo valor coalicional bajo la hipótesis de uniones aisladas, es decir, siguiendo el enfoque tradicional del valor de Aumann–Drèze. El nuevo valor recibe el nombre de valor particional proporcional de Shapley y su dominio de aplicación son los juegos TU monótonos con estructura coalicional. La principal diferencia entre este valor y el valor de Aumann-Drèze consiste en que el reparto (de beneficios o costes) dentro de cada unión viene dado, no por el valor de Shapley del juego restringido, sino proporcionalmente al valor de Shapley del juego original para así incorporar las opciones externas de los jugadores. Se hace un estudio comparativo entre los dos valores, se presentan dos caracterizaciones axiomáticas del nuevo valor y se comprueban sus independencias lógicas. Se incluye una comparativa con los valores de Wiese y de Casajus. Y se proporcionan varios ejemplos con la intención de ilustrar las aplicaciones potenciales del nuevo valor y profundizar en el entendimiento de su elemento diferenciador.

Sobre la estructura

Finalizamos esta introducción detallando la estructura de la memoria y haciendo una observación final.

Esta memoria consta de una introducción, de cuatro capítulos centrales y un capítulo final con las conclusiones. En la introducción se expone una visión general del trabajo, contextualizándolo y detallando sus aportaciones. Los cuatro capítulos centrales tienen, a su vez, una estructura de artículo, con una introducción, una exposición (creemos que) bastante detallada de los antecedentes y, finalmente, los resultados originales con, si ha lugar, aplicaciones a ejemplos.

Esta memoria está diseñada con la idea de que cada capítulo pueda ser leído de modo totalmente autónomo. Creemos que este diseño presenta suficientes ventajas como para compensar algunas deficiencias inherentes; en efecto, esto provoca que algunas definiciones básicas y algunas ideas preliminares aparezcan repetidas al inicio de los capítulos, e incluso pueden observarse (muy) pequeñas discrepancias en la notación, en un intento de emplear la que consideramos más cómoda en cada contexto. Esperamos que el lector sea benevolente con estos inconvenientes y que en ningún caso disturben la lectura de la memoria completa.

Capítulo 1

Valores coalicionales de Shapley en el juego del aeropuerto

1.1. Introducción

Los problemas de asignación de costes se han estudiado durante las últimas décadas, de forma tanto prolija como exitosa, utilizando la teoría de juegos cooperativos. En este tipo de problemas hay un grupo de agentes (también llamados jugadores) que desean colaborar en la elaboración de un proyecto conjunto, proyecto que tiene elementos que son comunes a todos los agentes pero que también tiene elementos específicos. El objetivo principal en un problema de asignación de costes es estudiar el reparto de los costes derivados del desarrollo del proyecto conjunto teniendo en consideración todas las peculiaridades especificadas por los agentes. El enfoque de la teoría de juegos a este problema consiste en modelizarlo como un juego (cooperativo con utilidad transferible o juego TU) de costes y a continuación utilizar un valor para asignar los costes, procurando que la asignación pertenezca al núcleo[1]. Fiestras-Janeiro *et al.* (2011) contiene una revisión crítica reciente de la teoría de juegos cooperativos y los problemas de asignación de costes.

En 1977, Guillermo Owen publicó un artículo muy influyente en el que introdujo el concepto de valor coalicional (Owen, 1977). Empleando las palabras del propio Owen, estudió "the problem of modifying the (Shapley) value of a characteristic function game so as to take into account the possibility that some players –because of personal or political affinities– may be more likely to act together than others". Owen modeliza este tipo de situaciones

[1]Traducción de la palabra inglesa *core*.

a través de un juego TU al que incorpora una partición del conjunto de jugadores. Actualmente, este modelo es conocido como un juego TU con una estructura coalicional, aunque también sigue empleándose el término más clásico de juego TU con un sistema de uniones a priori, y la modificación que hizo Owen del valor de Shapley (Shapley, 1953) en este contexto es conocida como el valor de Owen. El valor de Owen ha recibido una atención considerable en los últimos años y se ha aplicado con profusión a problemas de votación, siendo una de sus primeras aplicaciones en este contexto Carreras y Owen (1988). Además de la aquí mencionada, se han propuesto y estudiado otras modificaciones del valor de Shapley para juegos TU con una estructura coalicional (véanse, por ejemplo, Kamijo (2009), Alonso-Meijide y Carreras (2011) y Calvo y Gutiérrez (2013)). Otros enfoques clásicos a los juegos cooperativos en los cuales la cooperación está condicionada por una estructura exógena son Aumann y Drèze (1974), Myerson (1977) y Myerson (1980).

La investigación en valores coalicionales y sus aplicaciones a problemas de votación ha sido muy activa en las últimas décadas. Sin embargo, creemos que las aplicaciones de los valores coalicionales a problemas de asignación de costes no han sido suficientemente exploradas. Hay algunos trabajos sobre esta temática; por ejemplo, Vázquez-Brage *et al.* (1997) y Casas-Méndez *et al.* (2003) estudian el valor de Owen y el τ-valor (Tijs, 1981), respectivamente, en juegos del aeropuerto en los que la estructura coalicional viene dada por las compañías aéreas propietarias de las aeronaves, y Fragnelli y Iandolino (2004) aplica el valor de Owen a un problema de asignación de costes que surge en un consorcio dedicado a la recogida y eliminación de residuos sólidos urbanos. Sin embargo, no hay muchas otras aplicaciones de este tipo a pesar del hecho de que las estructuras coalicionales surgen de forma natural en los problemas de asignación de costes; por lo que el campo de los problemas de asignación de costes con una estructura coalicional parece una línea de investigación prometedora y poco explorada.

El objetivo de este capítulo es ilustrar el interés de explorar este campo y analizar el comportamiento de varios valores coalicionales de Shapley en uno de los más emblemáticos problemas de asignación de costes, el juego del aeropuerto. Concretando más, tomamos como referente el trabajo de Vázquez-Brage *et al.* (1997) y estudiamos los juegos del aeropuerto con una estructura coalicional, obteniendo expresiones simples del valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009), del valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) y del valor de Calvo y Gutiérrez (Calvo y Gutiérrez, 2013); y por último comparamos, en este contexto, los tres valores anteriores entre sí y con el valor de Owen, aplicándolos a los datos de Vázquez-Brage *et al.* (1997). Parte de los contenidos de este capítulo están incluidos en Costa y García-Jurado (2013).

Finalizamos esta introducción exponiendo como está estructurado el capítulo. En la Sección 2 se presenta la definición formal de un problema de asignación de costes con una estructura coalicional y de varios valores coalicionales de Shapley aplicables en este contexto. En la Sección 3 se obtienen expresiones simples para esos valores en juegos del aeropuerto con una estructura coalicional y se aplican los resultados a una colección de datos referidos al aeropuerto de Santiago de Compostela y obtenidos de Vázquez-Brage *et al.* (1997). La Sección 4 concluye el capítulo con las conclusiones del mismo y la exposición de varias cuestiones abiertas.

1.2. Valores para problemas de asignación de costes con una estructura coalicional

En esta sección presentamos la definición formal de un problema de asignación de costes con una estructura coalicional, contexto en el que se desarrollará el resto del capítulo, y damos la definición de los cuatro valores con los que trabajaremos: el valor de Owen (Owen, 1977), el valor de Calvo y Gutiérrez (Calvo y Gutiérrez, 2013), el valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) y el valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009). Hemos seleccionado estos valores por ser valores coalicionales de Shapley eficientes. En Amer *et al.* (2002) y Alonso-Meijide *et al.* (2014b) se estudian otros dos valores coalicionales de Shapley que no hemos considerado aquí por no ser eficientes, motivo por el que no nos parecen adecuados como solución de un problema de asignación de costes. Por supuesto, ambos valores podrían normalizarse para que sí sean eficientes, pero esta modificación aun no ha sido estudiada.

Definición 1.1. Un *problema de asignación de costes* es un par (N, c) tal que N es el conjunto finito de jugadores usuarios potenciales del proyecto, y $c : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada posible coalición de jugadores $S \subset N$ el coste del proyecto con las especificaciones necesarias para los miembros de S, siendo $c(\emptyset) = 0$.

En un problema de asignación de costes, el objetivo principal es repartir (asignar) $c(N)$ entre todos los jugadores (jugadores en N). Obsérvese que un problema de asignación de costes es lo mismo que un juego TU, con la única salvedad de que los problemas de asignación de costes tratan con costes en lugar de con beneficios y las interpretaciones de los conceptos y resultados en este contexto son en algún sentido duales a las interpretaciones de los conceptos y resultados análogos de los juegos TU.

A continuación recordamos la definición de una de las más importantes reglas de asignación aplicable a los problemas de asignación de costes: el valor de Shapley (Shapley, 1953). Moretti y Patrone (2008) ofrece una visión general actualizada del valor de Shapley.

Definición 1.2. El *valor de Shapley* de (N, c) se define, para cada $i \in N$, como

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{S \subset N : i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (c(S) - c(S \setminus \{i\})),$$

donde $s = |S|$ y $n = |N|$.

Otra regla de asignación que utilizaremos en este capítulo es el valor solidario, introducido en Nowak y Radzik (1994). Se trata de una modificación del valor de Shapley que tiene la intención de que los jugadores nulos, que son aquellos jugadores que no aportan coste a ninguna coalición[2], participen en el reparto de los costes. Veamos su definición.

Definición 1.3. El *valor solidario* de (N, c) se define, para cada $i \in N$, como

$$\gamma_i(N, c) = \sum_{S \subset N : i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \partial^{av}(c, S),$$

donde $s = |S|$, $n = |N|$ y

$$\partial^{av}(c, S) = \frac{1}{s} \sum_{m \in S} (c(S) - c(S \setminus \{m\}))$$

es el promedio de las contribuciones marginales de los jugadores de la coalición S.

Introducimos a continuación el modelo central en el presente capítulo, que consiste en incorporar una partición de N al problema (N, c). No existe consenso en la literatura especializada sobre el nombre a utilizar para referirse a los elementos de la partición P: clases, uniones, bloques, celdas…; en este capítulo preferiremos llamarles clases.

[2]Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo en c si, para cada $S \subset N$, $c(S \cup \{i\}) - c(S) = 0$.

Definición 1.4. Un *problema de asignación de costes con una estructura coalicional* es una terna (N, c, P) tal que (N, c) es un problema de asignación de costes y $P = \{P_1, \dots, P_{\text{A}}\}$ es una partición de N que describe la estructura coalicional del problema. En lo que sigue, denotaremos por M el conjunto $\{1, \dots, \text{A}\}$, siendo $\text{A} = |P|$.

En un problema de asignación de costes con una estructura coalicional el objetivo principal es la asignación del coste $c(N)$ entre los agentes en la gran coalición N teniendo en consideración la estructura coalicional definida a través de P. Históricamente, la primera regla de asignación en este contexto, y posiblemente también la más importante, es el valor de Owen. Vamos a introducir alguna notación relacionada con un problema de asignación de costes con una estructura coalicional (N, c, P), que utilizaremos después para definir el valor de Owen.

- El *problema cociente* es (M, c_P), donde $c_P(H) = c(\cup_{a \in H} P_a)$ para todo $H \subset M$. El problema cociente es, por tanto, el juego inducido por (N, c) cuando se consideran las clases de la partición P como jugadores, y el conjunto de las clases, M, como gran coalición.

- Para todo $a \in M$ y todo $S \subset P_a$, $(M, c_{P|_S})$ denota el problema cociente previa eliminación de los elementos de $P_a \setminus S$. Para cada $H \subset M$, se define
$$c_{P|_S}(H) = c(\cup_{b \in H} P_b \setminus S'),$$
donde $S' = P_a \setminus S$. Es decir, el nuevo problema $(M, c_{P|_S})$ describe que hubiese ocurrido en el problema cociente si la clase P_a fuese reemplazada por S.

- Para todo $P_a \in P$, se define el juego (P_a, c_a) como
$$c_a(S) = \Phi_a(M, c_{P|_S})$$
para cada $S \subset P_a$.

Definición 1.5. El *valor de Owen* de (N, c, P) se define, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como
$$f_i^1(N, c, P) = \Phi_i(P_a, c_a).$$

La definición anterior puede interpretarse como un reparto a dos niveles (o en dos etapas), en cada uno de los cuales se utiliza como regla de asignación el valor de Shapley. En primer lugar, las clases juegan el problema cociente y se reparten el coste total entre ellas; y a continuación el coste asignado a cada clase se reparte entre sus miembros a través del problema interno (P_a, c_a).

El valor de Owen admite interpretaciones alternativas a la aquí comentada, y ha sido caracterizado axiomáticamente de diversas maneras, ya en el propio trabajo germinal Owen (1977). Pero la interpretación que nos interesa ahora resaltar es a través de las contribuciones marginales, expresada formalmente en el siguiente teorema, que puede utilizarse como definición equivalente, demostrado en Owen (1977).

Teorema 1.1. *El valor de Owen de (N, c, P) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\begin{aligned} f_i^1(N, c, P) \;\; = & \sum_{H \subset M \setminus \{a\}} \sum_{S \subset P_a : i \in S} \frac{(\text{A} - h - 1)!h!(p_a - s)!(s-1)!}{\text{A}!p_a!} \\ & \times \left(c(R \cup S) - c(R \cup (S \setminus \{i\}))\right), \end{aligned}$$

donde P_a es la (única) clase a la que pertenece i, $h = |H|$, $s = |S|$, $p_a = |P_a|$, $\text{A} = |P|$ y $R = \cup_{b \in H} P_b$.

Es fácil comprobar que el valor de Owen es un *valor coalicional de Shapley* en el sentido de que, si denotamos por P^t la partición trivial $\{\{i\} : i \in N\}$, para cada problema de asignación de costes (N, c) se tiene que $f^1(N, c, P^t) = \Phi(N, c)$.

A continuación presentamos la definición de otros tres valores coalicionales de Shapley presentes en la literatura.

El primero es el valor de Calvo y Gutiérrez. Este valor coalicional de Shapley, introducido en Calvo y Gutiérrez (2013), lleva a cabo un reparto a dos niveles similar al realizado por el valor de Owen. En el primer nivel, las clases de la partición juegan el problema cociente y se reparten el coste total entre ellas utilizando el valor de Shapley como regla de asignación; y en el segundo nivel, los jugadores de cada clase juegan el problema interno (P_a, c_a) y se reparten el coste asignado a su clase en el primer nivel utilizando el valor solidario (Nowak y Radzik, 1994), en lugar de utilizar el valor de Shapley. Se utiliza, por tanto, en el primer nivel el valor de Shapley y en el segundo el valor solidario.

Definición 1.6. El *valor de Calvo y Gutiérrez* de (N, c, P) se define, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como

$$f_i^2(N, c, P) = \gamma_i(P_a, c_a).$$

La definición del valor de Calvo y Gutiérrez es equivalente a la que se enuncia a continuación.

Teorema 1.2. *El valor de Calvo y Gutiérrez de* (N, c, P) *puede calcularse, para cada* $i \in N$*, como*

$$f_i^2(N, c, P) = \sum_{H \subset M \setminus \{a\}} \sum_{S \subset P_a : i \in S} \frac{(\mathrm{A} - h - 1)! h! (p_a - s)! (s-1)!}{\mathrm{A}! p_a!} \partial^{av}(c, H, S),$$

donde P_a *es la (única) clase a la que pertenece* i*,* $h = |H|$*,* $s = |S|$*,* $p_a = |P_a|$*,* $\mathrm{A} = |P|$ *y*

$$\partial^{av}(c, H, S) = \frac{1}{s} \sum_{m \in S} (c(R \cup S) - c(R \cup (S \setminus \{m\}))),$$

con $R = \cup_{b \in H} P_b$*.*

Demostración. En Calvo y Gutiérrez (2013) se presenta la siguiente formulación alternativa de f_i^2. Sea $i \in P_a$, con $a \in M$, entonces

$$f_i^2(N, c, P) = \sum_{H \subset M : a \in H} \frac{(\mathrm{A} - h)!(h-1)!}{\mathrm{A}!} \gamma_i(P_a, c^{(H)}),$$

donde

$$c^{(H)}(S) = c(\cup_{b \in H \setminus \{a\}} P_b \cup S) - c(\cup_{b \in H \setminus \{a\}} P_b),$$

para todo $H \subset M$ y todo $S \subset P_a$ con $a \in H$.

La demostración se completa tras unos sencillos cálculos algebraicos que omitimos. □

El segundo es el valor coalicional proporcional de Shapley, introducido en Alonso-Meijide y Carreras (2011). Se trata de un valor coalicional de Shapley para problemas de asignación de costes monótonos con una estructura coalicional.

Definición 1.7. Un problema de asignación de costes (N, c, P) es *monótono* si c satisface la propiedad de monotonía:

$$c(S) \leq c(T) \text{ para cada par } S, T \subset N \text{ con } S \subset T.$$

Definición 1.8. Sea (N, c, P) un problema de asignación de costes monótono. El *valor coalicional proporcional de Shapley* de (N, c, P) se define, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como

$$f_i^3(N, c, P) = \begin{cases} \Phi_a(M, c_P) \frac{\Phi_i(N,c)}{\sum_{m \in P_a} \Phi_m(N,c)} & \text{si } \sum_{m \in P_a} \Phi_m(N, c) \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde (M, c_P) es el problema cociente de (N, c, P).

El valor coalicional proporcional de Shapley, al igual que los anteriores, realiza un reparto (en el primer nivel) entre las clases de la partición usando el valor de Shapley del problema cociente, y en el segundo nivel realiza una asignación dentro de las clases proporcional al valor de Shapley del problema (N, c) (sin estructura coalicional).

El tercero es el valor coalicional en dos etapas de Shapley, introducido en Kamijo (2009).

Definición 1.9. El *valor coalicional en dos etapas de Shapley* de (N, c, P) se define, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como

$$f_i^4(N, c, P) = \Phi_i(P_a, c^{P_a}) + \frac{1}{p_a} \left(\Phi_a(M, c_P) - c(P_a) \right),$$

donde c^{P_a} es la restricción de c a 2^{P_a}, $p_a = |P_a|$ es el número de jugadores en la clase P_a y (M, c_P) es el problema cociente de (N, c, P).

El valor coalicional en dos etapas de Shapley asigna a cada clase el valor de Shapley del juego cociente. Ya en el segundo nivel, a cada jugador de la clase P_a le asigna, en primera instancia, el valor de Shapley del problema (sin estructura coalicional) restringido a la clase; estamos repartiendo $c(P_a)$ como si no hubiese habido un nivel previo de asignación y las demás clases no existiesen. La discrepancia, que puede ser positiva o negativa, entre lo que se ha repartido, $c(P_a)$, y lo que realmente habría que repartir, $\Phi_a(M, c_P)$, se distribuye a partes iguales entre todos los miembros de la clase.

Hemos visto que el valor de Calvo y Gutiérrez, el valor coalicional proporcional de Shapley y el valor coalicional en dos etapas de Shapley, al igual que el valor de Owen, pueden ser interpretados como reglas de asignación que funcionan a dos niveles, siendo común a los cuatro valores la asignación realizada en el primer nivel: se aplica el valor de Shapley al problema cociente. Esto garantiza que todos ellos sean valores coalicionales de Shapley.

1.3. Juegos del aeropuerto con una estructura coalicional

Una aplicación clásica de los juegos cooperativos en problemas de asignación de costes es el juego del aeropuerto definido en Littlechild y Owen (1973). Las aeronaves que utilizan las instalaciones de un aeropuerto deben pagar por su uso y, en particular, deben pagar una tasa por cada operación en la que utilizan la pista de aterrizaje (es decir, por cada despegue y cada aterrizaje). En la mayoría de los casos, esos pagos tienen varias componentes, siendo una nada desdeñable la amortización del coste de construcción de la pista de aterrizaje a utilizar. Littlechild y Owen (1973) proponen modelizar el problema como un problema de asignación de costes y utilizar el valor de Shapley para resolver el cálculo de las tasas que corresponden a los costes de construcción.

De forma más precisa, sea $L = \{1, \ldots, k\}$ el conjunto de los tipos distintos de aeronaves que utilizan el aeropuerto. El coste de construcción de una pista de aterrizaje que sea adecuada para su utilización por las aeronaves de tipo l es α_l ($l \in L$). Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k$. Denotamos $\alpha_0 = 0$. g_l es el conjunto de operaciones realizadas por las aeronaves de tipo l ($n_l = |g_l|$) y N es el conjunto de todas las operaciones, i.e. $N = \cup_{l \in L} g_l$. Para un subconjunto $S \subset N$, denotamos por $j(S)$ el mayor de los tipos involucrado en las operaciones en S. Así,

$$j(S) = max\{l \in L \ : \ S \cap g_l \neq \emptyset\}.$$

A continuación, definimos el coste asociado a S, $c(S) := \alpha_{j(S)}$ (obsérvese que c satisface la propiedad de monotonía). Por tanto, tenemos definido un problema de asignación de costes (N, c) en el cual $c(N) = \alpha_k$ debe ser repartido entre las operaciones de las aeronaves, es decir, las tasas a pagar deben garantizar la amortización de α_k.

El problema de asignación de costes que acabamos de definir se llama *juego del aeropuerto*. Obsérvese que los jugadores de un juego del aeropuerto son las operaciones de despegue y aterrizaje realizadas por las aeronaves, y no las aeronaves mismas. De ahora en adelante hablaremos de jugadores en lugar de operaciones.

Lo habitual es que los juegos del aeropuerto tengan muchos jugadores, por lo que es muy importante utilizar reglas de asignación que tengan buenas propiedades computacionales. En general, el valor de Shapley es de cálculo complejo, pero en Littlechild y Owen (1973) se obtiene la siguiente expresión para su cálculo en este contexto. Esta expresión destaca por su simplicidad y rapidez de cálculo.

Teorema 1.3. *Sea (N, c) un juego del aeropuerto. Entonces, el valor de Shapley de (N, c) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{l=1}^{j(i)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{u_l},$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de aeronave del jugador i y u_l es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l.

Este reparto tiene la siguiente interpretación: el coste, α_1, de construcción de la parte de la pista de aterrizaje que necesitan todos los tipos de aeronave se divide a partes iguales entre todos los jugadores. El coste incremental, $\alpha_2 - \alpha_1$, necesario para todas las aeronaves a excepción de las del primer tipo, se divide a partes iguales entre todos los jugadores de tipos $\{2, 3, \ldots, k\}$. Y así sucesivamente.

Además de por sus propiedades computacionales, el valor de Shapley es un regla de asignación especialmente apropiada para los juegos del aeropuerto por ser estos cóncavos[3], y en consecuencia el valor de Shapley de un juego del aeropuerto siempre pertenece al núcleo.

Las estructuras coalicionales surgen de un modo particularmente natural en los juegos del aeropuerto, debido a que las aeronaves pertenecen a compañías aéreas. Y este es un hecho que debe ser tenido en cuenta a la hora de hacer los repartos de los costes. Según Vázquez-Brage *et al.* (1997): "although the model of airport games studied in the literature until now has been quite valuable, we believe that there is an important aspect of the determination of aircraft landing fees that is ignored, namely the fact that airplanes are organized in airlines. We argue that airplanes should not be considered as isolated units but as a part of an airline, and that larger airlines have more possibilities to negotiate discounts or other cost advantages than smaller ones". En coherencia con las palabras anteriores, Vázquez-Brage *et al.* (1997) modelizan los problemas del aeropuerto usando juegos del aeropuerto con una estructura coalicional: aquella dada por las compañías aéreas. Así contextualizado, $P_a \in P$ es la clase de todas las operaciones en N llevadas a cabo por aeronaves pertenecientes a la compañía aérea $a \in M$, siendo M el conjunto de las compañías aéreas que utilizan el aeropuerto.

[3]Véase la definición en la nota al pie 4 del Capítulo 2 (página 43).

Teniendo en cuenta las excelentes propiedades del valor de Shapley en el contexto de los juegos del aeropuerto, resulta natural el estudio de como funcionan los valores coalicionales de Shapley en los juegos del aeropuerto con una estructura coalicional. Vázquez-Brage *et al.* (1997) proporciona la expresión simple siguiente para el cálculo del valor de Owen en este contexto.

Teorema 1.4. *Sea (N, c, P) un juego del aeropuerto con una estructura coalicional. Entonces, el valor de Owen de (N, c, P) puede calcularse, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como*

$$f_i^1(N, c, P) = \sum_{l=1}^{j(i)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{r_l u_{al}},$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de aeronave del jugador i, r_l es el número de clases con jugadores de tipo mayor o igual que l y u_{al} es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l en P_a.

La interpretación del valor de Owen en el juego del aeropuerto es similar a la del valor de Shapley que vimos antes. El coste, α_1, de construcción de la parte de la pista de aterrizaje que necesitan todos los tipos de aeronave se divide a partes iguales entre todas las compañías aéreas, y dentro de cada compañía se reparte equitativamente entre sus operaciones. El coste incremental, $\alpha_2 - \alpha_1$, necesario para todas las aeronaves a excepción de las del primer tipo, se divide a partes iguales entre todas las compañías que tengan aeronaves de tipos $\{2, 3, \ldots, k\}$, y dentro de estas equitativamente entre todas sus operaciones, excepto las de tipo 1. Y así sucesivamente.

A continuación procederemos al cálculo de expresiones simples para el valor solidario de un juego del aeropuerto y para los otros tres valores coalicionales de Shapley, además del valor de Owen, con los que trabajamos en este capítulo. Empezamos obteniendo una expresión simple para el valor solidario de un juego del aeropuerto.

Teorema 1.5. *Sea (N, c) un juego del aeropuerto. Entonces, el valor solidario de (N, c) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\begin{aligned} \gamma_i(N, c) &= \sum_{l=1}^{j(i)} \sum_{m=1}^{n-u_l+1} (\alpha_l - \alpha_{l-1}) \frac{\binom{n-u_l}{m-1}}{m^2 \binom{n}{m}} \\ &+ \sum_{l=j(i)+1}^{k} \sum_{m=1}^{n-u_l} u_l(\alpha_l - \alpha_{l-1}) \frac{\binom{n-u_l-1}{m-1}}{(n-m)(m+1)\binom{n}{m}}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de aeronave del jugador i, $n = |N|$ y u_l es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l.

Demostración. Consideremos la siguiente descomposición de la función de costes, $c = \sum_{l=1}^{k} c_l$, siendo

$$c_l(S) = \begin{cases} \alpha_l - \alpha_{l-1} & \text{si } S \cap U_l \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $S \subset N$, donde U_l es el conjunto de jugadores de tipo mayor o igual que l. Además

$$\partial^{av}(c_l, S) = \begin{cases} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{s} & \text{si } |S \cap U_l| = 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $s = |S|$.

Si el jugador i es de tipo mayor o igual que l ($i \in U_l$), entonces

$$\begin{aligned} \gamma_i(N, c_l) &= (\alpha_l - \alpha_{l-1}) \sum_{m=1}^{n-u_l+1} \binom{n-u_l}{m-1} \frac{(n-m)!(m-1)!}{n!m} \\ &= (\alpha_l - \alpha_{l-1}) \sum_{m=1}^{n-u_l+1} \frac{\binom{n-u_l}{m-1}}{m^2 \binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

Si el jugador i es de tipo menor que l ($i \in N \setminus U_l$), entonces

$$\begin{aligned} \gamma_i(N, c_l) &= u_l(\alpha_l - \alpha_{l-1}) \sum_{m=1}^{n-u_l} \binom{n-u_l-1}{m-1} \frac{(n-m-1)!m!}{n!(m+1)} \\ &= u_l(\alpha_l - \alpha_{l-1}) \sum_{m=1}^{n-u_l} \frac{\binom{n-u_l-1}{m-1}}{(n-m)(m+1)\binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

Utilizando la aditividad del valor solidario se completa la demostración. □

La interpretación del valor solidario en el juego del aeropuerto no parece ser tan directa como las interpretaciones de los valores de Shapley y de Owen. El coste, α_1, de construcción de la parte de la pista de aterrizaje que necesitan todos los tipos de aeronave se divide a partes iguales entre todos los jugadores. El coste incremental, $\alpha_2 - \alpha_1$, necesario para todas las aeronaves a excepción de las del primer tipo, se reparte también entre todos los jugadores, pero cada uno de los jugadores de tipo 2 y superior aporta una cantidad superior a la que aportan los jugadores de tipo 1; dentro de cada uno de los dos colectivos, todos los jugadores pagan lo mismo. Y así sucesivamente.

A continuación obtenemos una expresión simple para el valor de Calvo y Gutiérrez de un juego del aeropuerto con una estructura coalicional.

Teorema 1.6. *Sea (N, c, P) un juego del aeropuerto con una estructura coalicional. Entonces, el valor de Calvo y Gutiérrez de (N, c, P) puede calcularse, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como*

$$\begin{aligned} f_i^2(N,c,P) &= \sum_{l=1}^{j(i)} \sum_{m=1}^{p_a-u_{al}+1} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{r_l} \cdot \frac{\binom{p_a-u_{al}}{m-1}}{m^2\binom{p_a}{m}} \\ &+ \sum_{l=j(i)+1}^{j(a)} \sum_{m=1}^{p_a-u_{al}} \frac{u_{al}(\alpha_l - \alpha_{l-1})}{r_l} \cdot \frac{\binom{p_a-u_{al}-1}{m-1}}{(p_a-m)(m+1)\binom{p_a}{m}}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de aeronave del jugador i, $j(a)$ es el máximo de los tipos en la clase P_a, p_a es el número de jugadores en la clase P_a, r_l es el número de clases con jugadores de tipo mayor o igual que l y u_{al} es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l en P_a.

Demostración. Utilizamos una vez más la descomposición $c = \sum_{l=1}^{k} c_l$ y el hecho de que el valor de Calvo y Gutiérrez es aditivo. Teniendo en cuenta que

$$f_i^2(N, c_l, P) = \gamma_i(P_a, c_{al}),$$

donde

$$c_{al}(S) = \begin{cases} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{r_l} & \text{si } S \cap U_l \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se obtiene que

$$f_i^2(N, c_l, P) = \frac{1}{r_l}\gamma_i(P_a, c_l).$$

Y el resultado se completa aplicando el teorema anterior a la función de costes c_l. □

El reparto que propone el valor de Calvo y Gutiérrez en el juego del aeropuerto es, entre las compañías, igual que el reparto del valor de Owen, por ser ambos valores coalicionales de Shapley, y dentro de cada compañía se sigue la filosofía del reparto del valor solidario.

Los dos resultados siguientes nos proporcionan expresiones simples del valor coalicional proporcional de Shapley y del valor coalicional en dos etapas de Shapley para un juego del aeropuerto con una estructura coalicional. Sus demostraciones son directas y por ese motivo las omitimos.

Teorema 1.7. *Sea (N, c, P) un juego del aeropuerto con una estructura coalicional. Entonces, el valor coalicional proporcional de Shapley de (N, c, P)*

puede calcularse, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como

$$f_i^3(N,c,P) = \frac{\left(\sum_{l=1}^{j(a)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{r_l}\right)\left(\sum_{l=1}^{j(i)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{u_l}\right)}{\sum_{l=1}^{j(a)} u_{al} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{u_l}},$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de la aeronave del jugador i, $j(a)$ es el máximo de los tipos en la clase P_a, r_l es el número de clases con jugadores de tipo mayor o igual que l, u_l es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l y u_{al} es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l en P_a.

La interpretación del valor coalicional proporcional de Shapley en el juego del aeropuerto no puede hacerse en términos de los costes incrementales, al tratarse de un valor que no verifica la propiedad de aditividad. El reparto entre las compañías coincide con el reparto del valor de Owen, y dentro de cada compañía es proporcional al valor de Shapley del problema original (N,c).

Teorema 1.8. *Sea (N,c,P) un juego del aeropuerto con una estructura coalicional. Entonces, el valor coalicional en dos etapas de Shapley de (N,c,P) puede calcularse, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como*

$$f_i^4(N,c,P) = \sum_{l=1}^{j(i)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{u_{al}} + \frac{1}{p_a}\left(\sum_{l=1}^{j(a)} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{r_l} - \alpha_{j(a)}\right),$$

donde $\alpha_0 = 0$, $j(i)$ es el tipo de aeronave del jugador i, $j(a)$ es el máximo de los tipos en la clase P_a, p_a es el número de jugadores en la clase P_a, r_l es el número de clases con jugadores de tipo mayor o igual que l y u_{al} es el número de jugadores de tipo mayor o igual que l en P_a.

El reparto del valor coalicional en dos etapas de Shapley en el juego del aeropuerto puede interpretarse de la siguiente manera: El coste, α_1, de construcción de la parte de la pista de aterrizaje que necesitan todos los tipos de aeronave se divide a partes iguales entre todas las compañías aéreas, y dentro de cada compañía se reparte equitativamente entre sus operaciones. El coste incremental, $\alpha_2 - \alpha_1$, necesario para todas las aeronaves a excepción de las del primer tipo, se divide a partes iguales entre todas las compañías que tengan aeronaves de tipos $\{2, 3, \dots, k\}$. Dentro de estas compañías, se reparte la totalidad del coste incremental, $\alpha_2 - \alpha_1$, equitativamente entre todas sus operaciones, excepto las de tipo 1. La diferencia entre lo que debe pagar la compañía y lo que se obtendría con el reparto interno anterior, que obviamente no es eficiente, se distribuye a partes iguales entre todas las operaciones de la compañía, incluidas las de tipo 1. Y así sucesivamente.

En Vázquez-Brage *et al.* (1997) se analizaron las tasas que debían pagar las compañías aéreas que utilizaban las instalaciones del Aeropuerto Internacional de Santiago de Compostela, por aquel entonces conocido como Aeropuerto de Lavacolla, por cada una de las operaciones de despegue y aterrizaje de sus aeronaves en concepto de costes indirectos para amortizar la construcción de la pista de aterrizaje. El cálculo se realizó utilizando el valor de Shapley, antes de incorporar las compañías aéreas, y el valor de Owen después de incorporar la estructura coalicional proporcionada por estas. Los datos corresponden al primer trimestre de 1993 y están expresados en miles de pesetas.

Finalizamos esta sección calculando las tasas que proporcionan el valor solidario (sin estructura coalicional), el valor de Calvo y Gutiérrez, el valor coalicional proporcional de Shapley y el valor coalicional en dos etapas de Shapley para los datos de Vázquez-Brage *et al.* (1997), para poder compararlas entre sí y con las obtenidas con el valor de Shapley y el valor de Owen. El Cuadro 1.1 presenta los distintos modelos de aeronaves que utilizaban el aeropuerto de Santiago de Compostela a principios de 1993, numerados en orden creciente de tipo (`t`), y el número de operaciones que realizaba cada uno de esos modelos (`Operaciones`). También nos ofrece el coste para cada tipo de avión (`Costes`) y el reparto del coste total que proporcionan el valor de Shapley y el valor solidario.

El Cuadro 1.2 nos describe las compañías aéreas a las que pertenecían las aeronaves, por modelos, con el número de operaciones (despegue y aterrizaje) correspondientes. También hay una columna de identificación (`Id.`) necesaria para vincular esta información con el Cuadro 1.3, en el que, utilizando la estructura coalicional proporcionada por las compañías aéreas, se calcula el reparto del coste total sugerido por el valor de Owen, el valor de Calvo y Gutiérrez (`Valor de CG`), el valor coalicional proporcional de Shapley (`Valor CPS`) y el valor coalicional en dos etapas de Shapley (`Valor C2ES`). El reparto es siempre por operación (jugador), pero ahora se tiene en cuenta, además del modelo de la aeronave (tipo), la compañía aérea a la que pertenece.

El número total de operaciones es pequeño, como cabría esperar del aeropuerto de una ciudad que, pese a su interés turístico, tiene poca población, y aunque el número de compañías aéreas involucradas pueda parecer grande a primera vista, la mayoría de ellas tiene un número muy reducido de operaciones y, más importante para lo que nos ocupa, solo un modelo de aeronave. A efectos de comparación entre los valores, solo son realmente ilustrativas las compañías Air Europa e Iberia, con dos modelos distintos en uso. Los cuatro valores que aquí consideramos utilizan el valor de Shapley en el juego cociente (condición aun mas fuerte que ser valores coalicionales de Shapley), y por tanto coinciden en la asignación de costes a las operaciones de las compañías que solo tienen un modelo de aeronave (el reparto dentro de cada compañía cumple, en los cuatro casos, la propiedad de tratar por igual las operaciones que son del mismo tipo). Este es el motivo por el que las cuatro columnas son iguales, salvo en los cuatro casos que acabamos de comentar. También hay muchas filas iguales: se trata de aquellas compañías que coinciden en el modelo de aeronave y en el número de operaciones realizadas (por ejemplo, una compañía que solo tenga 2 operaciones ha realizado un único aterrizaje y despegue en el período considerado).

Es de destacar que el valor coalicional en dos etapas de Shapley proporciona, en algunos casos, asignaciones negativas a las operaciones (aunque nunca a las compañías aéreas, por tratarse de un valor coalicional de Shapley). Por esta razón nos parece la solución menos adecuada para este problema. Como era de esperar, el valor de Calvo y Gutiérrez es el que produce los resultados más solidarios, mientras que el valor de Owen ofrece las mayores diferencias. El valor coalicional proporcional de Shapley da lugar a resultados intermedios.

Obsérvese que estos repartos, utilizando valores coalicionales, si los contrastamos con el uso del valor de Shapley o el valor solidario, favorecen a las compañías que hacen un uso intenso del aeropuerto, que posiblemente tendrán mayor capacidad negociadora, y penalizan a las que lo utilizan de modo ocasional, pudiendo llegar potencialmente a auyentarlos del mismo. Este incremento en los costes podría ser una posible justificación a las ayudas (subvenciones) a las compañías aéreas para potenciar destinos estratégicos pero con pocos movimientos.

Por último, recordemos que estos repartos de costes corresponden a los costes fijos de construcción de la pista y no a los costes variables de uso y mantenimiento, que habría que calcular de forma independiente. En el capítulo siguiente trataremos de los costes de mantenimiento, en un contexto general, y de su posible reparto utilizando los valores de Shapley y de Owen.

	t	Operaciones	Costes	Valor Shapley	Valor solidario
CESSNA	1	10	8 120	6.455	25.995
LEARJET-25	2	6	15 134	12.075	28.798
B-757	3	78	32 496	26.054	35.760
DC-9	4	464	34 265	27.574	36.500
B-737	5	232	39 494	35.044	39.515
B-727	6	438	44 850	46.488	43.413
DC-10	7	30	50 000	218.155	55.331

Cuadro 1.1: Tasas del Aeropuerto de Santiago de Compostela sin una estructura coalicional

Compañía aérea	Id.	Operaciones	Modelos
Air Europa	1	36	B-757
	2	172	B-737
Aviaco	3	12	DC-9
Britannia	4	6	B-737
British Airways	5	2	B-757
Condor Flugdienst	6	2	B-757
Caledonian Airways	7	2	B-757
Eurobelgian Airlines	8	2	B-737
Futura	9	32	B-737
Gestair Executive Set	10	2	CESSNA
Iberia	11	452	DC-9
	12	438	B-727
Air Charter	13	2	B-737
Corse Air	14	4	B-737
Air UK Leisure	15	2	B-737
Ibertrans	16	2	CESSNA
LTE	17	36	B-757
Mac Aviation	18	6	LEARJET-25
Monarch Airlines Ltd	19	2	B-737
Sobelair	20	6	B-737
Trabajos Aéreos	21	2	CESSNA
Tea Basel Ltd	22	2	B-737
Oleohidráulica Balear SA	23	4	CESSNA
Viasa	24	30	DC-10
Spanair	25	2	B-737

Cuadro 1.2: Descripción de las compañías aéreas

Id.	Valor de Owen	Valor de CG	Valor CPS	Valor C2ES
1	8.109	9.458	8.286	-22.994
2	11.183	10.900	11.146	17.693
3	151.093	151.093	151.093	151.093
4	369.224	369.224	369.224	369.224
5	843.378	843.378	843.378	843.378
6	843.378	843.378	843.378	843.378
7	843.378	843.378	843.378	843.378
8	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672
9	69.230	69.230	69.230	69.230
10	176.522	176.522	176.522	176.522
11	2.037	4.169	4.110	-6.395
12	9.070	6.870	6.930	17.772
13	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672
14	553.836	553.836	553.836	553.836
15	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672
16	176.522	176.522	176.522	176.522
17	46.854	46.854	46.854	46.854
18	120.367	120.367	120.367	120.367
19	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672
20	369.224	369.224	369.224	369.224
21	176.522	176.522	176.522	176.522
22	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672
23	88.261	88.261	88.261	88.261
24	334.778	334.778	334.778	334.778
25	1 107.672	1 107.672	1 107.672	1 107.672

Cuadro 1.3: Tasas del Aeropuerto de Santiago de Compostela con una estructura coalicional

1.4. Comentarios finales

El principal objetivo del presente capítulo ha sido el estudio de los valores coalicionales de Shapley eficientes en el contexto de los juegos del aeropuerto, que constituyen una colección clásica de problemas de asignación de costes en los que las estructuras coalicionales surgen de forma natural, por no decir que están presentes de forma intrínseca. Se han obtenido expresiones sencillas de calcular de estos valores en los juegos del aeropuerto y se han aplicado a un ejemplo con datos reales que ha permitido su estudio comparativo.

Esto ha puesto de manifiesto el interés que los valores coalicionales tienen en el contexto de los problemas de asignación de costes, a pesar de lo escasa que es la literatura en este tema, y los muchos problemas que aun hay abiertos.

Hay otros valores coalicionales (no necesariamente valores coalicionales de Shapley) que se pueden utilizar en los juegos del aeropuerto. Podemos citar, por ejemplo, Casas-Méndez *et al.* (2003), trabajo en el que se estudia el τ-valor (Tijs, 1981) en este contexto; y Alonso-Meijide *et al.* (2003), donde se propone un nuevo valor coalicional que constituye una extensión del valor introducido en Aadland y Kolpin (1998) para problemas de asignación de costes. Creemos que puede ser interesante un estudio comparativo entre estos valores y un análisis de sus propiedades en el contexto de los juegos del aeropuerto.

Tampoco hemos considerado en este capítulo valores coalicionales de Shapley no eficientes, como pueden ser los valores introducidos en Amer *et al.* (2002) y Alonso-Meijide *et al.* (2014b), por no considerarlos apropiados para abordar la solución de problemas de asignación de costes. Creemos que sería interesante el estudio de extensiones normalizadas de estos valores, para conseguir que sean eficientes, en los juegos del aeropuerto.

Por último, nos gustaría señalar que las estructuras coalicionales también constituyen instrumentos de uso natural en otras colecciones de problemas de asignación de costes, como pueden ser los juegos de infraestructuras o los juegos de inventario. Los juegos de infraestructuras pueden describirse como la suma de un juego del aeropuerto y un juego de mantenimiento. El Capítulo 2 está dedicado al estudio de los juegos de mantenimiento.

Capítulo 2

Una expresión polinómica del valor de Owen en el juego de costes de mantenimiento

2.1. Introducción

La teoría de juegos es la disciplina que estudia, desde una perspectiva matemática, situaciones en las que un grupo de agentes, cada uno de ellos con sus propias preferencias, adoptan decisiones interactivas que dan lugar a un resultado. Este capítulo se enmarca dentro de los problemas (juegos) cooperativos de asignación de costes con utilidad transferible. En esta clase de juegos, un grupo de agentes que desarrollan un proyecto conjunto debe decidir como repartir sus costes. Por consiguiente, el objetivo principal en estos juegos es proponer una asignación justa de los costes entre todos los agentes involucrados en el proyecto (de aquí en adelante llamados simplemente jugadores), que incorpore todas las necesidades específicas de cada uno de ellos. El valor de Shapley (Shapley, 1953) es, posiblemente, la regla de asignación más importante. Esta solución tiene un importante historial de uso en problemas de asignación de costes, además de disfrutar de una interpretación sencilla y de excelentes propiedades. No obstante lo anterior, adolece de un problema potencial: su cálculo puede ser extremadamente lento. Por este motivo es importante el desarrollo de expresiones que permitan el cálculo rápido del valor de Shapley en subclases particulares de juegos. Una visión, reciente y global, de las aplicaciones de los problemas cooperativos de asignación de costes puede encontrarse en Fiestras-Janeiro *et al.* (2011); y una revisión crítica del valor de Shapley en Moretti y Patrone (2008).

Una aplicación muy conocida de la teoría de juegos que analiza situaciones de asignación de costes es el uso del valor de Shapley para determinar las tasas que deben pagar los aviones por el uso de las instalaciones de un aeropuerto, el así llamado juego del aeropuerto[1]. En este problema, se reparte el coste de construcción de la pista de aterrizaje entre todos los movimientos (entendiendo por tales los aterrizajes y los despegues) de todos los diferentes tipos de aeronaves, teniendo en consideración que los aviones más grandes necesitan pistas más caras. En Littlechild y Owen (1973) se estudian los juegos del aeropuerto y se propone utilizar en ellos una expresión sencilla del valor de Shapley.

En Vázquez-Brage *et al.* (1997) se discute el hecho de que los aviones están organizados en compañías aéreas. En este trabajo se argumenta que no debe pensarse en los aviones como unidades aisladas, sino como parte de una compañía, y que las compañías aéreas más grandes tienen más posibilidades de negociar descuentos, u otras ventajas que finalmente se traduzcan en ahorros de costes, que las compañías pequeñas. En este contexto, utilizan el valor de Owen (Owen, 1977), una extensión del valor de Shapley específicamente diseñada para trabajar en situaciones en las que existe una estructura coalicional: los jugadores (movimientos de los aviones) están organizados en clases o uniones (compañías aéreas). Formalmente, este modelo recibe el nombre de juego TU con una estructura coalicional (o juego TU con un sistema de uniones a priori), donde la estructura coalicional (sistema de uniones) es una partición del conjunto de jugadores. El valor de Owen, al igual que el valor de Shapley, tiene una interpretación sencilla y excelentes propiedades pero, en general, sufre la ausencia de un método rápido de cálculo ya que este es de una complejidad exponencial. Vázquez-Brage *et al.* (1997) propone el uso de una expresión sencilla del valor de Owen en el juego del aeropuerto utilizando las compañías aéreas como estructura coalicional.

Fragnelli *et al.* (2000) y Norde *et al.* (2002) estudiaron un problema de costes de infraestructura que surgió de la reorganización del sector ferroviario en Europa en la década de 1990. El objetivo principal era determinar las tarifas de acceso que los operadores del transporte ferroviario debían pagar al gestor de las infraestructuras por cada trayecto realizado. En esos trabajos se introdujo la clase de los juegos de costes de infraestructura como la suma de los juegos del aeropuerto y los juegos de mantenimiento (los primeros estudian los costes de construcción y los últimos los costes de mantenimiento de las infraestructuras) y se analizaron esos juegos desde el punto de vista del valor de Shapley. Adicionalmente, introdujeron una expresión de cálculo

[1]Véase el Capítulo 1.

sencillo del valor de Shapley en los juegos de mantenimiento.

Los trenes, en el problema anterior, están organizados en compañías ferroviarias de forma análoga a como los aviones lo están en compañías aéreas en el juego del aeropuerto. Por este motivo tiene sentido utilizar el valor de Owen, y no solo el valor de Shapley, como solución de los juegos de mantenimiento. Esto es lo que Fragnelli y Iandolino (2004) hace en otro juego de infraestructura cuando los autores estudian un problema de asignación de costes que surge en un consorcio de recogida y eliminación de residuos sólidos urbanos. Y proporciona una fórmula alternativa para el cálculo del valor de Owen en un caso muy particular de los juegos de mantenimiento con estructura coalicional. Esta fórmula, aunque es más sencilla que la fórmula general, sigue siendo de complejidad exponencial.

En este capítulo, se propone una expresión más sencilla para el cálculo del valor de Owen en el juego de mantenimiento. Esta fórmula tiene complejidad polinómica (cúbica) y puede usarse para calcular de forma rápida el valor de Owen incluso en presencia de muchos movimientos de trenes (jugadores), muchos tipos de trenes o muchas compañías ferroviarias (clases o uniones de jugadores). Finalmente, se analiza un ejemplo presente en Fragnelli *et al.* (2000) de asignación de costes cuando hay dos tipos diferentes de trenes (lentos y rápidos), introduciendo diferentes (hipotéticas) uniones de trenes en compañías para comparar los valores de Shapley y de Owen. Los datos originales de este ejemplo están extraídos de Baumgartner (1997).

Parte de los contenidos de este capítulo están incluidos en Costa (2015).

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 2 se describe el modelo de los juegos de costes de mantenimiento. En la Sección 3 se describe el modelo de juegos con estructura coalicional y se proporciona una expresión sencilla del valor de Owen en los juegos de mantenimiento con estructura coalicional. En la Sección 4 se elabora un ejemplo para ilustrar los modelos y resultados anteriores. Y la Sección 5 concluye el capítulo con unos comentarios finales.

2.2. El juego de costes de mantenimiento

Los juegos con utilidad transferible o juegos TU son probablemente los modelos más estudiados de la teoría de juegos cooperativos. El objetivo principal en esta clase de problemas es proponer una regla de asignación justa para el reparto de los beneficios generados por la cooperación entre los jugadores. Una subclase importante dentro de los juegos TU la constituyen los problemas de asignación de costes (o juegos cooperativos de costes), en los que se busca una división justa del coste total de un proyecto entre los jugadores que conjuntamente lo llevan a cabo. Un *problema de asignación de costes* es un par (N, c) tal que N es el conjunto finito de jugadores y $c : 2^N \to \mathbb{R}$ es la función de costes. Para cada $S \subset N$, $c(S)$ es el coste del proyecto con las especificaciones necesarias para los miembros de la coalición S y, por convención, $c(\emptyset) = 0$. Se denotará por $CG(N)$ el espacio vectorial de las funciones de costes en N.

El valor de Shapley (Shapley, 1953) es posiblemente la regla de asignación de costes más importante. Esta solución tiene excelentes propiedades y un largo historial de uso en problemas de asignación de costes pero, en general, es computacionalmente compleja.

Definición 2.1. El *valor de Shapley* de (N, c), con $c \in CG(N)$, se define, para cada $i \in N$, como

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (c(S \cup \{i\}) - c(S))$$

donde $s = |S|$ y $n = |N|$.

La interpretación de esta fórmula es simple: el valor de Shapley del jugador i es el promedio de todas las contribuciones marginales de i en todas las ordenaciones de los jugadores.

Un listado, en modo alguno exhaustivo, de propiedades interesantes del valor de Shapley en CG(N) incluye:

- *Eficiencia*: para todo $c \in CG(N)$,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(N, c) = c(N).$$

- *Propiedad de jugador nulo*: si el jugador $i \in N$ es nulo[2] en c, entonces

$$\Phi_i(N, c) = 0.$$

- *Simetría*: si los jugadores $i, j \in N$ son simétricos[3] en c, entonces

$$\Phi_i(N, c) = \Phi_j(N, c).$$

[2]Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo en c si, para cada $S \subset N$, $c(S \cup \{i\}) - c(S) = 0$.

[3]Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en c si, para cada coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$.

- *Aditividad*: para todo $c_1, c_2 \in CG(N)$,

$$\Phi(N, c_1 + c_2) = \Phi(N, c_1) + \Phi(N, c_2).$$

- *Monotonía fuerte*: para todo $c_1, c_2 \in CG(N)$, si un jugador $i \in N$ verifica

$$c_1(S \cup \{i\}) - c_1(S) \geq c_2(S \cup \{i\}) - c_2(S) \quad \forall S \subset N,$$

entonces

$$\Phi_i(N, c_1) \geq \Phi_i(N, c_2).$$

En Fragnelli *et al.* (2000), los autores introducen los juegos de costes de mantenimiento, una nueva subclase de juegos cooperativos de costes, en el contexto de establecer el reparto de los costes de mantenimiento de una instalación ferroviaria entre los trenes que la utilizan.

Siguiendo a Fragnelli *et al.* (2000), suponemos en lo que sigue que hay k grupos de jugadores $g_1, \ldots, g_k$, que constituyen los diferentes tipos de agentes en el problema (por ejemplo, diferentes tipos de trenes con diferentes requerimientos), con $n_1, \ldots, n_k$ jugadores respectivamente y $k(k+1)/2$ números reales no negativos $\{\alpha_{ij}\}$ con $i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \leq j$. La interpretación, en este modelo, de los números α_{ij} es la siguiente: si un jugador de tipo i, i.e. un jugador en g_i, ha utilizado la instalación, el coste de restauración al mismo nivel i de la instalación es α_{ii}. Si la instalación va a ser utilizada por un jugador de tipo j con $j > i$, entonces se van a requerir costes extras de mantenimiento. En este caso, los costes de mantenimiento necesarios para restaurar la instalación hasta alcanzar el nivel j son $\alpha_{ii} + \alpha_{ii+1} + \ldots + \alpha_{ij}$. Por tanto, α_{ij} es el coste de restaurar la instalación utilizada por un jugador de tipo i desde el nivel $j-1$ hasta el nivel j (con $j > i$).

Definición 2.2. El *juego de costes de mantenimiento* correspondiente a los grupos (tipos) $g_1, \ldots, g_k$ y a los números no negativos $\{\alpha_{ij}\}_{i,j \in \{1,\ldots,k\}, i \leq j}$ es el juego cooperativo de costes (N, c) con $N = \cup_{i=1}^{k} g_i$ y la función de costes definida por

$$c(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} |S \cap g_i| \left(\alpha_{ii} + \ldots + \alpha_{ij(S)}\right)$$

para cada $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, donde

$$j(S) = \text{máx}\{j : S \cap g_j \neq \emptyset\}.$$

Por convención, $c(\emptyset) = 0$ y $j(\emptyset) = 0$.

De acuerdo a la definición anterior, $c(S)$ se interpreta como la suma de los costes de mantenimiento necesarios para restaurar la instalación hasta el nivel $j(S)$, de tal modo que todos los jugadores de S puedan volver a hacer uso de ella, después de que cada uno de los jugadores de S la han usado.

La siguiente descomposición de la función de costes c nos será de utilidad más adelante. Para cada $S \subset N$,

$$c(S) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} \alpha_{ij} c^{ij}(S)$$

donde

$$c^{ij}(S) = \begin{cases} |S \cap g_i| & \text{si } j \leq j(S) \\ 0 & \text{si } j > j(S) \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \leq j$.

Fragnelli *et al.* (2000) propone la siguiente fórmula para el cálculo del valor de Shapley en los juegos de costes de mantenimiento. Se trata de una expresión sencilla con complejidad polinómica y, por tanto, permite un cálculo rápido del valor de Shapley en este contexto.

Teorema 2.1. *Sea (N, c) el juego de costes de mantenimiento correspondiente a los grupos (tipos) $g_1, \ldots, g_k$ (con $n_1, \ldots, n_k$ jugadores, respectivamente) y a los números no negativos $\{\alpha_{lm}\}_{l,m \in \{1,\ldots,k\}, l \leq m}$. Entonces, el valor de Shapley de (N, c) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\begin{aligned} \Phi_i(N, c) &= \alpha_{j(i)j(i)} \\ &+ \sum_{m=j(i)+1}^{k} \alpha_{j(i)m} \frac{n_m + \ldots + n_k}{n_m + \ldots + n_k + 1} \\ &+ \sum_{m=2}^{j(i)} \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_{lm} \frac{n_l}{(n_m + \ldots + n_k)(n_m + \ldots + n_k + 1)} \end{aligned}$$

donde $j(i) = j(\{i\})$ es el tipo al cual el jugador i pertenece.

Veamos a continuación una muy breve interpretación de la fórmula anterior. Supongamos que un jugador i de g_l ha hecho uso de la instalación. Este jugador asume todo el coste α_{ll} necesario para restaurar la instalación hasta el mismo nivel l, de tal modo que otro jugador del mismo tipo pueda volver a hacer uso de ella. Los costes α_{lm}, con $l < m$, por su parte, se reparten entre los jugadores de tipo l y los jugadores de tipo mayor o igual que m.

Resulta natural preguntarse si los juegos de costes de mantenimiento son cóncavos[4], como lo son por ejemplo los juegos del aeropuerto. El siguiente resultado, demostrado en Fragnelli *et al.* (2000), nos enseña que estos problemas, esencialmente, no son ni cóncavos ni equilibrados[5].

Teorema 2.2. *Sea (N, c) el juego de costes de mantenimiento correspondiente a los grupos (tipos) $g_1, \ldots, g_k$ (con $n_1, \ldots, n_k$ jugadores, respectivamente) y a los números no negativos $\{\alpha_{lm}\}_{l,m\in\{1,\ldots,k\},l\leq m}$. Entonces, las cuatro afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) (N, c) *es cóncavo.*

(ii) (N, c) *es equilibrado.*

(iii) $\sum_{i\in N} c(\{i\}) \geq c(N)$.

(iv) $\alpha_{lm} = 0$ *para todo* $l < m$.

2.3. El valor de Owen y los juegos de costes de mantenimiento

Con frecuencia, los jugadores de un problema de costes están organizados en uniones a priori que constituyen una estructura coalicional (por ejemplo, los trenes pertenecen a compañías ferroviarias) y el proceso de asignación de

[4] Un juego de costes $c \in CG(N)$ se denomina *cóncavo* si, para cada $i \in N$ y cada par $S, T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subset T$,

$$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T).$$

[5] Una familia de coaliciones $F \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ se denomina equilibrada si existe una familia asociada de números reales positivos, denominados coeficientes equilibrantes, $\{y_S : S \in F\}$ tal que, para todo $i \in N$,

$$\sum_{S\in F, i\in S} y_S = 1.$$

Un juego de costes $c \in CG(N)$ se denomina *equilibrado* si

$$\sum_{S\in F} y_S c(S) \leq c(N)$$

para cualquier familia de coaliciones equilibradas F con coeficientes equilibrantes $\{y_S : S \in F\}$. Este concepto es especialmente importante porque un juego es equilibrado si, y solo si, su núcleo es no vacío (teorema de Bondareva-Shapley).

los costes debe tener este hecho en consideración porque las uniones grandes tienen más posibilidades que las uniones pequeñas de negociar costes más ventajosos.

El valor de Owen es una extensión del valor de Shapley introducido en Owen (1977) y diseñado para tratar las situaciones en las que los jugadores están organizados en uniones (clases). Una estructura coalicional, o sistema de uniones a priori, de un juego coalicional de costes es una partición del conjunto de jugadores que proporciona una descripción *a priori* de la estructura cooperativa de los jugadores. Un juego de costes con un conjunto de jugadores N y una estructura coalicional P es una terna (N, c, P) donde c es la función de costes de un juego (N, c) y $P = \{P_1, \ldots, P_{\text{A}}\}$ es una partición del conjunto de jugadores N en uniones a priori. El conjunto de particiones (estructuras coalicionales) en N se denotará por $P(N)$.

Definición 2.3. El *valor de Owen* de (N, c, P) se define, para cada $i \in N$, como

$$\begin{aligned}\Psi_i(N, c, P) \quad &= \sum_{H \subset M \setminus \{a\}} \sum_{S \subset P_a \setminus \{i\}} \frac{h!(\text{A} - h - 1)!s!(p_a - s - 1)!}{\text{A}!p_a!} \\ &\quad \times (c(R \cup S \cup \{i\}) - c(R \cup S))\end{aligned}$$

donde $M = \{1, \ldots, \text{A}\}$, P_a es la (única) clase a la que pertenece i, $h = |H|$, $s = |S|$, $p_a = |P_a|$ es el número de jugadores en la clase P_a, $\text{A} = |P|$ es el número de clases y $R = \cup_{b \in H} P_b$.

En lo que resta de capítulo, siempre y cuando no haya posibilidad alguna de ambigüedad, escribiremos $\Psi(c)$ en lugar de $\Psi(N, c, P)$.

A partir de (N, c, P) se puede definir el llamado juego cociente (M, c_P). Se trata del juego de costes jugado por las uniones, donde la función de costes c_P está definida como

$$c_P(H) = c\left(\cup_{h \in H} P_h\right)$$

para cada $H \subset M$. El valor de Owen asigna el coste total entre las uniones utilizando el valor de Shapley del juego inducido jugado por las uniones, en el sentido de que $\sum_{i \in P_h} \Psi_i(N, c, P) = \Phi_h(M, c_P)$ para cada $P_h \in P$. El valor de Owen reparte el coste asociado a cada unión entre sus miembros teniendo en consideración sus posibilidades de integrarse en otras uniones[6].

La fórmula del valor de Owen en la Definición 2.3 es computacionalmente compleja y a menudo resulta imposible su cálculo en la práctica ya que su

[6]Para los detalles del proceso, se remite al lector a la Definición 1.5.

nivel de complejidad es exponencial. El comentario anterior no quita que su interpretación sea sencilla y muy similar a la del valor de Shapley: el valor de Owen de i es el promedio de todas las contribuciones marginales de i en todas las ordenaciones de los jugadores que preserven el agrupamiento de los jugadores en sus respectivas uniones (la diferencia entre este procedimiento y el que permite el cálculo del valor de Shapley es que aquí no todas las permutaciones de jugadores están permitidas, ya que los jugadores de uniones distintas no se pueden intercalar).

A continuación introducimos propiedades del valor de Owen que consideramos especialmente interesantes[7], algunas de las cuales nos serán necesarias más adelante en el capítulo.

- *Eficiencia*:
$$\sum_{i \in N} \Psi_i(N, c, P) = c(N)$$
para todo $c \in CG(N)$ y todo $P \in P(N)$.

- *Propiedad de jugador nulo*: si $i \in N$ es nulo en c, entonces
$$\Psi_i(N, c, P) = 0$$
para todo $P \in P(N)$.

- *Simetría en las uniones*: si $i, j \in N$ son simétricos en c y son jugadores pertenecientes a la misma unión (clase), es decir, $i, j \in P_k$ con $P_k \in P$, entonces
$$\Psi_i(N, c, P) = \Psi_j(N, c, P)$$
para todo $P \in P(N)$.

- *Simetría en el juego cociente*: para todo $c \in CG(N)$ y todo $P \in P(N)$, si dos uniones $k, h \in M$ verifican que
$$c_P(R \cup \{k\}) = c_P(R \cup \{h\}) \ \ \forall R \subset M \setminus \{k, h\},$$
entonces
$$\sum_{i \in P_k} \Psi_i(N, c, P) = \sum_{i \in P_h} \Psi_i(N, c, P).$$
Esta propiedad nos dice que dos uniones (clases) simétricas en el juego cociente c_P reciben la misma asignación de costes.

[7]Para una visión más amplia de las propiedades del valor de Owen, se remite al lector a la Sección 3.2.

- *Propiedad de juego cociente*: para todo $c \in CG(N)$, $P \in P(N)$ y toda unión $P_k \in P$,

$$\sum_{i \in P_k} \Psi_i(N, c, P) = \Psi_k(M, c_P, P^{\text{A}}),$$

donde P^{A} denota la partición trivial $\{\{h\} : h \in M\}$.

Esta propiedad nos dice que la suma de las asignaciones de costes de los jugadores de una unión en el juego c coincide con la asignación de costes de la unión en el juego cociente c_P.

- *Aditividad*[8]: para todo $c_1, c_2 \in CG(N)$ y $P \in P(N)$,

$$\Psi(N, c_1 + c_2, P) = \Psi(N, c_1, P) + \Psi(N, c_2, P).$$

Fragnelli y Iandolino (2004) estudia el valor de Shapley y el valor de Owen de un juego de costes de mantenimiento que surge en el contexto de un consorcio de recogida y eliminación de residuos sólidos urbanos. Los autores calculan el valor de Owen del juego bajo la hipótesis adicional de que los grupos de jugadores (tipos) son los mismos que las uniones a priori, $P = \{g_1, \ldots, g_k\}$, es decir, que los jugadores del mismo tipo se agrupan formando una unión o clase. En este contexto, y con esta asunción extra, proponen la utilización de una expresión más sencilla que la fórmula general, aunque su complejidad de cálculo sigue siendo exponencial.

Teorema 2.3. *Sea (N, c, P) el juego de costes de mantenimiento correspondiente a los grupos (tipos) $g_1, \ldots, g_k$ (con $n_1, \ldots, n_k$ jugadores, respectivamente) y a los números no negativos $\{\alpha_{lm}\}_{l,m \in \{1,\ldots,k\}, l \leq m}$ y con el sistema de uniones $P = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Entonces, el valor de Owen puede calcularse, para cada $i \in g_l$ con $l = 1, \ldots, k$, como*

$$\begin{aligned}\Psi_i(c) &= \sum_{H \subset G_{l-1}} \frac{h!(k-h-1)!}{k!} \left(\frac{1}{|g_l|} \beta(H) + \alpha_{ll} \right) \\ &\quad + \sum_{H \not\subset G_{l-1}} \frac{h!(k-h-1)!}{k!} (\alpha_{ll} + \ldots + \alpha_{lj(H)})\end{aligned}$$

donde $G_{l-1} = \{g_1, \ldots, g_{l-1}\}$, $\beta(H) = (\alpha_{j(H)j(H)} + \ldots + \alpha_{j(H)l}) \sum_{g_j \in H} |g_j|$, $h = |H|$ y $j(H) = \max\{j : g_j \in H\}$.

[8]Además, $\Psi(N, \alpha c, P) = \alpha \Psi(N, c, P)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto, Ψ es una función lineal en c.

En aquellas situaciones en las que los jugadores están organizados en uniones, es muy importante disponer de una fórmula rápida que permita el cálculo del valor de Owen, como hace Fragnelli y Iandolino (2004) en un caso particular. En el problema del reparto de costes entre los trenes, que condujo a la introducción de la clase de los juegos de costes de mantenimiento, los trenes están organizados en compañías ferroviarias, y por tanto la utilización del valor de Owen parece una elección natural. Pero hasta ahora no se disponía de una fórmula que permitiese su cálculo rápido en esta clase de juegos, como sí se conocía para el valor de Shapley, por ejemplo. Subsanar esta deficiencia es el principal objetivo del presente capítulo.

A continuación se propone una expresión polinómica, con complejidad cúbica, para el cálculo del valor de Owen en la clase de los juegos de costes de mantenimiento. Esta fórmula, por tanto, evita la complejidad exponencial de la definición general y permite el cálculo rápido del valor de Owen en estos juegos incluso en aquellas situaciones en las que hay un número grande de jugadores, tipos o uniones.

Teorema 2.4. *Sea (N, c, P) el juego de costes de mantenimiento correspondiente a los grupos (tipos) $g_1, \ldots, g_k$ (con $n_1, \ldots, n_k$ jugadores, respectivamente) y a los números no negativos $\{\alpha_{lm}\}_{l,m\in\{1,\ldots,k\},l\leq m}$ y con un sistema de uniones $P = \{P_1, \ldots, P_{\text{A}}\}$. Entonces, el valor de Owen de (N, c, P) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\begin{aligned}
\Psi_i(c) &= \alpha_{j(i)j(i)} \\
&\quad + \sum_{m=j(i)+1}^{j(a)} \alpha_{j(i)m} \left(1 - \frac{1}{r_m(u_{am}+1)}\right) \\
&\quad + \sum_{m=j(a)+1}^{k} \alpha_{j(i)m} \frac{r_m}{r_m+1} \\
&\quad + \sum_{m=2}^{j(i)} \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_{lm} \frac{r_m n_{al} + n_l - \frac{r_m}{r_m+1} \sum_{P_b\in D_{lm}} n_{bl} - \sum_{P_b\in R_m} n_{bl}}{r_m u_{am}} \\
&\quad - \sum_{m=2}^{j(i)} \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_{lm} \frac{n_{al}}{u_{am}} \left(1 - \frac{1}{r_m(u_{am}+1)}\right)
\end{aligned}$$

donde P_a es la (única) unión a la que el jugador i pertenece ($i \in P_a$), $j(i) = j(\{i\})$ es es el tipo al cual i pertenece, $j(a) = j(P_a)$ es el máximo de los *tipos en la unión P_a, $R_m = \{P_b : j(b) \geq m\}$ es el conjunto de uniones con jugadores de tipo mayor o igual que m, $r_m = |R_m|$ es el número de uniones con jugadores de tipo mayor o igual que m, $n_{am} = |P_a \cap g_m|$ es el número de jugadores de tipo m en P_a, $u_{am} = \left|P_a \cap \left(\cup_{i=m}^{k} g_i\right)\right| = n_{am} + \ldots + n_{ak}$ es el número de jugadores de tipo mayor o igual que m en P_a y $D_{lm} = \{P_b : P_b \cap g_l \neq \emptyset, j(b) < m\}$ es el conjunto de uniones con jugadores de tipo l y sin jugadores de tipo mayor o igual que m.*

Demostración. La función de costes c puede escribirse, para cada $S \subset N$, como

$$c(S) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=l}^{k} \alpha_{lm} c^{lm}(S)$$

donde

$$c^{lm}(S) = \begin{cases} |S \cap g_l| & \text{si } m \leq j(S) \\ 0 & \text{si } m > j(S) \end{cases}$$

con $l, m \in \{1, \ldots, k\}, l \leq m$. Utilizando que el valor de Owen es un operador lineal, se verifica que, para cada $i \in N$,

$$\Psi_i(c) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=l}^{k} \alpha_{lm} \Psi_i(c^{lm}) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lm} \Psi_i(c^{lm}).$$

Sea (M, c_P^{lm}) el juego cociente, con $M = \{1, \ldots, \text{A}\}$. Para cada $H \subset M$,

$$c_P^{lm}(H) = c^{lm}\left(\cup_{h \in H} P_h\right) = \begin{cases} |(\cup_{h \in H} P_h) \cap g_l| & \text{si } m \leq j(H) \\ 0 & \text{si } m > j(H) \end{cases}$$

donde $j(H) = j\left(\cup_{h \in H} P_h\right)$.

Empezamos analizando el caso c^{ll}, con $l \in \{1, \ldots, k\}$. La función de costes c_P^{ll} es una función característica aditiva, es decir, representa un juego inesencial, por tanto el valor de Shapley del juego cociente $\Phi(c_P^{ll})$ asigna $\Psi_a(c^{ll}) = n_{al}$ a cada unión $P_a \in P$, donde $\Psi_a = \sum_{i \in P_a} \Psi_i$, y en consecuencia, utilizando la propiedad de simetría en las uniones, para cada $i \in N$,

$$\Psi_i(c^{ll}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in g_l \text{ (i.e, } j(i) = l) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos ahora que $l < m$. En el juego cociente, únicamente las uniones con jugadores de tipo l y las uniones con jugadores de tipo mayor o igual que m son jugadores no nulos.

Sea $P_a \in D_{lm}$. Para cada $H \subset M \setminus \{a\}$,

$$c_P^{lm}(H \cup \{a\}) - c_P^{lm}(H) = \begin{cases} n_{al} & \text{si } m \leq j(H) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto

$$\Psi_a(c^{lm}) = n_{al}\frac{r_m}{r_m + 1}$$

donde $r_m/(r_m + 1)$ es la probabilidad de que la unión P_a tenga al menos un predecesor $P_b \in R_m$ si las uniones se ordenan al azar. Entonces, para cada $i \in P_a$, con $P_a \in D_{lm}$,

$$\Psi_i(c^{lm}) = \begin{cases} \frac{r_m}{r_m+1} & \text{si } i \in g_l \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $P_a \in R_m$. Resulta inmediato comprobar que, para cada $P_a, P_b \in R_m$,

$$\Psi_a(c^{lm}) - \Psi_b(c^{lm}) = n_{al} - n_{bl}.$$

En consecuencia,

$$\Psi_a(c^{lm}) = n_{al} + k_1$$

para cada $P_a \in R_m$. Para el cálculo de la constante k_1 hacemos uso de la eficiencia del valor de Owen (i.e. $\sum_{i \in N} \Psi_i(c^{lm}) = c^{lm}(N)$) y de que $c^{lm}(N) = n_l$. Entonces,

$$\begin{aligned} n_l &= \sum_{P_b \in P} \sum_{i \in P_b} \Psi_i(c^{lm}) \\ &= \sum_{P_b \in D_{lm}} \sum_{i \in P_b \cap g_l} \frac{r_m}{r_m + 1} + \sum_{P_b \in R_m} \sum_{i \in P_b} \Psi_i(c^{lm}) \\ &= \sum_{P_b \in D_{lm}} n_{bl}\frac{r_m}{r_m + 1} + \sum_{P_b \in R_m} n_{bl} + k_1 r_m \end{aligned}$$

y, para cada $P_a \in R_m$,

$$\Psi_a(c^{lm}) = \frac{r_m n_{al} + n_l - \frac{r_m}{r_m+1}\sum_{P_b \in D_{lm}} n_{bl} - \sum_{P_b \in R_m} n_{bl}}{r_m}.$$

Sea $i \in P_a \cap g_l$. Para cada $H \subset M \setminus \{a\}$, $S \subset P_a \setminus \{i\}$,

$$c^{lm}(R \cup S \cup \{i\}) - c^{lm}(R \cup S) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq j(R \cup S) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $R = \cup_{b \in H} P_b$. Por tanto, si $P_a \in R_m$, $\Psi_i(c^{lm})$ puede ser interpretado como la probabilidad de que la unión P_a tenga al menos un predecesor en R_m si las uniones se ordenan al azar, o el jugador i tenga al menos un predecesor de tipo mayor o igual que m en la unión P_a si los jugadores de P_a se ordenan al azar. Entonces, para cada $i \in P_a \cap g_l$ con $P_a \in R_m$,

$$\Psi_i(c^{lm}) = 1 - \frac{1}{r_m(u_{am} + 1)}$$

donde $U_{am} = P_a \cap \left(\cup_{i=m}^{k} g_i\right)$ es el conjunto de jugadores de tipo mayor o igual que m en P_a, y $u_{am} = |U_{am}| = n_{am} + \ldots + n_{ak}$.

Para finalizar la demostración, sea $i \in P_a$ un jugador de tipo mayor o igual que m, i.e., $i \in U_{am}$. Teniendo en cuenta que estos jugadores son los únicos, aun no estudiados, que no son jugadores nulos, utilizando las propiedades de simetría y juego cociente, se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_i(c^{lm}) &= \frac{r_m n_{al} + n_l - \frac{r_m}{r_m+1} \sum_{P_b \in D_{lm}} n_{bl} - \sum_{P_b \in R_m} n_{bl}}{r_m u_{am}} \\ &\quad - \frac{n_{al}}{u_{am}} \left(1 - \frac{1}{r_m(u_{am} + 1)}\right). \end{aligned}$$

□

A continuación se expone una breve interpretación del resultado anterior, principal aportación del capítulo.

Supongamos que un jugador i de g_l ha hecho uso de un recurso compartido, al que llamaremos genéricamente la instalación. Este jugador asume todo el coste α_{ll} necesario para restaurar la instalación hasta el mismo nivel l, de tal modo que otro jugador del mismo tipo pueda volver a hacer uso de ella. A mayores, el jugador i paga al menos la mitad de los costes α_{lm}, con $l < m$, para que los jugadores de tipo mayor que l puedan también hacer uso de la instalación. La proporción de α_{lm} que paga el jugador i se incrementa con el número de uniones que tienen jugadores de tipo mayor o igual que m. Si $l < m \leq j(a)$ (donde $j(a)$ es el máximo de los tipos en la unión P_a, $i \in P_a$), entonces i paga una proporción mayor que si $j(a) < m$, y esta proporción se incrementa con el número de jugadores de tipo mayor o igual que m en la unión P_a. Además, el jugador i paga proporciones pequeñas de todos los costes α_{sm}, con $s < m \leq l$.

A pesar del hecho de que los jugadores de tipo menor que m, a excepción del mismo jugador i, no contribuyen a los pagos α_{lm}, el jugador i recibe una pequeña ayuda de los jugadores de tipo mayor o igual que m. Por tanto, los jugadores de niveles altos proporcionan pequeñas ayudas a todos los jugadores de niveles bajos; y en consecuencia sus contribuciones totales pueden llegar a ser muy cuantiosas.

2.4. Un ejemplo

Nuestra intención en esta sección es seleccionar un ejemplo sencillo y utilizarlo para ilustrar la solución que hemos expuesto en el capítulo. Utilizaremos como referente el ejemplo propuesto en Fragnelli *et al.* (2000), donde se dice "The aim of that paper (Baumgartner, 1997) is to provide 'order of magnitude' of costs concerning the railway system: we shall exploit it to analyze a rough but realistic example. In practical models, making a realistic example uses to be an enlightening exercise".

Siguiendo, pues, el ejemplo "rough but realistic" de Fragnelli *et al.* (2000), vamos a considerar los costes de reparación de un elemento individual de los sistemas ferroviarios: la vía del tren. El sistema consta de muchos otros elementos que se podrían estudiar de modo similar. En particular, analizaremos la asignación de los costes de mantenimiento de un kilómetro de vía cuando hay dos tipos de trenes que utilizan las instalaciones, trenes lentos y trenes rápidos, y los trenes están organizados en compañías ferroviarias. Los costes están expresados en francos suizos de 1997 y los datos originales están extraídos de Baumgartner (1997).

Asumamos que un kilómetro de vía de tren va a ser usada por 20 000 trenes al cabo del año, 15 000 de los cuales son lentos y 5 000 rápidos. El juego de costes de mantenimiento (N, c) viene dado por:

- $N = g_1 \cup g_2$, donde g_1 es el conjunto de los trenes lentos, con $n_1 = 15\,000$, y g_2 es el conjunto de los trenes rápidos, con $n_2 = 5\,000$.
- La función de costes c viene definida por $\alpha_{11} = 0.5$, $\alpha_{12} = 0.125$ y $\alpha_{22} = 0.625$. Obsérvese que esta estructura de costes es especialmente sencilla, ya que $\alpha_{11} + \alpha_{12} = \alpha_{22}$.

Las estructuras coalicionales llamadas triviales son $P^n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, donde cada unión está formada por un único jugador, y $P^N = \{N\}$, donde hay una única unión (la gran coalición). En ambos casos el valor de Owen de un tren lento y de un tren rápido coincide con el valor de Shapley. Si Ψ_s y Ψ_f

denotan el valor de Owen de un tren lento y un tren rápido, respectivamente, entonces:

- $\Psi_s(c) = 0.624975$,
- $\Psi_f(c) = 0.625075$.

Analicemos ahora la asignación de los costes cuando los trenes están repartidos en dos compañías ferroviarias:

- Si $P = \{g_1, g_2\}$, i.e., la primera compañía tiene todos los trenes lentos y la segunda compañía tiene todos los trenes rápidos, entonces $\Psi_s(c) = 0.5625$ y $\Psi_f(c) = 0.8125$. Esta es la única situación estudiada en Fragnelli y Iandolino (2004).
- Si una de las dos compañías tiene solo trenes lentos, entonces el valor de Owen le asigna costes de mantenimiento menores a esta compañía que a la otra y, en consecuencia, si esta compañía añade trenes rápidos a su flota, sus costes se incrementan considerablemente.
- Si las dos compañías tienen trenes rápidos, pagan los mismos costes en promedio, 0.625 francos suizos por tren. Por tanto, en este contexto la mejor opción es tener tantos trenes rápidos como sea posible cuando solo se tienen en consideración los costes de mantenimiento.

En el Cuadro 2.1 se muestran algunos resultados numéricos que ilustran las aseveraciones anteriores para el caso en el que hay dos compañías ferroviarias. La columna central, `Partición`, refleja el número de trenes lentos y rápidos de cada compañía, respectivamente (en miles de unidades), y las columnas `Compañía 1` y `Compañía 2` las asignaciones que el valor de Owen hace a los trenes lentos y rápidos dentro de la compañía en cuestión.

Finalmente, estudiemos ahora el caso en el que hay tres compañías ferroviarias:

- Si hay una compañía que solo tiene trenes lentos, entonces el valor de Owen le asigna a esta compañía costes de mantenimiento menores que a las otras compañías. Para comparar los costes de las compañías que tienen trenes rápidos, consideremos dos situaciones:

  Si una de las dos compañías tiene solo trenes rápidos, entonces cuantos más trenes tenga, menores van a ser los costes medios que va a tener que pagar por tren.

Compañía 1	Partición	Compañía 2
(0.562500, -)	(15, 0), (0, 5)	(-, 0.812500)
(0.624975, 0.637570)	(14, 5), (1, 0)	(0.562500, -)
(0.624987, 0.625039)	(15, 4.9), (0, 0.1)	(-, 0.625000)
(0.624381, 0.717822)	(15, 0.1), (0, 4.9)	(-, 0.625000)
(0.624938, 0.625062)	(1, 1), (14, 4)	(0.624984, 0.625055)
(0.624938, 0.625874)	(14, 1), (1, 4)	(0.624984, 0.625004)

Cuadro 2.1: Comparación entre los valores de Owen de los trenes lentos y rápidos cuando hay 2 compañías

Si las dos compañías tienen ambos tipos de trenes, en general, la que tenga más trenes rápidos tendrá que pagar unos costes más ventajosos que la otra compañía por cada tren lento y por cada tren rápido. No obstante lo anterior, si solo tiene unos pocos trenes rápidos más y muchos más trenes lentos, entonces sus costes dejan de ser ventajosos (siempre condicionados a cada tipo de tren).

- Si las tres compañías tienen trenes rápidos, pagan los mismos costes en promedio, 0.625 francos suizos por tren.

En el Cuadro 2.2 se muestran algunos ejemplos numéricos para el caso en el que hay tres compañías ferroviarias. Al igual que en el cuadro anterior, `Partición` refleja el número de trenes lentos y rápidos de cada compañía, respectivamente (en miles de unidades), y las columnas `Compañía 1`, `Compañía 2` y `Compañía 3` la asignación que el valor de Owen hace a los trenes lentos y rápidos dentro de la compañía en cuestión.

	Partición	
Compañía 1	Compañía 2	Compañía 3
	(1, 0), (14, 4), (0, 1)	
(0.583333, -)	(0.624984, 0.630263)	(-, 0.645833)
	(1, 0), (14, 1), (0, 4)	
(0.583333, -)	(0.624937, 0.646707)	(-, 0.630208)
	(1, 0), (7, 1), (7, 4)	
(0.583333, -)	(0.624938, 0.646270)	(0.624984, 0.630236)
	(1, 0), (2, 2.4), (12, 2.6)	
(0.583333, -)	(0.624974, 0.633702)	(0.624976, 0.633124)
	(1, 1), (14, 1), (0, 3)	
(0.624958, 0.625042)	(0.624958, 0.625583)	(-, 0.625000)
	(1, 1), (12, 1), (2, 3)	
(0.624958, 0.625042)	(0.624958, 0.625500)	(0.624986, 0.625009)

Cuadro 2.2: Comparación entre los valores de Owen de los trenes lentos y rápidos cuando hay 3 compañías

Como conclusión, podemos decir que cuando una compañía toma en consideración estos costes de mantenimiento, es en su mejor interés tener únicamente trenes lentos. Pero si esta compañía tiene también trenes rápidos, entonces su mejor opción es tener muchos. En lo anterior estamos asumiendo que el número de trenes lentos y rápidos está fijado, lo cual nos parece una suposición realista. Debe haber trenes de los dos tipos tanto por razones políticas (beneficios para la sociedad) como por razones económicas (beneficios para las compañías: ambos tipos de tren son rentables si se tienen en consideración todos los beneficios y costes, y no solo los costes de mantenimiento); y los escenarios que estudiamos son de reparto de los trenes entre las compañías.

Sin esta restricción, y si solo tuviésemos en cuenta los costes de mantenimiento, entonces los trenes rápidos sencillamente desaparecerían porque su mantenimiento es más caro. Si factores externos, como por ejemplo incentivos públicos, obligan a que todas las compañías operen con trenes rápidos, entonces serían los trenes lentos los que tenderían a disminuir e incluso a desaparecer; si se fuerza a algunas compañías, pero no a todas, entonces solo las compañías más grandes tendrían interés en este tipo de operaciones, nunca las pequeñas. Este es el único escenario en el que la especialización podría tener sentido (como siempre en este ejemplo, analizando la situación exclusivamente desde el punto de vista de estos costes de mantenimiento).

2.5. Comentarios finales

Hemos dedicado los dos primeros capítulos de esta memoria a la utilización de valores coalicionales en sendos problemas de asignación de costes: los juegos del aeropuerto y los juegos de mantenimiento.

El objetivo de este capítulo ha sido el estudio del valor de Owen en los juegos de costes de mantenimiento. Se ha propuesto una expresión sencilla de calcular del valor de Owen en esta colección de problemas y se ha aplicado a un ejemplo de costes de mantenimiento de una infraestructura ferroviaria.

Creemos que los juegos de costes de mantenimiento constituyen una colección interesante de problemas que apenas han recibido atención en la literatura. Así, solo se ha estudiado el valor de Shapley, a pesar de que el valor solidario, por poner un ejemplo, parece especialmente atractivo en este contexto. E, incorporando una estructura coalicional, puede ser interesante estudiar, no solo el valor de Owen, sino también los demás valores coalicionales de Shapley eficientes que se han tratado en el Capítulo 1. Y, por último, también sería interesante la comparación entre estos valores coalicionales de Shapley y otros valores coalicionales que no sean valores coalicionales de Shapley, como por ejemplo los estudiados en Casas-Méndez *et al.* (2003) y en Alonso-Meijide *et al.* (2003).

Capítulo 3

Aproximaciones de juegos mediante funciones lineales: un acercamiento al valor de Owen

3.1. Introducción

En Shapley (1953) se inicia la teoría del valor en juegos cooperativos con utilidad transferible, en lo que sigue juegos TU o simplemente juegos. En ese trabajo se introduce el valor de Shapley, que propone un reparto de los beneficios generados por la cooperación entre los jugadores basado en un principio de productividad, que se calcula a partir de sus contribuciones marginales mediante una fórmula combinatoria; y se caracteriza axiomáticamente a partir de sus propiedades básicas. Posteriormente, este valor ha recibido una importante atención en la literatura y ha sido enfocado desde distintas perspectivas. Uno de estos enfoques lo constituye la extensión multilineal de un juego (Owen, 1972). Extendiendo la idea de que todo juego puede escribirse de forma única como un polinomio multilineal en n variables, siendo n el número de jugadores, Guillermo Owen aportó una herramienta para el cálculo del valor de Shapley alternativa a la fórmula propuesta inicialmente por Lloyd S. Shapley. En Charnes *et al.* (1988) se propone otro acercamiento al valor de Shapley. En lugar de representar de forma exacta el juego mediante un polinomio multilineal, se aproxima mediante un polinomio lineal utilizando un criterio de error cuadrático. Esto conduce a un problema nuevo de minimización cuadrática con restricciones lineales que también permite, finalmente, calcular el valor de Shapley.

El valor de Banzhaf es un valor alternativo al de Shapley definido por primera vez en Banzhaf (1965) para la clase de juegos simples y posteriormente extendido para un juego TU arbitrario en Owen (1975). Se trata de un valor, al igual que aquel, muy popular y que ha sido estudiado desde muy distintos ángulos. Así, por ejemplo, se han analizado sus propiedades básicas y caracterizado axiomáticamente a través de ellas (véanse Lehrer, 1988, y Nowak, 1997); y en Owen (1975) se ha calculado utilizando la extensión multilineal del juego. En Hammer y Holzman (1992) se calcula el valor de Banzhaf de un juego simple utilizando la mejor aproximación lineal según un criterio cuadrático. Hammer y Holzman (1992): "A major problem in game theory is how to distribute the worth $v(N)$ of the total coalition among its members in a way that takes into account reasonable the worths of the various coalitions (...) Various solution concepts that associate with every game a payoff vector have been suggested and studied. A payoff vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ may be identified with the additive game $l(x) = \sum_{i \in N} a_i x_i$ in which the worth of every coalition is the sum of payoffs to its members. Thus we have a one-to-one correspondence between the payoff vectors for a given game v and the functions in L^v [conjunto de todas las funciones lineales definidas en cierto dominio y verificando unas determinadas restricciones]. This suggests to treat the game theoretic problem of associating a payoff vector to a game as a problem of approximating the game v by another game that lies in L^v. This point of view is not new to game theory, but it has not played a central role in it".

Son muchos los valores propuestos para repartir los beneficios de un juego en presencia de una estructura coalicional, siendo esta una partición del conjunto de jugadores. Estos valores reciben el nombre genérico de valores coalicionales. Uno de los más populares es el valor de Owen (Owen, 1977), extensión del valor de Shapley que puede interpretarse como una negociación a dos niveles: entre las uniones que conforman la coalición y entre los jugadores dentro de cada unión; utilizando el valor de Shapley en cada nivel como regla de asignación de los beneficios. El valor (coalicional) de Owen también ha sido objeto, al igual que los valores de Shapley y de Banzhaf, de importantes estudios. Así, ha sido caracterizado axiomáticamente, por citar solo unos ejemplos, en Owen (1977), Winter (1992), Calvo *et al.* (1996), Vázquez-Brage *et al.* (1997) y Vázquez-Brage (1998). En Owen y Winter (1992) se calcula el valor de Owen utilizando la extensión multilineal del juego.

El valor coalicional simétrico de Banzhaf es otro valor coalicional introducido y caracterizado axiomáticamente en Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro (2002). En Alonso-Meijide *et al.* (2007) se hace un estudio axiomático comparativo del valor coalicional simétrico de Banzhaf con el valor de Owen y el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1981), entre otros, y se defiende la conveniencia de este enfoque con las siguientes palabras: "Then, why axiomatic systems? There are some reasons for this interest of game theorists in getting them. First, for a mathematically elegant and pleasant spirit. Second, because a set of basic (and assumed independent and hence mininal) properties is a most convenient and economic tool to decide on the use of the value. Finally, such a set allows a researcher to compare a given value with others and select the most suitable one for the problem he or she is facing each time". Este valor coalicional también ha sido calculado mediante la extensión multilineal del juego en Alonso-Meijide *et al.* (2005).

En este capítulo se estudian el valor de Owen y el valor coalicional simétrico de Banzhaf desde la perspectiva de un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales. Primero se plantea, y resuelve, el problema en presencia de una estructura coalicional, y posteriormente se aplica su solución al cálculo de los dos valores antes mencionados. Parte de los contenidos de este capítulo están incluidos en Alonso-Meijide y Costa (2015).

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 2 se define el valor de Owen y se hace un breve recorrido por algunas de sus posibles caracterizaciones axiomáticas. En la Sección 3 se hace un análisis similar con el valor coalicional simétrico de Banzhaf. La Sección 4 se dedica a definir la extensión multilineal de un juego y a recordar como esta se puede aplicar para el cálculo del valor de Owen y del valor coalicional simétrico de Banzhaf. En la Sección 5 se presenta un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales y se ve su relación con el valor de Shapley y el valor de Banzhaf. En la Sección 6 se formula, y resuelve, un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales incorporando información coalicional. En las Secciones 7 y 8 se aplica la solución del problema anterior al cálculo del valor de Owen y al cálculo del valor coalicional simétrico de Banzhaf, respectivamente. Y, por último, la Sección 9 se dedica a unos comentarios finales.

3.2. El valor de Owen

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto finito, pero por lo demás arbitrario, de jugadores. Llamamos juego al par (N, v), donde v es una aplicación $v : 2^N \to \mathbb{R}$, que recibe el nombre de función característica, a la que solo exigimos que $v(\emptyset) = 0$. El número $v(S)$, con S un subconjunto de N, se interpreta como el beneficio (o coste) que pueden generar los miembros de S actuando conjuntamente, independientemente de como actúen el resto de jugadores. El espacio vectorial de las funciones características en N se denota por $G(N)$, y la colección de todos los conjuntos $G(N)$, con $N \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito, por G. El conjunto de particiones (estructuras coalicionales) en N se denota por $P(N)$. Llamamos estructura coalicional a cada elemento $P \in P(N)$, y unión[1] a cada elemento del conjunto P.

Llamamos *valor de Shapley* a la aplicación Φ definida, para cada $i \in N$, como

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

para todo $v \in G(N)$, donde $s = |S|$ para todo $S \subset N$. Este valor, que propone un reparto ecuánime de los beneficios (o costes) generados por la cooperación entre los jugadores, fue introducido en Shapley (1953) y con él se inicia la teoría del valor en juegos TU.

En Owen (1977) se introduce una extensión del valor de Shapley, conocida como valor de Owen, diseñada para repartir los beneficios (o costes) de un juego TU cuando los jugadores están organizados en uniones, es decir, en presencia de una estructura coalicional. Sea $P = \{P_1, \ldots, P_{\text{A}}\}$ la partición de N que describe la estructura coalicional del problema. Denotamos por M el conjunto $\{1, \ldots, \text{A}\}$, siendo $\text{A} = |P|$. Llamamos juego con una estructura coalicional a la terna (N, v, P), donde (N, v) es un juego y $P \in P(N)$.

Veamos alguna notación extra que necesitaremos para definir el valor de Owen:

- Llamamos *juego cociente* a (M, v_P), donde $v_P(H) = v(\cup_{h \in H} P_h)$ para todo $H \subset M$. El juego cociente es el juego inducido por (N, v) cuando se consideran las uniones de la partición P como jugadores, y el conjunto de las uniones, M, como gran coalición.

- Para todo $a \in M$ y todo $S \subset P_a$, denotamos por $(M, v_{P|_S})$ el juego cociente previa eliminación de los elementos de $P_a \setminus S$. Para cada $H \subset M$, se define
$$v_{P|_S}(H) = v(\cup_{h \in H} P_h \setminus S'),$$
donde $S' = P_a \setminus S$. Es decir, el nuevo problema $(M, v_{P|_S})$ describe que hubiese ocurrido en el juego cociente si la unión P_a fuese reemplazada por S, y los restantes jugadores de P_a desapareciesen del juego.

[1]En otros capítulos de esta memoria se utilizan, indistintamente, los nombres *clase* y *unión* para referirse a los elementos de una estructura coalicional P.

- Para todo $P_a \in P$, se define el juego (P_a, v_a) como
$$v_a(S) = \Phi_a(M, v_{P|_S})$$
para cada $S \subset P_a$.

Definición 3.1. El *valor de Owen* de (N, v, P) se define, para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, como
$$\Psi_i(N, v, P) = \Phi_i(P_a, v_a).$$

La definición anterior puede interpretarse como un reparto a dos niveles (o en dos etapas), en cada uno de los cuales se utiliza como regla de asignación el valor de Shapley. En primer lugar, las uniones juegan el juego cociente y se reparten el beneficio total entre ellas; y a continuación el beneficio asignado a cada unión se reparte entre sus miembros a través del juego interno (P_a, v_a).

El valor de Owen puede calcularse (y por ende interpretarse) haciendo uso de las contribuciones marginales de los jugadores.

Teorema 3.1. *(Owen, 1977) El valor de Owen de (N, v, P) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*
$$\begin{aligned}\Psi_i(N, v, P) &= \sum_{H \subset M \setminus \{a\}} \sum_{S \subset P_a \setminus \{i\}} \frac{h!(\mathrm{A} - h - 1)!s!(p_a - s - 1)!}{\mathrm{A}!p_a!} \\ &\quad \times \left(v(R \cup S \cup \{i\}) - v(R \cup S)\right),\end{aligned}$$
donde P_a es la (única) unión a la que pertenece i, $h = |H|$, $s = |S|$, $p_a = |P_a|$, $\mathrm{A} = |P|$ y $R = \cup_{b \in H} P_b$.

Históricamente, uno de los acercamientos al valor de Owen más importantes ha sido a través de sus propiedades. Después de que Owen obtuviese en 1977 la primera caracterización axiomática del nuevo valor, muy similar a la caracterización clásica del valor de Shapley, han sido varias las caracterizaciones alternativas que se han publicado en la literatura. Haremos a continuación un breve recorrido por algunas de estas caracterizaciones (sin pretender en modo alguno ser exhaustivos), para lo que antes necesitamos establecer algunas propiedades que después utilizaremos.

Propiedades del valor de Owen en $G(N)$, que definimos para un valor genérico ϕ:

- *Eficiencia*:
$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v, P) = v(N)$$
para todo $v \in G(N)$ y todo $P \in P(N)$.

- *Propiedad de jugador nulo*: si $i \in N$ es nulo[2] en v, entonces

$$\phi_i(N, v, P) = 0$$

para todo $P \in P(N)$.

- *Simetría en las uniones*: si $i, j \in N$ son simétricos[3] en v y son jugadores pertenecientes a la misma unión, es decir, $i, j \in P_k$ con $P_k \in P$, entonces

$$\phi_i(N, v, P) = \phi_j(N, v, P)$$

para todo $P \in P(N)$.

- *Simetría en el juego cociente*: para todo $v \in G(N)$ y todo $P \in P(N)$, si dos uniones $k, h \in M$ verifican que

$$v_P(R \cup \{k\}) = v_P(R \cup \{h\}) \;\; \forall R \subset M \setminus \{k, h\},$$

entonces

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_h} \phi_i(N, v, P).$$

Esta propiedad nos dice que dos uniones simétricas en el juego cociente v_P reciben la misma asignación de beneficios.

- *Aditividad*: para todo $v_1, v_2 \in G(N)$ y $P \in P(N)$,

$$\phi(N, v_1 + v_2, P) = \phi(N, v_1, P) + \phi(N, v_2, P).$$

Teorema 3.2. *(Owen, 1977)[4] El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional en $G(N)$ que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría en las uniones, simetría en el juego cociente y aditividad.*

---

[2]Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo en v si, para cada $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

[3]Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en v si, para cada coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

[4]El teorema que aquí enunciamos es una versión moderna del original de Owen, en el que se utiliza el concepto de *anonimato* (véase la página 91) en lugar de simetría, y la propiedad de efectividad en lugar de eficiencia y jugador nulo. La propiedad de *efectividad* dice que, si T es un soporte de v (i.e., $v(S) = v(S \cap T)$, $\forall S \subset N$), entonces

$$\sum_{i \in T} \phi_i(N, v, P) = v(T),$$

es decir, si los jugadores de T son los únicos que aportan algo a cada coalición, entonces el beneficio total, $v(N) = v(T)$, se reparte entre ellos.

En Winter (1992) se utiliza la propiedad de consistencia[5] para caracterizar el valor de Owen:

- *Consistencia*: para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y $P_k \in P$, si $i \in S$ con $S \subset P_k$, entonces

$$\phi_i(S, v^{P,S}, \{S\}) = \phi_i(N, v, P),$$

  donde el juego $(S, v^{P,S})$ se define, para todo $T \subset S$,

$$v^{P,S}(T) = v(N \setminus (S \setminus T)) - \sum_{j \in N \setminus S} \phi_j(N \setminus (S \setminus T), v_{-(S \setminus T)}, P_{-(S \setminus T)}),$$

  siendo $v_{-(S \setminus T)}$ la restricción de v a $N \setminus (S \setminus T)$ y $P_{-(S \setminus T)}$ la estructura coalicional $\{P_l : l \in M, l \neq k\} \cup \{P_k \setminus (S \setminus T)\}$.

- *Covarianza*: para todo $P \in P(N)$, sean $v, w \in G(N)$ verificando que existen $k > 0$ y $a = (a_j)_{j \in N}$ tales que, para todo $S \subset N$,

$$w(S) = kv(S) + \sum_{j \in S} a_j.$$

  Entonces, para todo $i \in N$,

$$\phi_i(N, w, P) = k\phi_i(N, v, P) + a_i.$$

- *Propiedad de juego cociente*: para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y $P_k \in P$,

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \phi_k(M, v_P, P^{\text{A}}),$$

  donde P^{A} denota la partición trivial $\{\{h\} : h \in M\}$.

  Esta propiedad nos dice que la suma de lo que ganan los jugadores de una unión en el juego v es lo mismo que lo que gana la unión en el juego cociente v_P.

Teorema 3.3. *(Winter, 1992) El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional en $G(N)$ que satisface las propiedades de eficiencia, simetría en las uniones, consistencia, covarianza y juego cociente.*

[5] Esta propiedad de consistencia es una adaptación de la definida en Hart y Mas-Colell (1989) para caracterizar el valor de Shapley.

En Calvo *et al.* (1996) se utilizan las propiedades de contribuciones equilibradas para el mismo fin:

- *Contribuciones equilibradas coalicionales*: para todo $v \in G(N)$ y todo $P \in P(N)$, si $i, j \in N$ son jugadores pertenecientes a la misma unión, es decir, $i, j \in P_k$ con $P_k \in P$, entonces

  $$\phi_i(N, v, P) - \phi_i(N \setminus \{j\}, v_{-j}, P_{-j}) = \phi_j(N, v, P) - \phi_j(N \setminus \{i\}, v_{-i}, P_{-i}),$$

  donde, para todo $i \in P_k \in P$, v_{-i} denota la restricción de v a $N \setminus \{i\}$ y P_{-i} denota estructura coalicional $\{P_l : l \in M, l \neq k\} \cup \{P_k \setminus \{i\}\}$.

  Esta propiedad nos dice que, dados dos jugadores de la misma unión, cada uno de ellos debería ganar o perder la misma cantidad por la retirada del otro del juego.

- *Contribuciones equilibradas en el cociente*: para todo $v \in G(N)$ y todo $P \in P(N)$, si $k, h \in M$, entonces

  $$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) - \sum_{i \in P_k} \phi_i(N \setminus P_h, v_{-P_h}, P_{-P_h}) =$$
  $$\sum_{i \in P_h} \phi_i(N, v, P) - \sum_{i \in P_h} \phi_i(N \setminus P_k, v_{-P_k}, P_{-P_k}),$$

  donde, para todo $k \in M$, v_{-P_k} denota la restricción de v a $N \setminus P_k$ y P_{-P_k} denota la estructura coalicional $\{P_l : l \in M, l \neq k\}$.

  Esta propiedad nos dice que, dadas dos uniones, cada una de ellas debería ganar o perder la misma cantidad por la retirada de la otra del juego.

Teorema 3.4. *(Calvo et al., 1996) El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional en G que satisface las propiedades de eficiencia, contribuciones equilibradas coalicionales y contribuciones equilibradas en el cociente.*

En Vázquez-Brage *et al.* (1997) se utiliza la propiedad de valor coalicional de Shapley junto con una variante de las propiedades de contribuciones equilibradas:

- *Propiedad de valor coalicional de Shapley*: para todo $v \in G(N)$,

  $$\phi(N, v, P^n) = \Phi(N, v),$$

  donde P^n denota la partición trivial $\{\{i\} : i \in N\}$, en la que cada jugador de N constituye por si solo una unión.

- *Contribuciones equilibradas en las uniones*: para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y cualesquiera par de jugadores $i, j \in N$ pertenecientes a la misma unión, $i, j \in P_k$ con $P_k \in P$,

$$\phi_i(N, v, P) - \phi_i(N, v, P^{-j}) = \phi_j(N, v, P) - \phi_j(N, v, P^{-i}),$$

donde, para cada $i \in P_k$, se define

$$P^{-i} = \{P_k \setminus \{i\}, \{i\}\} \cup \{P_l \,:\, l \in M, l \neq k\}.$$

Esta propiedad dice que la ganancia (o pérdida) que sufre el jugador i cuando el jugador j abandona la unión de la que ambos forman parte, para constituirse en una unión de un solo jugador, es la misma que sufre j cuando es i el que abandona la unión.

Teorema 3.5. *(Vázquez-Brage et al., 1997) El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional de Shapley en $G(N)$ que satisface las propiedades de contribuciones equilibradas en las uniones y juego cociente.*

En Vázquez-Brage (1998) se vuelve a utilizar la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones.

Teorema 3.6. *(Vázquez-Brage, 1998) El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional en $G(N)$ que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría en el juego cociente, contribuciones equilibradas en las uniones y aditividad.*

En Vázquez-Brage (1998) y en Khmelnitskaya y Yanovskaya (2007) se caracteriza el valor de Owen mediante la propiedad de monotonía fuerte[6]:

- *Monotonía fuerte*: para todo $v, w \in G(N)$ y todo $P \in P(N)$, si un jugador $i \in N$ verifica

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S) \quad \forall S \subset N,$$

entonces

$$\phi_i(N, v, P) \geq \phi_i(N, w, P).$$

Teorema 3.7. *(Vázquez-Brage, 1998; Khmelnitskaya y Yanovskaya, 2007) El valor de Owen Ψ es el único valor coalicional en $G(N)$ que satisface las propiedades de eficiencia, simetría en las uniones, simetría en el juego cociente y monotonía fuerte.*

[6]Utilizada en Young (1985) para el valor de Shapley.

3.3. El valor coalicional simétrico de Banzhaf

El valor de Banzhaf aparece definido por primera vez en Banzhaf (1965) para la clase de juegos simples[7] y es posteriormente extendido para un juego TU arbitrario en Owen (1975). Es una alternativa al valor de Shapley especialmente popular para los juegos simples. Veamos su definición.

El *valor de Banzhaf* de (N, v) se define, para cada $i \in N$, como

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

donde $n = |N|$ es el número de jugadores en v. Al igual que el valor de Shapley, el valor de Banzhaf puede interpretarse como una media, pero a diferencia de aquel, en el que los pesos asociados a cada coalición dependen de su tamaño, en el valor de Banzhaf todas las coaliciones tienen la misma ponderación.

El valor coalicional simétrico de Banzhaf es un valor coalicional introducido en Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro (2002). De forma similar al valor de Owen, calcula las asignaciones a los jugadores en un proceso que consta de dos etapas: primero, en el juego cociente, las uniones se reparten el beneficio total utilizando el valor de Banzhaf; y en la segunda etapa, los jugadores de cada unión se reparten el beneficio asignado a la unión en la etapa anterior utilizando el valor de Shapley (del juego asociado correspondiente).

Equivalentemente, puede ser definido mediante la siguiente fórmula.

Definición 3.2. El *valor coalicional simétrico de Banzhaf* de (N, v, P) se define, para cada $i \in N$, como

$$\xi_i(N, v, P) = \sum_{H \subset M \setminus \{a\}} \sum_{S \subset P_a \setminus \{i\}} \frac{s!(p_a - s - 1)!}{2^{\text{A}-1} p_a!} \left(v(R \cup S \cup \{i\}) - v(R \cup S)\right),$$

donde P_a es la (única) unión a la que pertenece i, $h = |H|$, $s = |S|$, $p_a = |P_a|$, $\text{A} = |P|$ y $R = \cup_{b \in H} P_b$.

En Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro (2002), además de definir el valor coalicional simétrico de Banzhaf, se estudian sus propiedades básicas y se caracteriza axiomáticamente utilizando las propiedades de 2-eficiencia y contribuciones marginales iguales.

[7]Puede verse la definición de *juego simple* en la Sección 4.5.

- *2-eficiencia*: para todo $v \in G(N)$, si $i, j \in N$, entonces

$$\phi_i(N, v, P^n) + \phi_j(N, v, P^n) = \phi_{ij}(N^{i,j}, v^{i,j}, P^{n-1}),$$

  donde P^n denota la partición trivial $\{\{i\} : i \in N\}$ y $(N^{i,j}, v^{i,j})$ denota el juego reducido en el que i y j se amalgaman, definido de la siguiente manera: ij es un nuevo jugador que representa tanto a i como a j, $N^{i,j} = \{k \in N : k \neq i, k \neq j\} \cup \{ij\}$ y, para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $v^{i,j}(S) = v(S)$, $v^{i,j}(S \cup \{ij\}) = v(S \cup \{i, j\})$.

- *Jugador dummy*: para todo $v \in G(N)$, si $i \in N$ es un *dummy*[8] en v, entonces

$$\phi_i(N, v, P^n) = v(\{i\}).$$

- *Simetría coalicional*: si $i, j \in N$ son jugadores simétricos en $v \in G(N)$, entonces

$$\phi_i(N, v, P^n) = \phi_j(N, v, P^n).$$

- *Contribuciones marginales iguales*: para todo $v, w \in G(N)$, si $i \in N$ verifica

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S),$$

  para todo $S \subset N \setminus \{i\}$, entonces

$$\phi_i(N, v, P^n) = \phi_i(N, w, P^n).$$

Teorema 3.8. *(Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro, 2002) El valor coalicional simétrico de Banzhaf ξ es el único valor coalicional en G que satisface las propiedades de 2-eficiencia, jugador dummy, simetría coalicional, contribuciones marginales iguales, contribuciones equilibradas en las uniones y juego cociente.*

En Alonso-Meijide *et al.* (2007) se hace un estudio axiomático comparativo del valor coalicional simétrico de Banzhaf con el valor de Owen y el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1981), entre otros.

3.4. Extensiones multilineales

Todos los valores que se han estudiado en este capítulo vienen expresados por fórmulas de apariencia sencilla, pero de cálculo laborioso porque es

[8] Un jugador $i \in N$ es un *dummy* en v si, para todo $S \subset N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$, es decir, si sus contribuciones marginales coinciden con $v(\{i\})$.

necesario realizar la suma de un número grande de términos. Al ir recorriendo las distintas coaliciones que se pueden formar con jugadores de N (o al menos las coaliciones *compatibles* con la estructura coalicional), la complejidad de cálculo es exponencial, lo cual puede suponer, en ocasiones, un serio problema de índole práctico, obligando a buscar formas alternativas para el cálculo de los valores. La extensión multilineal de un juego ha probado ser una herramienta útil para este fin.

Toda función característica $v \in G(N)$ tiene por dominio 2^N, la familia de todos los subconjuntos de N. Una forma alternativa de representar este dominio es mediante el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, donde cada componente es 0 o 1, ya que cada subconjunto $S \in 2^N$ está en correspondencia biunívoca con el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $t_i = 1$ si $i \in S$, y $t_i = 0$ si $i \notin S$. Es decir, puede identificarse 2^N con el conjunto de vértices del cubo unitario en el espacio $\mathbb{R}^n, \{0,1\}^N$. Por lo tanto, la función característica v es una función real definida en los vértices del cubo unitario. En Owen (1972) se propone extender dicha función a todo el cubo unitario $[0,1]^N$ mediante un polinomio que recibe el nombre de extensión multilineal del juego.

Definición 3.3. Sea $v \in G(N)$. Se define la *extensión multilineal* de v como la función h definida por

$$h\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right) = \sum_{S \subset N} v(S) \prod_{i \in S} t_i \prod_{j \notin S} (1 - t_j)$$

para todo $t_i,\ 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$.

En Owen (1972) se demuestra que la extensión multilineal del juego puede utilizarse para calcular el valor de Shapley.

Teorema 3.9. *(Owen, 1972) Sea $v \in G(N)$ y sea $h\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ su extensión multilineal. El valor de Shapley de (N, v) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\Phi_i\left(N, v\right) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t_i}\left(x, x, \ldots, x\right) dx.$$

Y en Owen (1975) se presenta el resultado análogo para el valor de Banzhaf.

Teorema 3.10. *(Owen, 1975) Sea $v \in G(N)$ y sea $h\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ su extensión multilineal. El valor de Banzhaf de (N, v) puede calcularse, para cada $i \in N$, como*

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Generalizando los métodos de cálculo anteriores a juegos (N, v) con una estructura coalicional $P \in P(N)$, en Owen y Winter (1992) se utiliza la extensión multilineal del juego para calcular el valor de Owen del mismo.

Teorema 3.11. *(Owen y Winter, 1992) Sean $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$, y sea $h(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ la extensión multilineal de v. El valor de Owen de (N, v, P) puede calcularse, para cada $i \in P_k$ con $P_k \in P$, mediante el siguiente algoritmo:*

1. *Para todo $l \neq k$ y para todo $h \in P_l$, reemplazar la variable t_h por y_l. Se obtiene así una nueva función de t_j e y_l, donde $j \in P_k$ y $l \in M \setminus \{k\}$.*

2. *En la función obtenida anteriormente, reducir a 1 todos los exponentes mayores, es decir, reemplazar cada y_l^a, con $a \geq 1$, por y_l. Con esto se ha obtenido una nueva función multilineal $g_k((t_j)_{j \in P_k}, (y_l)_{l \in M \setminus \{k\}})$.*

3. *En la función g_k sustituir cada y_l por r e integrar con respecto a r, obteniendo*

$$\alpha_k((t_j)_{j \in P_k}) = \int_0^1 g_k((t_j)_{j \in P_k}, r, r, \ldots, r)dr.$$

4. *Finalmente, para obtener el valor de Owen, calcular*

$$\Psi_i(N, v, P) = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_k}{\partial t_i}(x, \ldots, x)\, dx.$$

Y en Alonso-Meijide *et al.* (2005) se presenta el resultado análogo para el valor coalicional simétrico de Banzhaf.

Teorema 3.12. *(Alonso-Meijide et al., 2005) Sean $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$, y sea $h(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ la extensión multilineal de v. El valor coalicional simétrico de Banzhaf de (N, v, P) puede calcularse, para cada $i \in P_k$ con $P_k \in P$, mediante el siguiente algoritmo:*

1. *Para todo $l \neq k$ y para todo $h \in P_l$, reemplazar la variable t_h por y_l. Se obtiene así una nueva función de t_j e y_l, donde $j \in P_k$ y $l \in M \setminus \{k\}$.*

2. *En la función obtenida anteriormente, reducir a 1 todos los exponentes mayores, es decir, reemplazar cada y_l^a, con $a \geq 1$, por y_l. Con esto se ha obtenido una nueva función multilineal $g_k((t_j)_{j \in P_k}, (y_l)_{l \in M \setminus \{k\}})$.*

3. *En la función g_k obtenida en el paso anterior, sustituir cada y_l por $1/2$, obteniendo*

$$\alpha_k((t_j)_{j\in P_k}) = g_k((t_j)_{j\in P_k}, (1/2)_{l\in M\setminus\{k\}}).$$

4. *Finalmente, para obtener el valor coalicional simétrico de Banzhaf, calcular*

$$\xi_i(N, v, P) = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_k}{\partial t_i}(x, x, \ldots, x)\, dx.$$

3.5. Funciones lineales y optimización cuadrática

La motivación detrás de la extensión multilineal de un juego, que hemos estudiado en la sección anterior, es que todo juego puede escribirse de forma única como un polinomio multilineal en n variables, con dominio[9] en $\{0,1\}^n$. Guillermo Owen explotó la idea anterior en 1972, extendiéndola, para obtener un método de cálculo del valor de Shapley y, tres años después, del valor de Banzhaf. En esta sección vamos a ver una aproximación distinta al problema que también va a dar lugar, en última instancia, a un método de cálculo del valor de Shapley y del valor de Banzhaf, este último en principio para juegos simples aunque existe una adaptación del método, aplicable a cualquier juego, que permite el cálculo de un valor de Banzhaf normalizado. Se trata de, en lugar de representar el juego de forma exacta, aproximarlo por la *mejor* función lineal (polinomio lineal, por tanto), también con dominio en $\{0,1\}^n$, utilizando como criterio de optimalidad el común en análisis de la regresión, es decir, el criterio de mínimos cuadrados, ya que lo que se está haciendo es minimizar la distancia entre dos funciones. En ocasiones, para poder llegar al cálculo del valor, es necesario utilizar un criterio de mínimos cuadrados ponderados.

En el título, y en lo que antecede, hemos utilizado la terminología matemática y hablado de funciones lineales. Empleando la terminología más propia de la teoría de juegos, a partir de ahora hablaremos de funciones características aditivas y, por extensión, de juegos aditivos (también llamados inesenciales). Un juego $x \in G(N)$ es un *juego aditivo* si verifica

$$\begin{array}{rccl} x: & 2^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longrightarrow & x(S) = \sum_{i\in S} x_i, \end{array}$$

[9]Podemos identificar $\{0,1\}^n \equiv \{0,1\}^N$.

siendo $x_i = x(\{i\})$.

El objetivo es, por tanto, dado un juego arbitrario $v \in G(N)$, encontrar el juego aditivo x más próximo utilizando la métrica euclídea (L_2), previa incorporación de una función de ponderación (o pesos) arbitraria. El primer trabajo que sigue este enfoque es Charnes *et al.* (1988), donde se plantea el problema de minimización cuadrática con restricciones lineales

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{S \subset N} \omega(S)(v(S) - x(S))^2 \\ \text{sujeto a} \quad & x(N) = v(N) \end{aligned} \tag{3.1}$$

entre todos los juegos aditivos $x \in G(N)$, donde ω es la función de pesos, verificando que, para todo $S \subset N$, $\omega(S) > 0$ y $\omega(S)$ solo depende del cardinal de S (i.e., $\omega(S) = \omega(T)$ si $|S| = |T|$)[10].

Teorema 3.13. *(Charnes et al., 1988) El problema 3.1 tiene una única solución que coincide con el valor de Shapley cuando $\omega(S) = \binom{n-2}{s-1}^{-1}$, con $s = |S|$ para todo $S \subset N$.*

En Ruiz *et al.* (1998) se le llama *valor mínimo cuadrático* a toda solución del problema 3.1. Por tanto, el valor de Shapley es un valor mínimo cuadrático. Si no se imponen restricciones a la función de pesos, no se puede garantizar ni la existencia ni la unicidad de la solución (Faigle y Grabisch, 2014).

En Hammer y Holzman (1992) se sigue un camino similar que permite el cálculo del valor de Banzhaf en juegos simples. Solo una parte de este trabajo está dedicada a la teoría de juegos, de ahí que en él se hable de funciones pseudo-booleanas, que no son sino las funciones $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$, y de funciones pseudo-booleanas lineales $f(t) = x_0 + \sum_{i \in N} x_i t_i$, donde $t \in \{0,1\}^n$ y los coeficientes x_i, con $i \in N$, son números reales. Obsérvese que si a una función pseudo-booleana se le exige que $f(0, \ldots, 0) = 0$, entonces tenemos una función característica, y por tanto un juego; y una función pseudo-booleana lineal es una función característica aditiva si $x_0 = 0$.

Dada una función pseudo-booleana f, se define la *mejor aproximación lineal* de f como la función pseudo-booleana lineal l que minimiza

$$\sum_{t \in \{0,1\}^n} (f(t) - l(t))^2$$

[10]Cuando ω verifica esta condición se dice que los pesos son *simétricos*.

entre todas las funciones lineales. La mejor aproximación lineal existe y es única. A diferencia del problema 3.1, en este modelo no se utiliza una función de pesos ni se impone una restricción de eficiencia.

Teorema 3.14. *(Hammer y Holzman, 1992) Dado un juego simple v, el valor de Banzhaf asigna a cada jugador $i \in N$ el coeficiente x_i de la mejor aproximación lineal de v.*

El teorema anterior se puede extender a cualquier juego, ya no necesariamente simple, pero a costa de modificar el modelo. Si se calcula el óptimo en el dominio de los juegos aditivos (es decir, entre todas las funciones pseudo-booleanas lineales sin término independiente) y se impone una restricción de eficiencia, este método obtiene un valor de Banzhaf normalizado (para que sea eficiente). La normalización es a través de un término aditivo: la diferencia entre $v(N)$ y la suma de los pagos (del valor sin normalizar) se reparte equitativamente entre todos los jugadores. En Alonso-Meijide *et al.* (2014a) se estudia una versión truncada del valor anterior que garantiza que ningún jugador obtenga un pago negativo. Este nuevo valor puede obtenerse como solución de un problema análogo al problema 3.1.

3.6. El problema de optimización

Dado un juego con una estructura coalicional, el objetivo de la presente sección es plantear el problema de encontrar su mejor aproximación lineal que sea compatible con la estructura coalicional, para lo que se seguirá el enfoque de Charnes *et al.* (1988). Para este fin necesitamos introducir notación adicional.

Sea el juego $v \in G(N)$ y la estructura coalicional $P \in P(N)$. Sea C el conjunto de coaliciones compatibles con P en el sentido de la interpretación heurística del valor de Owen: coaliciones formadas por uniones completas y, a lo sumo, una unión incompleta; se excluyen $\emptyset$ y N.

$$C = \{R \cup S \subset N \,:\, R = \cup_{\substack{b\in H \\ H\subsetneq M}} P_b, S \subsetneq P_k, k \in M \setminus H\} \setminus \emptyset.$$

Y sea C_i el conjunto de coaliciones compatibles con P que contienen a $i \in N$.

$$C_i = \{T \in C \,:\, i \in T\}.$$

Creemos interesante hacer notar que todo $T \in C$ puede escribirse de forma única como $T = R \cup S$. Para expresar mejor esta idea, definamos la colección formada por las uniones completas, y todas sus uniones (en el sentido de uniones de conjuntos), y la colección de las uniones incompletas.

$$\begin{aligned} C^1 &= \{R \subset N : R = \cup_{b \in H} P_b, H \subsetneq M\}, \\ C^2 &= \{S \subset N : S \subsetneq P_b, b \in M\}. \end{aligned}$$

Todo $T \in C$ puede escribirse de forma única como $T = R \cup S$, donde $R \in C^1$, $S \in C^2$, con $R \cap S = \emptyset$. Esto nos permite definir las funciones $R(T) = R$, $H(T) = H$ y $S(T) = S$.

La función de pesos se define como $\omega : C \subset 2^N \longrightarrow \mathbb{R}^+$, verificando

$$\omega(T) \equiv \omega(h(T), p(T), s(T)),$$

donde $h(T) = |H(T)|$ es el número de uniones completas de T, $p(T)$ es el cardinal de la unión incompleta de T si $S(T) \neq \emptyset$ $(p(T) = |P_k|, S(T) \subset P_k)$, $p(T) = 0$ si $S(T) = \emptyset$ y $s(T) = |S(T)|$ es el número de elementos de la unión incompleta en T.

El objetivo del problema de optimización que vamos a plantear a continuación va a ser un juego aditivo con función característica

$$\begin{array}{rccl} x : & 2^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longrightarrow & x(S) = \sum_{i \in S} x_i. \end{array}$$

Sean $\{\alpha_l\}_{l \in M}$ constantes reales conocidas. En el problema de optimización vamos a exigir que $x(P_l) = \alpha_l$ para todo $l \in M$. En secciones posteriores esta restricción se interpretará en el sentido de que tenemos previamente resuelto el juego cociente, siendo el vector $(\alpha_l)_{l \in M}$ su solución.

El problema de optimización[11] que nos interesa resolver es

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \sum\limits_{T \in C} \omega(T)(v(T) - x(T))^2 \\ \text{sujeto a} & x(P_l) = \alpha_l \ \forall l \in M \end{array} \tag{3.2}$$

entre todos los juegos aditivos $x \in G(N)$.

[11] El problema dual sería

$$\max_{\lambda} \ \Theta_\lambda$$

donde

$$\Theta_\lambda = \min_{x} \left\{ \sum_{T \in C} \omega(T)(v(T) - x(T))^2 + 2 \sum_{l \in M} \delta_l (x(P_l) - \alpha_l) \right\}.$$

Para más detalles, se remite al lector a Bazaraa *et al.* (2006) y Bertsekas (1999).

Teorema 3.15. *El problema 3.2 tiene una única solución que viene dada, para todo $i \in P_k$, con $P_k \in P$, por*

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_k}\left(\mu_i + \frac{\beta_k \alpha_k - \sum_{j \in P_k} \mu_j}{p_k}\right),$$

donde $p_k = |P_k|$,

$$\mu_j = \sum_{T \in C_j} \omega(T) v(T)$$

para todo $j \in P_k$ y

$$\beta_k = \sum_{a=0}^{\text{A}-1} \sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a, p_k, b) \binom{\text{A}-1}{a} \binom{p_k-2}{b-1}.$$

Demostración. Sea L la función lagrangiana, definida como

$$L(x,\delta) = \sum_{T \in C} \omega(T)(v(T) - x(T))^2 + 2 \sum_{l \in M} \delta_l (x(P_l) - \alpha_l),$$

donde x es la función objetivo (una función característica aditiva)[12] y δ es el vector $(\delta_l)_{l \in M}$.

A continuación, calculamos las derivadas parciales de L respecto a x_i, para todo $i \in P_k$, y respecto a δ_l, para todo $l \in M$, e igualamos a cero, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L(x,\delta)}{\partial x_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta_k = \sum_{T \in C_i} \omega(T)(v(T) - x(T)), \;\forall i \in P_k, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial L(x,\delta)}{\partial \delta_l} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_l = x(P_l), \;\forall l \in M. \tag{3.4}$$

Sea $i \in P_k$. Nos interesa desarrollar el siguiente término, presente en la ecuación 3.3,

$$\sum_{T \in C_i} \omega(T) x(T) = \sum_{\substack{T \in C \\ i \in R(T)}} \omega(T) x(T) + \sum_{\substack{T \in C \\ i \in S(T)}} \omega(T) x(T).$$

Llamemos θ_1 al primer sumando,

$$\theta_1 = \sum_{\substack{T \in C \\ i \in R(T)}} \omega(T) x(T),$$

[12] Podemos identificar la función x con el vector $(x_i)_{i \in N}$.

que solo depende de k (depende de x solo a través de $x(P_l)$, que por la ecuación 3.4 está fijado a α_l, para todo $l \in M$), y por tanto su desarrollo es innecesario. Vamos a calcular el segundo sumando, al que procedemos a llamar θ_2,

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \sum_{\substack{T\in C\\ i\in S(T)}} \omega(T)x(T) = \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \sum_{\substack{T\in C_i\,:\,i\in S(T)\\ h(T)=a,\,s(T)=b}} \omega(T)x(T) \\
&= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b) \sum_{\substack{T\in C_i\,:\,i\in S(T)\\ h(T)=a,\,s(T)=b}} x(T) \\
&= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b) \left(\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-1}{b-1}x_i\right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{j\in P_k\\ j\neq i}} \binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-2}x_j + \sum_{l\neq k}\binom{\mathrm{A}-2}{a-1}\binom{p_k-1}{b-1}x(P_l)\right) \\
&= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-1}{b-1}x_i \\
&\quad + \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-2}\sum_{\substack{j\in P_k\\ j\neq i}} x_j \\
&\quad + \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-2}{a-1}\binom{p_k-1}{b-1}\sum_{l\neq k} x(P_l) \\
&= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-1}{b-1}x_i \\
&\quad - \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-2}x_i \\
&\quad + \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-2}\alpha_k \\
&\quad + \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-2}{a-1}\binom{p_k-1}{b-1}\sum_{l\neq k} \alpha_l.
\end{aligned}$$

En el último paso del desarrollo anterior se ha incorporado la condición de factibilidad del problema, $\sum_{\substack{j\in P_k\\ j\neq i}} x_j = \alpha_k - x_i$.

Llamamos

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1}\omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-2}\alpha_k\\ &\quad+\sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1}\omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-2}{a-1}\binom{p_k-1}{b-1}\sum_{l\neq k}\alpha_l\end{aligned}$$

y observamos que θ_3 solo es función de k. Utilizando la conocida propiedad[13] $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1}\sum_{b=1}^{p_k-1}\omega(a,p_k,b)\binom{\mathrm{A}-1}{a}\binom{p_k-2}{b-1}x_i+\theta_3\\ &= \beta_k x_i + \theta_3.\end{aligned}$$

Recapitulando, hemos obtenido

$$\begin{aligned}\delta_k &= \sum_{T\in C_i}\omega(T)(v(T)-x(T))\\ &= \mu_i - \theta_1 - \beta_k x_i - \theta_3. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Si consideramos la ecuación 3.5 y sumamos en el conjunto de jugadores de P_k,

$$\sum_{i\in P_k}\delta_k = \sum_{i\in P_k}(\mu_i - \theta_1 - \beta_k x_i - \theta_3),$$

obtenemos

$$p_k\delta_k = \sum_{i\in P_k}\mu_i - \beta_k\alpha_k - p_k(\theta_1+\theta_3). \qquad (3.6)$$

Finalmente, de las ecuaciones 3.5 y 3.6 se obtiene la solución del problema

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_k}\left(\mu_i + \frac{\beta_k\alpha_k - \sum_{j\in P_k}\mu_j}{p_k}\right).$$

□

[13] En los desarrollos de θ_2 y θ_3, debe entenderse $\binom{n}{m} = 0$ si $m < 0$.

3.7. Aplicación al cálculo del valor de Owen

En la Sección 3.5 hemos visto que el valor de Shapley es un valor mínimo cuadrático. De modo similar, el valor de Owen se puede obtener como solución del problema 3.2 con una elección particular de la función de pesos. Para ello, suponemos que hemos resuelto previamente el problema cociente v_P mediante el valor de Shapley, obteniendo como solución las constantes α_l que determinan las restricciones lineales del problema.

Teorema 3.16. *Sean $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$. Si el valor de Shapley del juego cociente v_P es $(\alpha_l)_{l \in M}$, entonces el valor de Owen $\Psi_i(N, v, P)$ del jugador $i \in P_k$, con $P_k \in P$, en el juego (N, v, P), coincide con la solución x_i^* del teorema 3.15 cuando*

$$\omega(h, p, s) = \frac{1}{\mathrm{A}} \binom{\mathrm{A} - 1}{h}^{-1} \binom{p-2}{s-1}^{-1},$$

siendo $\beta_k = p_k - 1$.

Demostración. Para comprobar que las dos soluciones coinciden es suficiente hacerlo sobre los juegos de la base canónica. La razón es que el valor de Owen es lineal y también lo son todas las expresiones involucradas en el cálculo de x_i^* (lineales en v), tanto las fórmulas de μ_j, con $j \in P_k$, como las de los valores α_l, con $l \in M$ (por constituir estos el valor de Shapley del juego cociente).

Sea $T \subset N, T \neq \emptyset$. Definimos el juego de la base canónica v de la siguiente manera,

$$v(T) = 1, \quad v(S) = 0 \quad \forall S \neq T.$$

Distinguiremos dos posibilidades, dependiendo de si T está, o no está, en la colección C de coaliciones compatibles con la estructura coalicional P:

1. Supongamos que $T \notin C$. En este caso, $\mu_j = 0$ para todo $j \in P_k$.

   Si $T \neq N$, entonces $\alpha_k = \sum_{j \in P_k} \Psi_j(N, v, P) = 0$ por ser el juego cociente un juego nulo, con lo cual

   $$x_i^* = \frac{\alpha_k}{p_k} = 0 = \Psi_i(N, v, P).$$

   Si $T = N$, entonces $\alpha_k = \frac{1}{\mathrm{A}}$, con lo cual

   $$x_i^* = \frac{\alpha_k}{p_k} = \frac{1}{\mathrm{A} p_k} = \Psi_i(N, v, P).$$

2. Supongamos que $T \in C$. En este supuesto,

$$\mu_i = \begin{cases} \omega(T) & \text{si } i \in T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además,

$$\sum_{j \in P_k} \mu_j = |T \cap P_k|\, \omega(T)$$

y, si $i \in T$,

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_k}\left(\omega(T) + \frac{\beta_k \alpha_k - |T \cap P_k|\, \omega(T)}{p_k}\right).$$

Vamos a distinguir, a su vez, varios casos:

a) Supongamos que $T \in C^1$. Si $i \in T$ (y por tanto $P_k \subset T$), entonces

$$\alpha_k = \Phi_k(M, v_P) = \frac{1}{\mathrm{A}} \binom{\mathrm{A} - 1}{h(T) - 1}^{-1},$$

donde Φ denota el valor de Shapley, y

$$x_i^* = \frac{\omega(T)}{\beta_k} + \frac{\alpha_k}{p_k} - \frac{\omega(T)}{\beta_k} = \frac{\alpha_k}{p_k} = \Psi_i(N, v, P).$$

Si $i \notin T$, entonces $\mu_j = 0$ para todo $j \in P_k$, y

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_k}\left(0 + \frac{\beta_k \alpha_k - 0}{p_k}\right) = \frac{\alpha_k}{p_k} = \Psi_i(N, v, P).$$

b) Supongamos que $S(T) \neq \emptyset$. Se verifica que $\alpha_k = 0$, por ser el juego cociente un juego nulo. Calculamos β_k.

$$\begin{aligned} \beta_k &= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1} \sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a, p_k, b) \binom{\mathrm{A}-1}{a} \binom{p_k - 2}{b-1} \\ &= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1} \sum_{b=1}^{p_k-1} \frac{1}{\mathrm{A}} \binom{\mathrm{A}-1}{a}^{-1} \binom{p_k - 2}{b-1}^{-1} \binom{\mathrm{A}-1}{a} \binom{p_k - 2}{b-1} \\ &= p_k - 1. \end{aligned}$$

Si $i \in R(T)$, entonces $\Psi_i(N, v, P) = 0$, por ser simétricos los jugadores de P_k, y

$$x_i^* = \frac{1}{\beta_k}\left(\omega(T) + \frac{0\beta_k}{p_k} - \frac{p_k \omega(T)}{p_k}\right) = 0 = \Psi_i(N, v, P).$$

Si $i \in S(T)$, entonces los jugadores de P_k no son simétricos, debiendo distinguirse aquellos que están en $S(T) \subset P_k$ y los jugadores de $P_k \setminus S(T)$, que no pertenecen a T. El valor de Owen de $i \in S(T)$ se calcula:

$$\begin{aligned}
\Psi_i(N, v, P) &= \frac{h!(\mathrm{A} - h - 1)!(s-1)!(p_k - s)!}{\mathrm{A}!p_k!} \\
&= \frac{1}{\mathrm{A}p_k} \binom{\mathrm{A} - 1}{h}^{-1} \binom{p_k - 1}{s - 1}^{-1},
\end{aligned}$$

donde h denota $h(T)$ y $s = |S(T)|$. Recordemos que $\alpha_k = 0$, $\mu_i = \omega(T)$ y $\sum_{j \in P_k} \mu_j = s\omega(T)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
x_i^* &= \frac{(p_k - s)\omega(T)}{\beta_k p_k} \\
&= \frac{1}{\mathrm{A}(p_k - 1)} \binom{\mathrm{A} - 1}{h}^{-1} \binom{p_k - 2}{s - 1}^{-1} \frac{p_k - s}{p_k} \\
&= \Psi_i(N, v, P).
\end{aligned}$$

Si $i \in P_k \setminus S(T)$, el valor de Owen se calcula:

$$\begin{aligned}
\Psi_i(N, v, P) &= -\frac{h!(\mathrm{A} - h - 1)!s!(p_k - s - 1)!}{\mathrm{A}!p_k!} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{A}p_k} \binom{\mathrm{A} - 1}{h}^{-1} \binom{p_k - 1}{s}^{-1}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\alpha_k = 0$, $\mu_i = 0$ y $\sum_{j \in P_k} \mu_j = s\omega(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
x_i^* &= -\frac{s\omega(T)}{\beta_k p_k} \\
&= -\frac{s}{\mathrm{A}p_k(p_k - 1)} \binom{\mathrm{A} - 1}{h}^{-1} \binom{p_k - 2}{s - 1}^{-1} \\
&= \Psi_i(N, v, P).
\end{aligned}$$

Y por último, si $P_k \cap T = \emptyset$, entonces

$$x_i^* = 0 = \Psi_i(N, v, P).$$

$\square$

3.8. Aplicación al cálculo del valor coalicional simétrico de Banzhaf

Al igual que el valor de Owen, también el valor coalicional simétrico de Banzhaf puede obtenerse como solución del problema 3.2 con una elección particular de la función de pesos. Suponemos que previamente hemos resuelto el problema cociente v_P, obteniendo como solución las constantes α_l que determinan las restricciones lineales del problema. La diferencia radica en que, en lugar de resolver el problema cociente mediante el valor de Shapley, se utiliza el valor de Banzhaf.

Teorema 3.17. *Sean $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$. Si el valor de Banzhaf del juego cociente v_P es $(\alpha_l)_{l \in M}$, entonces el valor coalicional simétrico de Banzhaf $\xi_i(N, v, P)$ del jugador $i \in P_k$, con $P_k \in P$, en el juego (N, v, P), coincide con la solución x_i^* del teorema 3.15 cuando*

$$\omega(h, p, s) = \frac{1}{2^{\mathrm{A}-1}} \binom{p-2}{s-1}^{-1},$$

siendo $\beta_k = p_k - 1$.

Demostración. La demostración de este resultado es muy similar a la demostración del Teorema 3.16. Por este motivo no vamos a ser exhaustivos, limitándonos a un esbozo en el que solo incidiremos, de toda la casuística posible, en aquellos casos en los que x_i^* depende de ω, por considerarlos los más interesantes. Al igual que en el Teorema 3.16, para comprobar que las dos soluciones coinciden es suficiente hacerlo sobre los juegos de la base canónica.

Sea $T \subset N$, $T \neq \emptyset$. Definimos el juego de la base canónica v como,

$$v(T) = 1, \quad v(S) = 0 \quad \forall S \neq T.$$

Procedemos, en primer lugar, al cálculo de β_k.

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1} \sum_{b=1}^{p_k-1} \omega(a, p_k, b) \binom{\mathrm{A}-1}{a} \binom{p_k-2}{b-1} \\
&= \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1} \sum_{b=1}^{p_k-1} \frac{1}{2^{\mathrm{A}-1}} \binom{p_k-2}{b-1}^{-1} \binom{\mathrm{A}-1}{a} \binom{p_k-2}{b-1} \\
&= \frac{p_k-1}{2^{\mathrm{A}-1}} \sum_{a=0}^{\mathrm{A}-1} \binom{\mathrm{A}-1}{a}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\beta_k = p_k - 1.$$

Supongamos que $T \in C$ y $S(T) \neq \emptyset$. Si $i \in S(T)$, entonces, teniendo en cuenta que $\alpha_k = 0$, $\mu_i = \omega(T)$ y $\sum_{j \in P_k} \mu_j = s\omega(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{(p_k - s)\omega(T)}{\beta_k p_k} \\ &= \frac{p_k - s}{2^{\text{A}-1}\beta_k p_k} \binom{p_k - 2}{s - 1}^{-1} \\ &= \frac{(s-1)!(p_k - s)!}{2^{\text{A}-1} p_k!} \\ &= \xi_i(N, v, P). \end{aligned}$$

Si $i \in P_k \setminus S(T)$, entonces, teniendo en cuenta que $\alpha_k = 0$, $\mu_i = 0$ y $\sum_{j \in P_k} \mu_j = s\omega(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_i^* &= -\frac{s\omega(T)}{\beta_k p_k} \\ &= -\frac{s}{2^{\text{A}-1} p(p_k - 1)} \binom{p_k - 2}{s - 1}^{-1} \\ &= -\frac{s!(p - s - 1)!}{2^{\text{A}-1} p!} \\ &= \xi_i(N, v, P). \end{aligned}$$

□

3.9. Comentarios finales

En este capítulo se ha pretendido dar una visión de conjunto del valor de Owen, aunque sin ambicionar en modo alguno ser exhaustivos, centrándonos en sus muchas caracterizaciones axiomáticas y en su cálculo utilizando la extensión multilineal del juego. Y, como objetivo principal, se han estudiado, en presencia de una estructura coalicional, los valores mínimo cuadráticos compatibles, utilizando el problema de optimización cuadrática con restricciones lineales asociado para el cálculo del valor de Owen. Adicionalmente, se ha podido utilizar el mismo problema para el cálculo del valor coalicional simétrico de Banzhaf.

Creemos que es interesante el enfoque alternativo que aporta el problema de optimización a los valores mínimo cuadráticos y que, por tanto, es merecedor de un estudio más en profundidad del que hasta ahora ha recibido en la literatura. Y, en presencia de una estructura coalicional, el estudio de los valores mínimo cuadráticos compatibles solo se ha iniciado. Habría que estudiar, por ejemplo, si valores ya clásicos como el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1981) puede ser representado a través de un problema de optimización, y de forma más general, caracterizar los valores coalicionales que son valores mínimo cuadráticos.

Capítulo 4

El valor particional proporcional de Shapley

4.1. Introducción

La teoría de juegos cooperativos aborda el estudio de situaciones en las que un grupo de agentes (también llamados jugadores) desean repartir los beneficios (o los costes) derivados de su cooperación. Y ofrece herramientas matemáticas para proponer vectores de asignación que puedan ser aceptables por los agentes atendiendo a diferentes criterios. Esta teoría ha dado lugar a aplicaciones relevantes en muy distintos campos; véanse, por ejemplo, Roth (1988) y Fiestras-Janeiro *et al.* (2011).

Entre esas herramientas matemáticas se encuentran los así llamados *valores*. Un valor propone, para cada juego cooperativo, un vector de asignación que represente un compromiso justo (en algún sentido) para los jugadores. Probablemente, el valor más importante es el valor de Shapley (Shapley, 1953), que denotaremos aquí por Φ. Moretti y Patrone (2008) ofrece una visión de conjunto del valor de Shapley que muestra su impacto en diversas disciplinas científicas.

La noción de juego cooperativo con una estructura coalicional[1] (una partición del conjunto N de jugadores en clases[2]) fue considerada en Aumann

[1]Este es el nombre utilizado en Aumann y Drèze (1974). En Owen (1977) se utilizan, indistintamente, estructura coalicional *a priori* y estructura de uniones. En la literatura especializada también está referido como juego cooperativo con un sistema de uniones *a priori*.

[2]Utilizaremos indistintamente los términos *clase* y *unión* para referirnos a los elementos

y Drèze (1974), proponiéndose una modificación del valor de Shapley para afrontar esta situación. Posteriormente, otros valores coalicionales, es decir, valores para juegos cooperativos con una estructura coalicional, han sido introducidos y analizados en la literatura especializada en teoría de juegos. Los dos valores coalicionales más citados son el valor de Aumann–Drèze, denotado aquí por α, y el valor de Owen (Owen, 1977), denotado por Ψ. Estos dos valores están basados en interpretaciones muy diferentes de la estructura coalicional, que a su vez conducen a dos aproximaciones diferentes a la hora de definir valores coalicionales:

1. Aumann y Drèze (1974) considera que, una vez se ha formado la partición $\{P_1, \ldots, P_{\text{A}}\}$ de N, surgen A problemas de cooperación independientes (*uniones aisladas*), por tanto su valor asigna los beneficios generados por cada unión P_k entre sus miembros aplicando el valor de Shapley al juego restringido a la unión.

2. Por el contrario, Owen (1977) considera la partición más bien como un modo de influenciar la negociación entre los agentes (*uniones de negociación*), y en consecuencia su valor asigna los beneficios generados por N aplicando el valor de Shapley dos veces: primero, para repartir la utilidad total entre las uniones (las uniones son los jugadores del así llamado juego cociente) y, a continuación, para repartir entre los miembros de cada unión el pago obtenido en la primera etapa[3].

Ejemplo 4.1. (Un juego del guante)

Para ilustrar ambas aproximaciones al problema, consideremos un juego del guante elemental con tres jugadores en el que el jugador 1 tiene dos guantes derechos y los jugadores 2 y 3 tienen un guante izquierdo cada uno. Cada par de guantes derecho–e–izquierdo que se consiga completar tiene un pago asociado de 1; en cualquier otro caso, el pago es 0. El juego cooperativo (N, v) asociado a esta situación viene dado por

$$N = \{1, 2, 3\},$$

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0,$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 1, \quad v(N) = 2.$$

de la partición.

[3]Para los detalles del proceso, remitimos al lector a la Definición 1.5.

Consideremos ahora como actuarían los valores de Aumann–Drèze y de Owen si se formase la partición $P = \{\{1,2\},\{3\}\}$. El valor de Aumann–Drèze asignaría los pagos siguientes a los jugadores 1, 2 y 3:

$$\alpha(N, v, P) = (1/2, 1/2, 0).$$

En efecto, una vez formada la coalición P, este valor simplemente tiene en cuenta que los jugadores 1 y 2 son simétricos (en $P_1 = \{1,2\}$) y deben repartirse 1 unidad, mientras que el jugador 3 es un jugador nulo (en $P_3 = \{3\}$). Por el contrario, el valor de Owen asigna el vector

$$\Psi(N, v, P) = (1, 1/2, 1/2).$$

En primer lugar, asigna a las uniones 3/2 y 1/2, respectivamente, y asigna después un pago 1 al jugador 1, 1/2 al jugador 2, y 1/2 al jugador 3. Obsérvese que no solo los vectores de asignación son diferentes, sino que también lo es el beneficio total que se reparte en cada caso (los pagos del valor de Aumann–Drèze suman 1 mientras los pagos del valor de Owen suman 2).

En este capítulo, adoptamos la primera aproximación al problema, y por tanto abandonamos definitivamente el enfoque aportado por el valor de Owen (salvo a efectos de motivación). E introducimos un nuevo valor coalicional, que denotaremos por π y llamaremos valor particional proporcional de Shapley, como una alternativa al valor de Aumann–Drèze. Por tanto, asumiremos que una vez se forma una partición, surge una nueva situación cooperativa en cada unión, independiente de las restantes uniones. No obstante lo anterior, nosotros queremos tener en cuenta de alguna manera las opciones externas de los jugadores (es decir, las opciones que tendrían fuera de su propia unión), que van a venir reflejadas por el valor de Shapley del juego original (N, v) (sin la estructura coalicional que determinan las uniones).

De forma más precisa, dado un juego cooperativo v en N con una estructura coalicional $P = \{P_1, \ldots, P_{\mathrm{A}}\}$, nuestro nuevo valor π divide los beneficios $v(P_k)$ que puede obtener por si misma la unión P_k entre sus miembros proporcionalmente al valor de Shapley de esos mismos jugadores en el juego (N, v). Restringiremos el dominio de π a la clase de los juegos monótonos para evitar los problemas que a menudo surgen cuando se utiliza la proporcionalidad.

Aplicando el nuevo valor, en el Ejemplo 4.1 se obtiene el vector de asignación

$$\pi(N, v, P) = (2/3, 1/3, 0)$$

ya que el valor de Shapley es

$$\Phi(N, v) = (1, 1/2, 1/2).$$

Este reparto refleja que el jugador 1 está en una mejor posición negociadora que el jugador 2 porque tiene la opción de unirse al jugador 3 si se rompiese la unión $\{1,2\}$.

Ejemplo 4.2. (Un segundo juego del guante)

Con un cierto grado de informalidad, llamemos $N = \{r, r, \ell, \ell, \ell, \ell\}$ al conjunto de jugadores, cada uno de ellos con un guante: r significa guante derecho, ℓ significa guante izquierdo. Solamente cada par de guantes derecho–e–izquierdo tiene un valor de 1. El juego del guante v que describe esta situación es una combinación lineal de 45 juegos de unanimidad (que omitimos). El valor de Shapley es

$$\Phi(N, v) = \frac{1}{15}(11, 11, 2, 2, 2, 2)$$

y, para cualquier partición de la forma $P = \{A, \dots\}$, donde $A = \{r, r, \ell\}$, los valores de Aumann–Drèze α y particional proporcional de Shapley π, respectivamente, dan lugar a los repartos

$$\alpha(N, v, P) = \frac{1}{6}(1, 1, 4, 0, 0, 0) \qquad \text{y} \qquad \pi(N, v, P) = \frac{1}{24}(11, 11, 2, 0, 0, 0).$$

Estas asignaciones no dependen de como se dispongan los restantes tres jugadores ℓ (una propiedad general de α y de π). Por el contrario, lo que hagan esos otros tres jugadores es de gran importancia para el valor de Owen. Hay tres posibilidades:

$$P^1 = \{A, \{\ell\}, \{\ell\}, \{\ell\}\}, \qquad P^2 = \{A, B, \{\ell\}\} \qquad \text{y} \qquad P^3 = \{A, C\},$$

donde $B = \{\ell, \ell\}$ y $C = \{\ell, \ell, \ell\}$. Por tanto, utilizando el valor de Owen obtenemos

$$\Psi(N, v, P^1) = \tfrac{1}{12}(9, 9, 3, 1, 1, 1),$$

$$\Psi(N, v, P^2) = \tfrac{1}{36}(25, 25, 10, 3, 3, 6),$$

$$\Psi(N, v, P^3) = \tfrac{1}{12}(7, 7, 4, 2, 2, 2).$$

Este ejemplo es interesante. En primer lugar, porque muestra una diferencia entre el valor de Aumann–Drèze y el valor particional proporcional de Shapley: a α solo le afectan las posibilidades que existen dentro de $A = \{r, r, \ell\}$ y en consecuencia le da la mayor parte del beneficio al jugador

ℓ; por contra, π tiene en cuenta la fuerza estratégica de los jugadores en el juego original (N, v), y por tanto evita los cambios drásticos en los ratios de los pagos que tan poco satisfactorios serían para los poseedores de guantes derechos.

Y en segundo lugar, el ejemplo muestra la diferencia principal entre los valores de Aumann–Drèze y particional proporcional de Shapley, por un lado, y el valor de Owen, por el otro. Los dos primeros satisfacen eficiencia local[4], mientras que el último satisface eficiencia (global), al igual que el valor de Shapley.

El valor coalicional proporcional de Shapley (Alonso-Meijide y Carreras, 2011) es un valor coalicional reciente que sigue la aproximación 2. A pesar de que nuestro nuevo valor es muy distinto al de Alonso-Meijide y Carreras (2011) en el sentido de que sigue el enfoque 1, no es menos cierto que este se puede considerar un antecedente directo de aquel al compartir la idea básica de respetar la proporcionalidad de los pagos originales. Wiese (2007) y Casajus (2009) presentan otras variantes del valor de Aumann–Drèze que también tienen en cuenta, aunque de una manera distinta a la nuestra, las opciones externas de los jugadores (véase el Comentario 4.5).

Parte de los contenidos de este capítulo están incluidos en Alonso-Meijide *et al.* (2015).

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se define formalmente el valor de Aumann–Drèze, se presentan sus propiedades básicas y se introducen dos nuevas caracterizaciones axiomáticas en la clase de los juegos monótonos. La Sección 3 está dedicada al estudio del valor coalicional proporcional de Shapley y se analizan caracterizaciones axiomáticas del mismo (Alonso-Meijide y Carreras, 2011). En la Sección 4 se presenta el valor particional proporcional de Shapley y se estudian sus propiedades y caracterizaciones axiomáticas. La Sección 5 incluye varios ejemplos que ilustran el uso del nuevo valor. La Sección 6 se dedica a una discusión comparativa y, por último, la Sección 7 a unos comentarios finales.

4.2. El valor de Aumann–Drèze

Esta sección está dedicada al estudio del valor de Aumann–Drèze, definido en 1974 con la intención de cubrir lo que los autores consideraban una laguna:

[4] Definición 4.2.

la aplicación del valor de Shapley a un juego TU en el que esté definida una estructura coalicional. Empleando las propias palabras de Aumann y Drèze (1974): "Coalition structures have been used in defining the various solution notions that constitute the bargaining set family, i.e the various bargaining sets [Aumann and Maschler, 1964; Davis and Maschler, 1967], the kernel [Davis and Maschler, 1965] and the nucleolus [Schmeidler, 1969]; in effect, these notions are defined separately for each coalition structure. By contrast, the value [Shapley, 1953], core [Gillies, 1959] and von Neumann–Morgenstern solutions [1944] are not a priori defined with reference to a coalition structure (...) This contrast between the bargaining set family and the other solution notions is, however, merely a historical accident; it is easy to define the value, core and von Neumann–Morgenstern solutions with respect to a given coalition structure".

El dominio del valor de Aumann–Drèze, al igual que el del valor de Shapley, es la clase de los juegos TU; sin embargo, a nosotros nos interesa especialmente su uso en la subclase de los juegos monótonos para así poder compararlo con el nuevo valor que introducimos en la Sección 4.4 y que se define exclusivamente para los juegos monótonos. En esta sección nos moveremos con cierta libertad entre los juegos TU (juegos, de aquí en adelante) y los juegos monótonos: definiremos el valor de Aumann–Drèze y recordaremos su primera caracterización axiomática en la clase general, para a continuación ver dos caracterizaciones en la subclase de los juegos monótonos.

Empecemos estableciendo la notación y definiendo conceptos previos que serán posteriormente necesarios. Por $N = \{1, 2, \dots, n\}$ representamos el conjunto finito, pero por lo demás arbitrario, de jugadores. Llamaremos juego al par (N, v), donde v es una aplicación $v : 2^N \to \mathbb{R}$, que recibe el nombre de función característica, a la que solo exigimos que $v(\emptyset) = 0$. $v(S)$, con S un subconjunto de N, se interpreta como el beneficio (o coste) que pueden generar los miembros de S actuando conjuntamente, independientemente de como actúen el resto de jugadores. En ocasiones, abusando de la notación, llamaremos también juego a la función característica v.

Definición 4.1. Un juego (N, v) es *monótono* si v satisface la propiedad de monotonía:

$$v(S) \leq v(T) \text{ para cada par } S, T \subset N \text{ con } S \subset T.$$

El conjunto de particiones (estructuras coalicionales) en N se denotará por $P(N)$. La misma definición anterior de juego monótono es válida para un juego con estructura coalicional (N, v, P), con $P \in P(N)$.

El espacio vectorial de las funciones características en N se denotará por $G(N)$, y por $MG(N)$ la subclase (cono) asociada a los juegos monótonos.

Para cada coalición no vacía $T \subset N$, el juego de unanimidad u_T se define $u_T(S) = 1$ si $T \subset S$, y $u_T(S) = 0$ en caso contrario. Cada juego $v \in MG(N)$ puede escribirse de forma única como una combinación lineal de juegos de unanimidad usando los dividendos de Harsanyi (Harsanyi, 1959):

$$v = \sum_{T \subset N \,:\, T \neq \emptyset} c_T u_T$$

donde

$$c_T = \sum_{S \subset T} (-1)^{t-s} v(S), \quad t = |T|, \quad s = |S|.$$

La siguiente relación entre juegos monótonos nos será de utilidad más adelante:

$$v + v^- = v^+ \quad \text{donde} \quad v^+ = \sum_{T \,:\, c_T > 0} c_T u_T \quad \text{y} \quad v^- = \sum_{T \,:\, c_T < 0} -c_T u_T.$$

Llamamos *valor de Shapley* a la aplicación $\Phi : G(N) \to \mathbb{R}^N$ definida como

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

para todo $v \in G(N)$, $i \in N$, donde $s = |S|$ para todo $S \subset N$. Aunque pueda parecer redundante, ya que el conjunto N está formalmente implícito en la función característica v, escribiremos en lo que sigue $\Phi(N, v)$ para evitar posibles confusiones.

El valor de Shapley es el único valor en $MG(N)$ que satisface las siguientes propiedades[5]:

- *Eficiencia*: para todo $v \in MG(N)$,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N).$$

- *Propiedad de jugador nulo*[6,7]: si el jugador $i \in N$ es nulo en v, entonces

$$\Phi_i(N, v) = 0.$$

[5]Una caracterización análoga se verifica en $G(N)$.

[6]Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo en v si, para cada $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

[7]Es de destacar que, si $v \in MG(N)$, entonces $\Phi_i(N, v) = 0$ si, y solo si, i es un jugador nulo en v, y por tanto la propiedad de jugador nulo podría haber sido establecida de esta manera para Φ en esta subclase de juegos.

- *Simetría*: si los jugadores $i, j \in N$ son simétricos[8] en v, entonces

$$\Phi_i(N, v) = \Phi_j(N, v).$$

- *Aditividad*: para todo $v, w \in MG(N)$,

$$\Phi(N, v + w) = \Phi(N, v) + \Phi(N, w).$$

A continuación introducimos dos conceptos clave en todo el capítulo: *valor particional*, usando eficiencia local, y *valor particional de Shapley*, como una generalización del valor de Shapley. Los definiremos para $G(N)$ pero también usaremos las dos nociones en $MG(N)$.

Definición 4.2. Un *valor particional* en $G(N)$ es una aplicación

$$\phi : G(N) \times P(N) \to \mathbb{R}^N$$

verificando la propiedad

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = v(P_k)$$

para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y $P_k \in P$ (a esta propiedad le llamaremos *eficiencia local* [9]).

Definición 4.3. Un *valor particional de Shapley*[10] en $G(N)$ es un valor particional ϕ en $G(N)$ tal que

$$\phi(N, v, P^N) = \Phi(N, v)$$

para todo $v \in G(N)$.[11]

A continuación definimos el valor de Aumann–Drèze (Aumann y Drèze, 1974).

[8] Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en v si, para cada coalición $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

[9] Aumann y Drèze (1974) se refiere a esta propiedad con el nombre de *eficiencia relativa*. Nosotros preferimos el nombre de eficiencia local por contraposición a eficiencia global.

[10] No confundir con el valor *coalicional* de Shapley, definido en el Capítulo 1, en el que el referente es la partición trivial $\{\{i\} : i \in N\}$.

[11] P^N denota la partición trivial $\{N\}$.

Definición 4.4. El *valor de Aumann–Drèze* es el valor particional de Shapley α definido en $G(N)$ como

$$\alpha_i(N, v, P) = \Phi_i(P_{(i)}, v_{P_{(i)}})$$

para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$, $i \in N$, donde $P_{(i)}$ denota la unión (clase) de P a la cual pertenece el jugador i, y $v_{P_{(i)}}$ denota la restricción del juego v a $P_{(i)}$.

Nuestro siguiente objetivo es recordar las propiedades básicas del valor de Aumann–Drèze y caracterizarlo axiomáticamente. Ya hemos visto, cuando hablamos del valor de Shapley, un listado de propiedades en un contexto sin estructura coalicional; ahora vamos a establecer las propiedades que necesitaremos a continuación y lo vamos a hacer para un valor *particional* genérico ϕ. Algunas de las propiedades son análogas a las ya vistas y comparten el nombre; solo cambia el campo de aplicación. Las nuevas propiedades las vamos a definir para un valor particional ϕ en $G(N)$, aunque también las utilizaremos en $MG(N)$, sin volverlas a definir, para evitar más reiteraciones.

- *Propiedad de jugador nulo (NPP)*: para todo $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$, si $i \in N$ es nulo en v, entonces

$$\phi_i(N, v, P) = 0.$$

- *Anonimato en las uniones (AWU)*: para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y toda permutación $\wp$ de N bajo la que P sea invariante[12],

$$\sum_{i \in S} \phi_i(N, v^{\wp}, P) = \sum_{i \in S} \phi_{\wp(i)}(N, v, P)$$

  para todo $S \subset N$, donde $v^{\wp}(S) = v(\{\wp(i) : i \in S\})$.

- *Aditividad (ADD)*: para todo $v, w \in G(N)$ y $P \in P(N)$,

$$\phi(N, v + w, P) = \phi(N, v, P) + \phi(N, w, P).$$

- *Simetría en las uniones (SWU)*: para todo $v \in G(N)$ y $P \in P(N)$, si $i, j \in N$ son jugadores simétricos en v y $P_{(i)} = P_{(j)}$, entonces

$$\phi_i(N, v, P) = \phi_j(N, v, P).$$

[12]Se dice que P es invariante bajo $\wp$ si $P_k = \{\wp(i) : i \in P_k\}$ para toda unión $P_k \in P$.

- *Contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU)*: para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$ y cualesquiera par de jugadores $i, j \in N$ pertenecientes a la misma unión, $P_{(i)} = P_{(j)}$,

  $$\phi_i(N, v, P) - \phi_i(N, v, P^{-j}) = \phi_j(N, v, P) - \phi_j(N, v, P^{-i}),$$

  donde, para cada $k \in N$, se define

  $$P^{-k} = \{P_{(k)} \setminus \{k\}, \{k\}\} \cup \{P_i : P_i \in P, P_i \neq P_{(k)}\}.$$

  Esta propiedad dice que la ganancia (o pérdida) que sufre el jugador i cuando el jugador j abandona la clase (unión) de la que ambos forman parte, para constituirse en una clase de un solo jugador, es la misma que sufre j cuando es i el que abandona la clase.

La primera caracterización axiomática del valor de Aumann–Drèze se presenta, y demuestra, en el trabajo germinal de 1974:

Teorema 4.1. *El valor de Aumann–Drèze α es el único valor particional en $G(N)$ que satisface las propiedades de jugador nulo (NPP), anonimato en las uniones (AWU)*[13] *y aditividad (ADD).*

Finalizamos esta sección con dos caracterizaciones axiomáticas nuevas del valor de Aumann–Drèze en juegos monótonos utilizando dos propiedades clásicas: contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU) y aditividad (ADD). Ambas caracterizaciones son también válidas en $G(N)$. En particular, el Teorema 4.3 es análogo a la caracterización original del valor en $G(N)$ (Teorema 4.1). La diferencia radica en la parte final de la demostración.

Teorema 4.2. *(Primera caracterización axiomática del valor de Aumann–Drèze en juegos monótonos) El valor de Aumann–Drèze α es el único valor particional en $MG(N)$ que satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU).*

Demostración. (Existencia) α satisface BCWU porque el valor de Shapley satisface contribuciones equilibradas[14].

[13] El resultado sigue siendo válido si se sustituye la propiedad de anonimato en las uniones (AWU) por simetría en las uniones (SWU). A la propiedad AWU, Aumann y Drèze (1974) le llama simetría.

[14] La propiedad de contribuciones equilibradas para el valor de Shapley garantiza que $\Phi_i(N, v) - \Phi_i(N \setminus \{j\}, v_{-j}) = \Phi_j(N, v) - \Phi_j(N \setminus \{i\}, v_{-i})$ para todo juego $v \in G(N)$ y jugadores $i, j \in N$. Aquí, v_{-k} denota la restricción de v a $N \setminus \{k\}$ para todo $k \in N$. Esta propiedad fue introducida y probada en Myerson (1980).

(Unicidad) Asumamos ahora que ϕ es un valor particional en $MG(N)$ que satisface BCWU y que es distinto de α, $\phi \neq \alpha$. Sean $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$, $i \in N$ tales que $\phi_i(N, v, P) \neq \alpha_i(N, v, P)$ y $c = |P_{(i)}|$ es mínimo: esto implica que si $w \in MG(N)$, $Q \in P(N)$, $j \in N$ y $|Q_{(j)}| < c$ entonces $\phi_j(N, w, Q) = \alpha_j(N, w, Q)$. Es evidente que $c > 1$ porque ϕ y α son valores particionales. Ahora, para cada $j \in P_{(i)}$, BCWU y el hecho de que c sea mínimo implican que

$$\begin{aligned} &\phi_i(N, v, P) - \phi_j(N, v, P) = \phi_i(N, v, P^{-j}) - \phi_j(N, v, P^{-i}) \\ &= \alpha_i(N, v, P^{-j}) - \alpha_j(N, v, P^{-i}) = \alpha_i(N, v, P) - \alpha_j(N, v, P). \end{aligned}$$

Sumando, en ambos lados de esta ecuación, para todo $j \in P_{(i)}$ y usando que ϕ y α son valores particionales, se sigue que $\phi_i(N, v, P) = \alpha_i(N, v, P)$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.3. *(Segunda caracterización axiomática del valor de Aumann–Drèze en juegos monótonos) El valor de Aumann–Drèze α es el único valor particional en $MG(N)$ que satisface las propiedades de jugador nulo (NPP), simetría en las uniones (SWU) y aditividad (ADD).*

Demostración. (Existencia) Debido a que el valor de Shapley Φ satisface eficiencia, la propiedad de jugador nulo, simetría y aditividad, es inmediato que α es un valor particional que satisface NPP, SWU y ADD.

(Unicidad) Sea ϕ un valor particional en $MG(N)$ que satisfaga NPP, SWU y ADD, y sea $P \in P(N)$. Vamos a demostrar que ϕ queda determinado de forma unívoca por estas propiedades. El caso de que el juego sea nulo se resuelve utilizando NPP. Entonces consideremos, en primer lugar, un juego de la forma cu_T, donde u_T es un juego de unanimidad y $c > 0$ es una constante. Para cada $P_k \in P$, la eficiencia local, NPP y SWU implican que, para cada $i \in P_k$,

$$\phi_i(N, cu_T, P) = \begin{cases} c/t & \text{si } T \subset P_k \text{ e } i \in T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a que todo juego $v \in MG(N)$ puede escribirse de forma única como $v = \sum_{T \subset N \,:\, T \neq \emptyset} c_T u_T$ y, además, $v + v^- = v^+$, se aplica dos veces ADD y se demuestra que $\phi(N, v^+, P)$ y $\phi(N, v^-, P)$, y por tanto $\phi(N, v, P)$, quedan determinados. □

4.3. El valor coalicional proporcional de Shapley

En esta sección se hace un breve recorrido por el valor coalicional proporcional de Shapley, introducido en Alonso-Meijide y Carreras (2011). Se trata de un valor coalicional de Shapley[15] para juegos monótonos con una estructura coalicional, que calcula el vector de asignación en dos etapas, de la siguiente manera: en la primera etapa, la suma de lo obtenido por cada miembro de una unión coincide con el valor de Shapley de la unión en el juego cociente; y en la segunda etapa, los jugadores de cada unión se reparten la cantidad anterior de forma proporcional a su valor de Shapley en el juego original (sin estructura coalicional).

Este valor se aparta del enfoque seguido en el resto del capítulo en el sentido de que no es un valor particional (no verifica la propiedad de eficiencia local), como lo son el valor de Aumann–Drèze y el nuevo valor que introduciremos en la siguiente sección, el valor particional proporcional de Shapley. Sin embargo, lo incluimos aquí por considerarlo un antecedente directo de este, y no solo en el nombre: ambos comparten la idea básica de respetar la proporcionalidad.

El dominio del valor coalicional proporcional de Shapley son los juegos monótonos. Alonso-Meijide y Carreras (2011): "We shall restrict our attention to monotonic games, which form a central class of cooperative games. For each finite player set N, the set of monotonic games on N possesses a cone structure, i.e., it is closed under the linear operations $v + w$ and λv for $\lambda \geq 0$, and a lattice structure with respect to the standard operations $v \vee w$ and $v \wedge w$, and it is closed under the passing to quotient games and subgames. The class includes, among others: the null game; all simple games (where values are interpreted as power indices); specifically, all unanimity games, which form a useful basis of the space of all games on each given player set; all nonnegative superadditive games; and hence all nonnegative convex games, where the Shapley value belongs to the core due to convexity. The class shows a satisfactory regular behavior with respect to many notions of the cooperative game theory. For example, any value exclusively based on marginal contributions and/or internal proportionalities is nonnegative on this class; in particular, it is ready to act as a power index on the subclass of simple games".

Sea $P = \{P_1, \ldots, P_{\text{A}}\}$ la partición de N que describe la estructura coalicio-

[15]Véase la Sección 1.2.

nal del problema. Denotamos por M el conjunto $\{1, \ldots, \text{A}\}$, siendo $\text{A} = |P|$. Llamamos *juego cociente* al juego (M, v_P), donde

$$v_P(H) = v(\cup_{h \in H} P_h)$$

para todo $H \subset M$. El juego cociente es, por tanto, el juego inducido por (N, v) cuando se consideran las uniones (clases) de la partición P como jugadores, y el conjunto de las clases, M, como gran coalición.

Definición 4.5. El *valor coalicional proporcional de Shapley* η se define como

$$\eta_i(N, v, P) = \begin{cases} \Phi_k(M, v_P) \dfrac{\Phi_i(N, v)}{\sum_{j \in P_k} \Phi_j(N, v)} & \text{si } \sum_{j \in P_k} \Phi_j(N, v) \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ y todo jugador $i \in N$, siendo $P_k \in P$ la clase a la que i pertenece.

Finalizamos la sección recordando las dos caracterizaciones axiomáticas presentes en Alonso-Meijide y Carreras (2011). Para ello necesitamos antes definir varias propiedades para un valor coalicional ϕ en $MG(N)$, y utilizar la propiedad de simetría en las uniones (SWU), previamente definida para un valor particional en $G(N)$ y que en esta sección entenderemos definida para cualquier valor coalicional en $MG(N)$.

- *No negatividad*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$,

  $$\phi(N, v, P) \geq 0.$$

- *Propiedad de valor coalicional de Shapley*: para todo $v \in MG(N)$,

  $$\phi(N, v, P^n) = \Phi(N, v),$$

  donde P^n denota la partición trivial $\{\{i\} : i \in N\}$, en la que cada jugador de N constituye por si solo una unión.

- *Eficiencia*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$,

  $$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v, P) = v(N).$$

- *Propiedad coalicional fuerte de jugador nulo*: para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in P_k \in P$,

  $$\phi_i(N, v, P) = 0 \quad \text{si, y solo si,} \quad i \text{ es nulo en } v \text{ o } k \text{ es nulo en } v_P.$$

- *Simetría en el juego cociente*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$, si $k, h \in M$ son simétricos en v_P, entonces

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_h} \phi_i(N, v, P).$$

- *Aditividad coalicional ponderada*[16]: para todo $v, w \in MG(N)$ y $P \in P(N)$,

$$\bar{h}^\phi(N, v + w, P) = \bar{h}^\phi(N, v, P) + \bar{h}^\phi(N, w, P),$$

donde, para todo $i \in P_k \in P$ y $v \in MG(N)$,

$$\bar{h}_i^\phi(N, v, P) = \begin{cases} \phi_i(N, v, P) \dfrac{\sum_{j \in P_k} \phi_j(N, v, P^n)}{\phi_k(M, v_P, P^{\text{A}})} & \text{si } k \text{ es no nulo en } v_P, \\ \phi_i(N, v, P^n) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde P^{A} denota la partición trivial $\{\{h\} : h \in M\}$.

- *Propiedad de juego cociente*: para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ y $P_k \in P$,

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \phi_k(M, v_P, P^{\text{A}}).$$

- *Proporcionalidad coalicional en las uniones*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$, si $i, j \in N$ y $P_{(i)} = P_{(j)}$, entonces

$$\phi_i(N, v, P)\phi_j(N, v, P^n) = \phi_j(N, v, P)\phi_i(N, v, P^n).$$

Teorema 4.4. *El valor coalicional proporcional de Shapley es el único valor coalicional en $MG(N)$ que satisface las propiedades de eficiencia, coalicional fuerte de jugador nulo, simetría en las uniones, simetría en el juego cociente y aditividad coalicional ponderada.*

Teorema 4.5. *El valor coalicional proporcional de Shapley es el único valor coalicional de Shapley no negativo en $MG(N)$ que satisface las propiedades de juego cociente y proporcionalidad coalicional en las uniones.*

[16]Esta propiedad recuerda la aditividad clásica para ϕ: la diferencia radica en los pesos asociados.

4.4. El valor particional proporcional de Shapley

Esta sección constituye la parte central del presente capítulo, pues en ella se introduce un nuevo valor particional, el así llamado valor particional proporcional de Shapley, con dominio en los juegos monótonos, se caracteriza axiomáticamente de dos formas distintas y, por último, se comprueba la independencia lógica de los dos sistemas axiomáticos.

Definición 4.6. El *valor particional proporcional de Shapley* es el valor particional de Shapley π definido en $MG(N)$ como

$$\pi_i(N,v,P) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_i(N,v)}{\sum_{j\in P_{(i)}} \Phi_j(N,v)} v(P_{(i)}) & \text{si } i \text{ no es un jugador nulo en } v, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in N$, donde $P_{(i)}$ denota una vez más la unión (clase) de P a la que pertenece el jugador i.

La definición anterior es coherente porque, si i es un jugador no nulo en un juego monótono v, entonces $\Phi_i(N,v) > 0$ y por tanto el denominador nunca es cero.

Nuestro siguiente objetivo consistirá en establecer las propiedades básicas del nuevo valor, que se reflejarán en dos caracterizaciones axiomáticas y serán, posteriormente, discutidas en la Sección 4.6. Empecemos definiendo algunas de estas propiedades (las propiedades de jugador nulo (NPP) y simetría en las uniones (SWU) ya han sido definidas previamente en el capítulo) para un valor particional genérico ϕ en $MG(N)$.

- *No negatividad (NN)*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$,

$$\phi(N,v,P) \geq 0.$$

- *Proporcionalidad en las uniones (PWU)*: para todo $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$, si $i,j \in N$ y $P_{(i)} = P_{(j)}$, entonces,

$$\phi_i(N,v,P)\phi_j(N,v,P^N) = \phi_j(N,v,P)\phi_i(N,v,P^N).$$

- *Aditividad ponderada (WA)*: para todo $v,w \in MG(N)$ y $P \in P(N)$,

$$h^\phi(N,v+w,P) = h^\phi(N,v,P) + h^\phi(N,w,P),$$

donde, para todo $i \in N$ y $v \in MG(N)$,

$$h_i^{\phi}(N,v,P) = \begin{cases} \phi_i(N,v,P)\dfrac{\sum_{j\in P_{(i)}} \phi_j(N,v,P^N)}{v(P_{(i)})} & \text{si } v(P_{(i)}) > 0, \\ \phi_i(N,v,P^N) & \text{si } v(P_{(i)}) = 0. \end{cases}$$

Los siguientes resultados proporcionan caracterizaciones alternativas del nuevo valor.

Teorema 4.6. *(Primera caracterización axiomática del valor particional proporcional de Shapley) El valor particional proporcional de Shapley π es el único valor particional de Shapley en $MG(N)$ que satisface las propiedades de jugador nulo (NPP) y proporcionalidad en las uniones (PWU).*

Demostración. (Existencia) Resulta inmediato comprobar que π es un valor particional de Shapley en $MG(N)$ que satisface NPP[17] y PWU.

(Unicidad) Sea ϕ un valor particional de Shapley en $MG(N)$ que satisface NPP y PWU. Comprobaremos que $\phi = \pi$. Sean $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in N$.

- Si i es un jugador nulo en v, entonces $\phi_i(N,v,P) = 0 = \pi_i(N,v,P)$ debido a que ϕ y π satisfacen NPP.
- Si $P_{(i)} = \{i\}$, entonces $\phi_i(N,v,P) = v(\{i\}) = \pi_i(N,v,P)$ debido a que ϕ y π son valores particionales.
- Si cada $j \in P_{(i)}$, con j distinto de i, es un jugador nulo, entonces $\phi_i(N,v,P) = v(\{i\}) = \pi_i(N,v,P)$ debido a que ϕ y π son valores particionales y satisfacen NPP.
- En cualquier otro caso, consideremos un jugador no nulo $j \in P_{(i)}$. Entonces, debido a que ϕ y π son valores particionales de Shapley y satisfacen PWU,

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i(N,v,P)}{\phi_j(N,v,P)} &= \frac{\Phi_i(N,v)}{\Phi_j(N,v)} \\ &= \frac{\pi_i(N,v,P)}{\pi_j(N,v,P)} \,. \end{aligned}$$

[17] π también satisface una propiedad *fuerte* de jugador nulo (NPP*): $\pi_i(N,v,P) = 0$ si, y solo si, i es nulo en v o $v(P_{(i)}) = 0$.

Esto significa que $\phi_j(N,v,P) = \lambda\pi_j(N,v,P)$ para cada jugador no nulo $j \in P_{(i)}$, donde λ es una constante que no depende de j. Debido a que ϕ y π son valores particionales, es evidente que $\lambda = 1$, y por tanto $\phi_i(N,v,P) = \pi_i(N,v,P)$.

De este modo concluimos que $\phi = \pi$. □

Teorema 4.7. *(Segunda caracterización axiomática del valor particional proporcional de Shapley) El valor particional proporcional de Shapley π es el único valor particional en $MG(N)$ que satisface las propiedades de no negatividad (NN), jugador nulo (NPP), simetría en las uniones (SWU) y aditividad ponderada (WA).*

Demostración. (Existencia) Nuevamente, es inmediato comprobar que π satisface NN, NPP y SWU. Procedemos a continuación a demostrar que también satisface WA. Sean $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in N$.

- Si i es un jugador nulo y $v(P_{(i)}) = 0$, utilizando que π es un valor particional de Shapley obtenemos $h_i^\pi(N,v,P) = \pi_i(N,v,P^N) = 0 = \Phi_i(N,v)$.
- Si i es un jugador nulo y $v(P_{(i)}) > 0$, entonces por NPP $h_i^\pi(N,v,P) = 0 = \Phi_i(N,v)$.
- Si i no es un jugador nulo y $v(P_{(i)}) = 0$, entonces $h_i^\pi(N,v,P) = \pi_i(N,v,P^N) = \Phi_i(N,v)$ porque π es un valor particional de Shapley.
- Finalmente, si i no es un jugador nulo y $v(P_{(i)}) > 0$, por la definición de π, que es un valor particional de Shapley, obtenemos

$$
\begin{aligned}
h_i^\pi(N,v,P) &= \frac{\Phi_i(N,v)}{\sum_{j\in P_{(i)}}\Phi_j(N,v)} v(P_{(i)}) \frac{\sum_{j\in P_{(i)}}\pi_j(N,v,P^N)}{v(P_{(i)})} \\
&= \Phi_i(N,v)\frac{\sum_{j\in P_{(i)}}\Phi_j(N,v)}{\sum_{j\in P_{(i)}}\Phi_j(N,v)} \\
&= \Phi_i(N,v).
\end{aligned}
$$

En resumen, hemos encontrado que $h^\pi(N,v,P) = \Phi(N,v)$ para todo $v \in MG(N)$. Por consiguiente, la relación $h^\pi(N,v+w,P) = h^\pi(N,v,P) + h^\pi(N,w,P)$ para cualesquiera $v,w \in MG(N)$ se sigue de la aditividad de Φ.

(Unicidad) Sea ϕ un valor particional en $MG(N)$ que satisface NN, NPP, SWU y WA. Procedemos a continuación a probar que ϕ está unívocamente determinado. Sean $v \in MG(N)$ y $P \in P(N)$.

- Si $v = 0$ entonces, por NPP, $\phi_i(N, v, P) = 0$ para todo $i \in N$.

- Sea u_T el juego de unanimidad para una coalición no vacía dada $T \subset N$. Sea $v = cu_T$ con $c > 0$ y $T_k = T \cap P_k$ para cada $P_k \in P$. Si $i \notin T$ entonces i es un jugador nulo en v y $\phi_i(N, v, P) = 0$ por NPP. Sea $T_k \neq \emptyset$. Por ser ϕ un valor particional,

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \sum_{i \in T_k} \phi_i(N, v, P) = v(P_k) = cu_T(P_k),$$

y por tanto

$$\sum_{i \in P_k} \phi_i(N, v, P) = \begin{cases} c & \text{si } T \subset P_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a que todos los jugadores en T_k son simétricos en v, por SWU tenemos

$$\phi_i(N, v, P) = \begin{cases} c/t_k & \text{si } i \in T \text{ y } T \subset P_k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $i \in P_k$, donde $t_k = |T_k|$. Lo anterior determina ϕ en este caso.

- Sean $P = P^N$ e $i \in N$. Es evidente que $P_{(i)} = N$. Sea v un juego cualquiera. Si $v(N) = 0$, entonces $h_i^\phi(N, v, P^N) = \phi_i(N, v, P^N)$. Si, por el contrario, $v(N) > 0$, usando que ϕ es un valor particional tenemos

$$\begin{aligned} h_i^\phi(N, v, P^N) &= \phi_i(N, v, P^N) \frac{\sum_{j \in N} \phi_j(N, v, P^N)}{v(N)} \\ &= \phi_i(N, v, P^N). \end{aligned}$$

De WA se sigue que $\phi(N, v + w, P^N) = \phi(N, v, P^N) + \phi(N, w, P^N)$ para todo $v, w \in MG(N)$. Entonces, si consideramos ϕ como función solo de v, una vez $P = P^N$ ha sido fijado, se ve fácilmente que ϕ satisface eficiencia, la propiedad de jugador nulo, simetría y aditividad, y la unicidad del valor de Shapley nos da $\phi(N, v, P^N) = \Phi(N, v)$ para todo $v \in MG(N)$.

- Sean $v = \sum_{\ell=1}^r v_\ell$ en $MG(N)$ e $i \in N$. (a) Si $v(P_{(i)}) = 0$ entonces $\phi_i(N, v, P) = 0$ ya que ϕ es un valor particional que satisface NN. (b) Si $v(P_{(i)}) > 0$, sean $R = \{1, 2, \ldots, r\}$, $R^+ = \{\ell \in R : v_\ell(P_{(i)}) > 0\}$ y $R^0 = R \setminus R^+$, por tanto $R^0 = \{\ell \in R : v_\ell(P_{(i)}) = 0\}$ por la monotonía de v_ℓ. Aplicando WA tenemos

$$\phi_i(N,v,P)\frac{\sum_{j\in P_{(i)}}\phi_j(N,v,P^N)}{v(P_{(i)})} =$$
$$\sum_{\ell\in R^+}\phi_i(N,v_\ell,P)\frac{\sum_{j\in P_{(i)}}\phi_j(N,v_\ell,P^N)}{v_\ell(P_{(i)})} + \sum_{\ell\in R^0}\phi_i(N,v_\ell,P^N).$$

Por el ítem anterior, $\sum_{j\in P_{(i)}}\phi_j(N,v,P^N) = \sum_{j\in P_{(i)}}\Phi_j(N,v)$, que es positivo ya que $v(P_{(i)}) > 0$ implica que algún $j \in P_{(i)}$ es no nulo en v (recuérdese la nota al pie 7). Por tanto, si $\phi_i(N,v_\ell,P)$ está unívocamente determinado para todo $\ell \in R^+$, también lo está $\phi_i(N,v,P)$ sin más que resolver la ecuación anterior.

- Finalmente, sean un juego $v \in MG(N)$ y una estructura coalicional $P \in P(N)$ arbitrarios. Usando $v + v^- = v^+$, la descomposición de v^+ y v^- como combinaciones lineales de juegos de unanimidad y el ítem anterior, se sigue que ϕ está completamente determinado en (N,v^+,P) y (N,v^-,P), y por tanto en (N,v,P).

De donde se sigue la unicidad. □

Para finalizar esta sección, vamos a comprobar la independencia lógica de los sistemas axiomáticos que acabamos de ver en los dos teoremas anteriores.

Comentario 4.1. (Independencia del sistema axiomático del Teorema 4.6)

(i) El valor ϕ^1 definido para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in N$ como

$$\phi_i^1(N,v,P) = \begin{cases} \dfrac{\beta_i(N,v)}{\sum_{j\in P_{(i)}}\beta_j(N,v)}v(P_{(i)}) & \text{si } i \text{ no es nulo en } v, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde β denota el valor de Banzhaf (Owen, 1975), satisface las propiedades de jugador nulo (NPP) y proporcionalidad en las uniones (PWU) y es un valor particional pero no un valor particional de Shapley.

(ii) El valor de Aumann–Drèze α es un valor particional de Shapley sobre $MG(N)$ que satisface la propiedad de jugador nulo (NPP) pero no proporcionalidad en las uniones (PWU).

(iii) Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y consideremos que los jugadores de N están ordenados de acuerdo al orden canónico de los números naturales. Para cada subconjunto no vacío $S \subset N$ podemos hacer referencia a los jugadores mínimo y máximo de S conforme al orden así definido. Sea el valor particional ϕ^2 definido sobre $MG(N)$ de la siguiente manera. Para cada (N, v, P), si $P \neq P^N$ y existe una clase $P_k \in P$ con $|P_k| > 1$ y todos los jugadores $i \in P_k$ son nulos en v, entonces, para cada $i \in P_k$,

$$\phi_i^2(N, v, P) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = \min P_k, \\ 1 & \text{si } i = \max P_k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

mientras que, en cualquier otro caso,

$$\phi_i^2(N, v, P) = \pi_i(N, v, P)$$

para todo $i \in P_k$.

Este valor es un valor particional de Shapley que satisface la propiedad de proporcionalidad en las uniones (PWU) pero no la propiedad de jugador nulo (NPP).

Comentario 4.2. (Independencia del sistema axiomático del Teorema 4.7)

(i) Consideremos, para $N = \{1, 2, 3\}$, el juego w definido por

$$\begin{array}{l} w(\emptyset) = w(\{1\}) = w(\{2\}) = w(\{3\}) = w(\{1,2\}) = 0, \\ w(\{1,3\}) = 1, \ w(\{2,3\}) = w(N) = 2, \\ \text{la partición } Q = \{\{1,2\},\{3\}\}, \\ \text{y los números } \tau_1 = -1, \ \tau_2 = 1, \ \tau_3 = 0. \end{array}$$

Definimos ϕ^3 sobre $MG(N)$ como

$$\phi_i^3(N, v, P) = \begin{cases} \tau_i & \text{si } (v, P) = (w, Q), \\ \pi_i(N, v, P) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ϕ^3 es un valor particional que satisface las propiedades de jugador nulo (NPP), simetría en las uniones (SWU) y aditividad ponderada (WA), pero no satisface no negatividad (NN).

(ii) El valor ϕ^4 definido para todo $v \in MG(N)$, $P \in P(N)$ e $i \in N$ como

$$\phi_i^4(N, v, P) = \frac{v\left(P_{(i)}\right)}{\left|P_{(i)}\right|}$$

es un valor particional que satisface las propiedades de no negatividad (NN), simetría en las uniones (SWU) y aditividad ponderada (WA), pero no la propiedad de jugador nulo (NPP).

(iii) Sea $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un vector de ponderación tal que $\omega_1 \neq \omega_2$ y sea Φ^ω el valor ponderado de Shapley correspondiente (Kalai y Samet, 1987). El valor particional ϕ^5 sobre $MG(N)$ definido como

$$\phi_i^5(N, v, P) = \begin{cases} \Phi^\omega(N, v) & \text{si } n = 2 \text{ y } P = P^N, \\ \pi_i(N, v, P) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

satisface las propiedades de no negatividad (NN), jugador nulo (NPP) y aditividad ponderada (WA), pero no simetría en las uniones (SWU).

(iv) El valor de Aumann–Drèze α es un valor particional sobre $MG(N)$ que satisface las propiedades de no negatividad (NN), jugador nulo (NPP) y simetría en las uniones (SWU), pero no aditividad ponderada (WA).

4.5. Varios ejemplos

Esta sección está dedicada al análisis de diversas aplicaciones potenciales del valor particional proporcional de Shapley a través de sendos ejemplos. Antes de entrar en su estudio, vamos a recordar dos conceptos necesarios para el desarrollo de los ejemplos: juego simple y juego de mayoría ponderada.

Un juego (N, v) se dice *simple* si verifica las siguientes propiedades:

(i) $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$ para todo $S \subset N$.

(ii) $v(N) = 1$.

(iii) v es un juego monótono.

Una coalición S de un juego simple se denomina ganadora si $v(S) = 1$. Una coalición ganadora es minimal si no contiene a ninguna otra coalición ganadora. Un juego simple puede caracterizarse indicando tanto el conjunto de sus coaliciones ganadoras como el conjunto de sus coaliciones minimales ganadoras. Se dice que un juego simple es un juego propio si, dado cualquier par de coaliciones ganadoras S y T, se verifica que $S \cap T \neq \emptyset$. Que un juego simple sea propio es equivalente a que sea superaditivo[18].

[18] Un juego TU (N, v) es superaditivo si, para todo par $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Un juego simple (N, v) se dice de *mayoría ponderada* si existe un conjunto de pesos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ para los jugadores, con $\omega_i \geq 0$ para todo $i \in N$, y un número real positivo q (denominada mayoría del juego) tales que una coalición S es ganadora si, y solo si, $\sum_{i \in S} \omega_i \geq q$. Lo habitual es representar un juego de mayoría ponderada por

$$v \equiv [q; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n].$$

Las definiciones anteriores para juegos (N, v) se trasladan de forma directa a juegos con estructura coalicional (N, v, P).

Con frecuencia, cuando se trabaja con juegos simples se le llama índice de poder a la solución (regla de asignación), debido a las situaciones que modeliza, ya que los juegos simples suelen emplearse como modelos de órganos de decisión donde los acuerdos se toman por votación, y el principal interés del juego es conocer el poder o influencia que tiene un jugador sobre el resultado final del juego. Felsenthal y Machover (1998) y Laruelle y Valenciano (2008) ofrecen una visión general sobre este tema.

Ejemplo 4.3. (El problema de la asignación de centros de asistencia primaria)

Debido a restricciones presupuestarias, el Ministerio de Salud Pública (MPH) de un país necesita limitar la creación de centros de asistencia primaria (PAC) en regiones con poca densidad de población. Se permite que los pueblos de estas regiones se agrupen en *uniones* (disjuntas) con total libertad, pero solo obtendrán un centro de asistencia primaria las uniones con al menos 5000 habitantes. La decisión final será la localización del PAC dentro de cada una de estas uniones. Se situará en el centro de gravedad de los pueblos asociados en la unión, ya que así se minimiza la suma ponderada de las distancias al cuadrado y además es de fácil cálculo; sin embargo, la "masa" que se le atribuirá a cada pueblo será, no su población, sino un parámetro distinto relacionado con esta.

Para fijar las ideas, sean A(0,0), B(3,0), C(4,1), D(3,3) y E(1,3) las localizaciones de los cinco pueblos 1, 2, 3, 4 y 5 de una región (véase la Figura 4.1), y sean 4230, 3160, 2120, 2005 y 1355, respectivamente, sus poblaciones (en total, 12870 habitantes). El Ministerio de Salud Pública toma en consideración el juego de mayoría ponderada

$$v \equiv [5000; 4230, 3160, 2120, 2005, 1355]$$

(un juego simple pero impropio, es decir, no superaditivo) porque las uniones que obtendrían un centro de atención primaria constituyen, precisamente, la familia de las coaliciones ganadoras en v:

$$
\begin{aligned}
W(v) &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4,5\},\\
&\quad \text{y superconjuntos}\}.
\end{aligned}
$$

Debido a que el Ministerio de Salud Pública no considera que sean significativas las diferencias pequeñas entre poblaciones, a la hora de localizar los centros de atención primaria prefiere usar parámetros proporcionales al valor de Shapley de este juego, que desecha diferencias irrelevantes de pesos y viene dado por

$$
\Phi(N,v) = \frac{1}{12}(4,3,2,2,1).
$$

Sin embargo, en última instancia todo va a depender de como se asocien los pueblos en uniones. Por ese motivo, el MPH necesita utilizar algún valor coalicional que indique los pesos que se van a utilizar para calcular los centros de gravedad. Una vez las uniones se han formado, el proceso finaliza ya que el MPH no está interesado en una negociación "a un nivel superior", y por tanto no parece adecuado utilizar el valor de Owen en este problema. La alternativa consiste en utilizar, o bien el valor de Aumann–Drèze o el valor particional proporcional de Shapley, introducido en la sección anterior.

Requisitos tales como la reducción al valor de Shapley cuando la partición es $P = P^N$, la propiedad de jugador nulo, la simetría en las uniones y la eficiencia local tienen pleno sentido en este contexto y son fácilmente interpretables, pero son satisfechos por ambos valores. En su lugar, la propiedad que el Ministerio de Salud Pública considerará crucial es la proporcionalidad en las uniones, y esto da lugar a la elección del valor particional proporcional de Shapley. La razón de esto es que, debido a un criterio de eficiencia social a la hora de calcular los centros de gravedad de las uniones, el MPH debe respetar la prioridad de los pueblos más grandes y en consecuencia las diferencias relevantes de población entre los pueblos involucrados, que vienen dados por el valor de Shapley de v.

Si, por ejemplo, se aplicase el valor de Aumann–Drèze a la partición

$$
P = \{\{1,5\},\{2,3,4\}\},
$$

este asignaría el mismo valor $1/2$ a los pueblos 1 y 5, y por tanto un centro de atención primaria en el punto medio del segmento que los une, a pesar de la gran diferencia que tienen en población y en el valor de Shapley.

Apliquemos por tanto el valor particional proporcional de Shapley. Entre 52 posibles particiones de los pueblos, 6 particiones implican que no hay ningun PAC, 36 dan lugar a un PAC, y los 10 restantes dan lugar a dos PAC. Veamos algunos ejemplos:

- Si $P = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, no se asigna ningún PAC.
- Si $P = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5\}\}$, se asigna un PAC a la unión $\{1, 4\}$ en el punto $G_{14} = (1, 1)$.
- Si $P = \{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$, entonces se asignan dos PAC: a la unión union $\{1, 5\}$ en el punto G_{15} =(1/5, 3/5) y a la unión $\{2, 3, 4\}$ en el punto G_{234} =(23/7, 8/7) (véase la Figura 4.1).

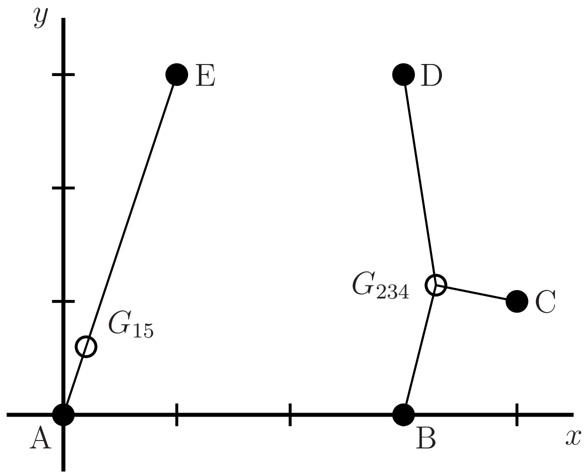

Figura 4.1: Localización de centros de asistencia primaria

Ejemplo 4.4. (El problema del reparto de fondos públicos)

En una región dada hay un sector industrial que consiste en un conjunto N de empresas. El gobierno regional desea dar apoyo financiero a proyectos de colaboración entre las empresas, cada una de las cuales puede optar por permanecer aislada o intervenir en, a lo sumo, un proyecto. En consecuencia, el conjunto de proyectos viene dado por (es decir, es equivalente a) una partición P de N.

Las capacidades individuales y las sinergias derivadas de las colaboraciones entre las empresas han sido evaluadas por el gobierno en términos de beneficios esperados utilizando un juego cooperativo (N, v). Por tanto, el valor de Shapley $\Phi(N, v)$ describe la importancia relativa de cada empresa del sector al tener en consideración todas las posibles colaboraciones.

Cada proyecto P_k recibirá, para ser repartido entre sus participantes, $v(P_k)$. Los proyectos no pueden combinarse entre ellos para dar lugar a "superproyectos", motivo por el cual la utilización del valor de Owen no parece adecuada en este problema. La alternativa consiste en utilizar o bien el valor de Aumann–Drèze o el valor particional proporcional de Shapley.

La regulación gubernamental establece que el reparto de fondos entre los miembros de un proyecto debe tener en cuenta la relevancia de cada miembro en el sector. La forma más sencilla de hacer esto consiste en repartir el dinero destinado a un proyecto de forma proporcional al valor de Shapley $\Phi(N,v)$ de las empresas involucradas. Por tanto, el valor particional proporcional de Shapley parece ser la opción adecuada.

Por ejemplo, sea $n = 4$ y asumamos que las capacidades individuales (expresadas en miles de euros) vienen dadas por

$$v(\{1\}) = 36000, \quad v(\{2\}) = v(\{3\}) = 24000, \quad v(\{4\}) = 18000.$$

El juego v se completa de la siguiente manera: si $|S| \geq 2$ entonces

$$v(S) = (1 + \sum_{i \in S} \sigma_i) \sum_{i \in S} v(\{i\}),$$

donde $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.20$ y $\sigma_4 = 0.05$ son los coeficientes de sinergias. Por ejemplo, $v(N) = 163200$. El valor de Shapley de este juego es

$$\Phi(N,v) = (53975, 41125, 41125, 26975).$$

Asumamos que se forma la partición $P = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$. Entonces, los fondos que hay que repartir son $v(P_1) = 81000$ y $v(P_2) = 52500$. El valor particional proporcional de Shapley da lugar a la asignación

$$\pi_1(N,v,P) \approx 45972, \quad \pi_2(N,v,P) \approx 35028,$$

$$\pi_3(N,v,P) \approx 31704, \quad \pi_4(N,v,P) \approx 20796,$$

que mantiene dentro de cada unión la proporcionalidad dada por $\Phi(N,v)$. A efectos comparativos, el valor de Aumann–Drèze hubiese producido la asignación

$$\alpha_1(N,v,P) = 46500, \quad \alpha_2(N,v,P) = 34500,$$

$$\alpha_3(N,v,P) = 29250, \quad \alpha_4(N,v,P) = 23250.$$

Queremos recalcar que el valor particional proporcional de Shapley refleja los efectos de los coeficientes de sinergias en el sector como un todo, mientras que el valor de Aumann–Drèze solo tiene en consideración sus efectos dentro de cada unión.

Ejemplo 4.5. (Juegos simples e índices de poder)

Los valores (y los valores coalicionales en presencia de una estructura coalicional) son a menudo utilizados como índices de poder al aplicarlos en juegos simples. Estos juegos forman una subclase $SG(N)$ de los juegos monótonos y son útiles para describir y analizar procedimientos de votación binaria. A continuación, comentaremos un poco las posibilidades de actuar como índices de poder del valor de Aumann–Drèze y del valor particional proporcional de Shapley.

En primer lugar, destaquemos que las caracterizaciones axiomáticas del valor particional proporcional de Shapley establecidas en la sección anterior pueden ser trasladadas con facilidad a la subclase $SG(N)$, lo cual refuerza las posibilidades de este valor como índice de poder. En efecto, el Teorema 4.6 (enunciado y demostración) puede aplicarse a la clase $SG(N)$ sin ningún cambio si se restringen los axiomas a $SG(N)$. En el caso del Teorema 4.7, únicamente la propiedad de aditividad ponderada (WA) no tiene sentido en la clase de los juegos simples. En el caso del valor de Shapley, Dubey (1975) reemplazó con éxito la propiedad de aditividad (ADD) por la propiedad de transferencia:

$$\Phi(N, v \vee w) + \Phi(N, v \wedge w) = \Phi(N, v) + \Phi(N, w)$$

para todo $v, w \in SG(N)$[19]. En nuestro caso solo es necesario reemplazar la aditividad ponderada (WA) por una propiedad de "transferencia ponderada". Por supuesto, también son necesarias pequeñas modificaciones en la demostración (omitimos los detalles).

Sea (N, v) un juego simple propio (es decir, superaditivo). Recordemos que esto significa que no hay coaliciones ganadoras disjuntas. Veamos algunas reglas generales válidas para el valor de Aumann–Drèze α, dada una estructura coalicional P:

(a) Si P_k es una coalición minimal ganadora en v, entonces $\alpha(N, v, P)$ asigna $1/|P_k|$ a cada miembro de P_k y 0 al resto de jugadores.

(b) Si P_k es una coalición ganadora pero no minimal ganadora, entonces la suma de las asignaciones de α a los miembros de P_k es 1, pero el reparto depende de las coaliciones minimales ganadoras incluidas en P_k.

(c) Si P_k no es una coalición ganadora, entonces todos sus miembros reciben 0.

[19] $v \vee w$ es el juego máximo de v, w, definido como $v \vee w(S) = \text{máx}\{v(S), w(S)\}$ para todo $S \subset N$, y $v \wedge w$ es el juego mínimo.

Solamente la propiedad (c) es cierta para el valor particional proporcional de Shapley π. El siguiente ejemplo numérico ilustra estas aseveraciones.

Consideremos el juego de mayoría ponderada

$$v \equiv [3; 2, 1, 1, 1].$$

La familia de coaliciones minimales ganadoras es

$$W^m(v) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\}$$

y el valor de Shapley

$$\Phi(N, v) = (3/6, 1/6, 1/6, 1/6).$$

En el Cuadro 4.1 se estudian algunas particiones.

partición P	$\alpha(N, v, P)$	$\pi(N, v, P)$
$\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$	$(1/2, 1/2, 0, 0)$	$(3/4, 1/4, 0, 0)$
$\{\{1\}, \{2,3,4\}\}$	$(0, 1/3, 1/3, 1/3)$	$(0, 1/3, 1/3, 1/3)$
$\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$	$(4/6, 1/6, 1/6, 0)$	$(3/5, 1/5, 1/5, 0)$
$\{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$	$(0, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 0)$

Cuadro 4.1: α y π en el juego de mayoría ponderada $v \equiv [3; 2, 1, 1, 1]$

Sea ahora (N, v) un juego simple impropio. Las reglas (a), (b) y (c) anteriores siguen siendo ciertas para el valor de Aumann–Drèze α si en la partición hay una sola coalición ganadora (minimal o no), o no hay ninguna. Una nueva regla dice:

(d) Si dos o más coaliciones ganadoras son uniones de P, entonces la suma de las asignaciones de α a los miembros de cada una de las uniones que son coaliciones ganadoras es 1.

Esta es la principal diferencia con el caso propio. Aquí, el valor particional proporcional de Shapley π satisface (c) y (d). Un nuevo ejemplo numérico ilustra lo que acabamos de decir.

Consideremos ahora

$$v \equiv [5; 4, 3, 2, 2, 1],$$

el juego del Ejemplo 4.3. La familia de coaliciones minimales ganadoras es

$$W^m(v) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4,5\}\}$$

y el valor de Shapley

$$\Phi(N, v) = \frac{1}{12}(4, 3, 2, 2, 1).$$

Pueden verse algunas particiones en el Cuadro 4.2.

partición P	$\alpha(N, v, P)$	$\pi(N, v, P)$
$\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$	$(1/6)(3,3,2,2,2)$	$(1/35)(20,15,14,14,7)$
$\{\{1,2,3,4\},\{5\}\}$	$(1/6)(2,2,1,1,0)$	$(1/11)(4,3,2,2,0)$
$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$(1/3)(1,1,1,0,0)$	$(1/9)(4,3,2,0,0)$
$\{\{1,5\},\{2,3,4\}\}$	$(1/6)(3,4,1,1,3)$	$(1/35)(28,15,10,10,7)$
$\{\{1,3\},\{2,4\},\{5\}\}$	$(1/2)(1,1,1,1,0)$	$(1/15)(10,9,5,6,0)$

Cuadro 4.2: α y π en el juego de mayoría ponderada $v \equiv [5; 4, 3, 2, 2, 1]$

Nuestra conclusión es que el valor de Aumann–Drèze no es un índice de poder adecuado: ignora demasiada información aportada por el juego original (N, v) y acaba siendo demasiado drástico en sus asignaciones. Por el contrario, sostenemos que el valor particional proporcional de Shapley π, precisamente debido a la propiedad de proporcionalidad en las uniones (PWU), es más interesante como una medida del poder coalicional. En efecto, debido a PWU, todas las relaciones de poder establecidas en el juego original se mantienen, entre jugadores de la misma unión, después del proceso de formación de la estructura coalicional. En nuestra opinión esta debe ser una propiedad satisfactoria para los políticos, no demasiado amigos de cambios radicales o problemáticos.

Por ejemplo, en el Cuadro 4.1, no parece demasiado razonable que con la partición $P = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ el jugador 1 obtenga, a través de α, el mismo poder coalicional que el jugador 2.

El mismo reparto igualitario del poder resultaría si

$$v \equiv [136; 130, 50, 50, 30, 10]$$

representa un órgano parlamentario y $P = \{\{1, 2\}, \dots\}$, a pesar de que

$$W^m(v) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

y

$$\Phi(N, v) = \frac{1}{10}(6, 1, 1, 1, 1).$$

El valor de Aumann–Drèze asigna, en este problema,

$$\alpha(N, v, P) = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0)$$

mientras que el valor particional proporcional de Shapley da lugar al siguiente reparto

$$\pi(N, v, P) = \frac{1}{7}(6, 1, 0, 0, 0).$$

Formalmente, sean i, j dos jugadores cualesquiera con pesos ω_i, ω_j. Es bien conocido que si $\omega_i \geq \omega_j$ entonces $\Phi_i(N, v) \geq \Phi_j(N, v)$. En nuestro contexto, dada una estructura coalicional, y supuesto que $P_{(i)} = P_{(j)}$, tenemos: si $\Phi_i(N, v) \geq \Phi_j(N, v)$, entonces $\alpha_i(N, v, P) \geq \alpha_j(N, v, P)$ y $\pi_i(N, v, P) \geq \pi_j(N, v, P)$, pero la característica más interesante es que, si $\Phi_i(N, v) > \Phi_j(N, v)$ y, además, $P_{(i)}$ es ganadora en v, entonces $\pi_i(N, v, P) > \pi_j(N, v, P)$, mientras que puede suceder que $\alpha_i(N, v, P) = \alpha_j(N, v, P)$. Y esto es cierto incluso en juegos simples que no sean juegos de mayoría ponderada.

Ejemplo 4.6. (Extensión del nuevo valor a estructuras coalicionales con niveles)

Una *estructura coalicional con niveles* en N es una secuencia de estructuras coalicionales

$$\mathcal{P} = \{P^{(0)}, P^{(1)}, \ldots, P^{(r)}\},$$

donde $P^{(0)} = P^N$ y $r \geq 1$ (por tanto incluye como caso particular la estructura coalicional (sin niveles) que hemos estudiado hasta ahora, que se da cuando $r = 1$). Se requiere que, para cada h con $0 \leq h < r$, $P^{(h+1)}$ es un refinamiento de $P^{(h)}$, esto es, cada miembro de $P^{(h)}$ pertenece a $P^{(h+1)}$ o se divide en partes (subconjuntos) más pequeñas pertenecientes a $P^{(h+1)}$. La extensión del valor de Owen a este nuevo contexto fue tratada Owen (1977) y Winter (1989). Nos gustaría ahora discutir la posibilidad de extender la noción de valor particional proporcional de Shapley a este concepto, más amplio, de estructura coalicional. Para lograr este objetivo, definimos un nuevo valor de forma inductiva y coherente, el *valor con niveles particional proporcional* $\pi^{\mathcal{P}}$, que acturará en cada nivel $h = 1, 2, \ldots, r$ de la siguiente manera. Si $i \in N$, $1 \leq h \leq r$, y $P^{(h)}_{(i)}$ es la unión a la que pertenece el jugador i en $P^{(h)}$,

$$\pi_i^{\mathcal{P}}(N, v, P^{(h)}) = \begin{cases} \dfrac{\pi_i^{\mathcal{P}}(N, v, P^{(h-1)})}{\displaystyle\sum_{j \in P^{(h)}_{(i)}} \pi_j^{\mathcal{P}}(N, v, P^{(h-1)})} v(P^{(h)}_{(i)}) & \text{si } i \text{ no es nulo en } v, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí, por coherencia entendemos que $\pi^{\mathcal{P}}(N, v, P^{(1)}) = \pi(N, v, P^{(1)})$.

Un ejemplo numérico nos servirá para ilustrar el procedimiento. Consideremos el juego de mayoría ponderada

$$v \equiv [4; 5, 4, 3, 2, 1, 1],$$

que podemos representar a través de la familia de coaliciones minimales ganadoras

$$W^m(v) = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5, 6\}\}.$$

Y sea

$$\mathcal{P} = \{P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}\}$$

con

$$P^{(0)} = P^N, \quad P^{(1)} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}, \quad P^{(2)} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$$

la estructura coalicional con niveles que completa la definición del juego con estructura coalicional con niveles $(N, v, P^{(h)})$. Tenemos entonces que $\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\} \in W(v)$, es decir, son coaliciones ganadoras, pero $\{6\} \notin W(v)$, no es una coalición ganadora. Los resultados de aplicar el valor con niveles $\pi^{\mathcal{P}}$ se muestran en la Figura 4.2.

Una gran diferencia entre el valor de Owen, por un lado, y los valores de Aumann–Drèze y particional proporcional de Shapley, por el otro, es que la asignación de estos dos últimos valores, dentro de cada unión, no se ve afectada por ningún cambio que pueda producirse en las otras uniones.

4.6. Discusión

En la Sección 4.2 se han visto dos caracterizaciones axiomáticas del valor de Aumann–Drèze en juegos monótonos utilizando dos propiedades clásicas: aditividad (ADD) y contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU). En esta sección vamos a ver, en primer lugar, contraejemplos que muestran que el valor particional proporcional de Shapley π no satisface estas dos propiedades y que el valor de Aumann–Drèze α no satisface las propiedades de proporcionalidad en las uniones (PWU), aditividad ponderada (WA) y la propiedad fuerte de jugador nulo (NPP*). En segundo lugar, un resumen de todas las propiedades consideradas en este capítulo, desglosadas en el Cuadro 4.3. Y por último, se incluye un comentario sobre los valores de Casajus (Casajus, 2009) y Wiese (Wiese, 2007).

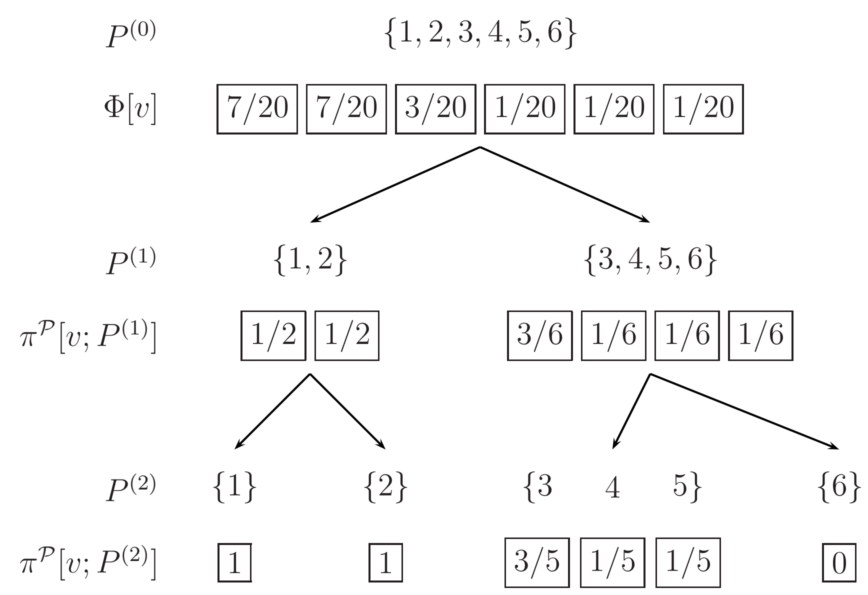

Figura 4.2: Estructura coalicional con niveles

Comentario 4.3. (Propiedades que diferencian el valor particional proporcional de Shapley (π) y el valor de Aumann–Drèze (α))

Sean $n = 3$, $P = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, y $v, w \in MG(N)$ los juegos del guante definidos por

$$\begin{array}{l} v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(N) = 1, \text{ y } v(S) = 0 \text{ en otro caso, y} \\ w(\{1\}) = w(\{1,2\}) = w(\{1,3\}) = w(\{2,3\}) = 1, w(N) = 2, \\ \text{y } w(S) = 0 \text{ en otro caso.} \end{array}$$

(i) π no satisface la propiedad de aditividad (ADD). En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(N, v, P) + \pi_1(N, w, P) & = & 4/5 + 2/3 \\ & \neq & 10/7 = \pi_1(N, v + w, P). \end{array}$$

(ii) π no satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU). En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(N, v, P) & - & \pi_1(N, v, P^{-2}) = 4/5 - 0 \\ & \neq & 1/5 - 0 = \pi_2(N, v, P) - \pi_2(N, v, P^{-1}). \end{array}$$

(iii) α no satisface la propiedad fuerte de jugador nulo (NPP*) (véase pie de página número 17). El jugador 2 no es nulo en w y $w(P_{(2)}) \neq 0$ pero $\alpha_2(N, w, P) = 0$.

(iv) α no satisface la propiedad de proporcionalidad en las uniones (PWU). Tenemos que

$$\alpha(N,v,P^N) = \Phi(N,v) = (2/3, 1/6, 1/6)$$

y

$$\alpha(N,v,P) = (1/2, 1/2, 0),$$

por tanto

$$\begin{aligned} \alpha_1(N,v,P)\alpha_2(N,v,P^N) &= 1/12 \\ &\neq 1/3 = \alpha_2(N,v,P)\alpha_1(N,v,P^N). \end{aligned}$$

(v) α no satisface la propiedad de aditividad ponderada (WA). Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} h_1^\alpha(N,v,P) + h_1^\alpha(N,w,P) &= 5/12 + 3/2 \\ &\neq 7/4 = h_1^\alpha(N,v+w,P). \end{aligned}$$

Comentario 4.4. (Resumen de las propiedades consideradas)

El Cuadro 4.3 muestra una comparación entre las propiedades satisfechas y no satisfechas por el valor de Aumann–Drèze α y el valor particional proporcional de Shapley π.

Comentario 4.5. (Sobre los valores de Casajus y Wiese)

El *valor de Casajus* (Casajus, 2009) se define, para cada jugador $i \in P_k$, con $P_k \in P$, como

$$\Phi_i(N,v) + \frac{1}{p_k}\left(v(P_k) - \sum_{j\in P_k} \Phi_j(N,v)\right),$$

para todo $v \in G(N)$, $P \in P(N)$, donde $p_k = |P_k|$ es el número de jugadores en la clase P_k.

Al igual que sucede con el valor particional proporcional de Shapley π, Casajus (2009) incorpora las opciones externas de los jugadores en términos del valor de Shapley del juego original (aquel en el que aun no se ha definido una estructura coalicional). La diferencia entre los dos enfoques radica en que el reajuste interno (dentro de cada clase) del valor de Casajus consiste en la distribución equitativa de los excesos, mientras que nuestro método

propiedades	valor A–D α	valor PPS π
eficiencia	no	no
eficiencia local (valor particional)	sí	sí
valor particional de Shapley (P^N)	sí	sí
no negatividad (NN)	sí	sí
propiedad de jugador nulo (NPP)	sí	sí
propiedad fuerte de jugador nulo (NPP*)	no	sí
simetría en las uniones (SWU)	sí	sí
contribuciones equilibradas en las uniones (BCWU)	sí	no
proporcionalidad en las uniones (PWU)	no	sí
aditividad (ADD)	sí	no
aditividad ponderada (WA)	no	sí

Cuadro 4.3: Comparación entre las propiedades de α y π

está basado en mantener la proporcionalidad (es decir, los ratios del valor de Shapley). Creemos que mantener la proporcionalidad es la práctica habitual en el mundo empresarial y financiero; no obstante, no deja de ser cierto que la regla del reparto equitativo de los excesos que usa el valor de Casajus también surge, por ejemplo, cuando se traslada el valor de Shapley a problemas de negociación pura (Carreras y Owen, 2011). El valor coalicional en dos etapas de Shapley (Kamijo, 2009), estudiado en el Capítulo 1, también realiza una distribución equitativa de los excesos, aunque en este caso en el contexto de los valores coalicionales de Shapley.

Wiese (2007) define su "outside–option value" de la siguiente manera. Dada una permutación cualquiera de los jugadores, cada uno de ellos recibe en pago su contribución marginal al conjunto de sus predecesores, con una única excepción: en cada clase (unión), el último de sus miembros, en el orden que determina la permutación, obtiene la diferencia entre el beneficio (o pérdida) de la clase y la suma de las asignaciones de los restantes miembros de la clase (que son, por tanto, sus predecesores en la permutación). A continuación, todas las permutaciones son consideradas equiprobables y cada jugador recibe el pago esperado bajo este esquema aleatorio. Señalemos que este valor no satisface la propiedad de jugador nulo y permite pagos negativos incluso cuando nos restringimos a la clase de los juegos monótonos.

Tutic (2010) ofrece una comparativa entre los valores de Aumann–Drèze, Casajus y Wiese en términos de la propiedad de estabilidad, mostrando que el valor de Casajus garantiza una partición estable[20] y presentando sendos contraejemplos para los valores de Aumann–Drèze y de Wiese.

Para obtener una mejor visión de conjunto, hemos aplicado los valores de Casajus y de Wiese al Ejemplo 4.4, donde $P = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $v(\{1,2\}) = 81000$ y $v(\{3,4\}\}) = 52500$, y hemos añadido los valores de Shapley, de Aumann–Drèze y particional proporcional de Shapley. Podemos ver los resultados en el Cuadro 4.4. Todos los valores con estructura coalicional satisfacen la eficiencia local. Nuestra opinión es que, dependiendo del contexto, cualquiera de ellos puede ser la regla de asignación más adecuada.

jugadores	1	2	3	4	$\Delta(1,2)$	$\Delta(3,4)$
Shapley	53975	41125	41125	26975	12850	14150
Casajus	46925	34075	33325	19175	12850	14150
Wiese	46800	34200	32075	20425	12600	11650
PPS ($\approx$)	45972	35028	31704	20796	10944	10908
A–D	46500	34500	29250	23250	12000	6000

Cuadro 4.4: Comparación de los valores en el Ejemplo 4.4

Los resultados en este ejemplo no difieren mucho de un valor con estructura coalicional a otro. Sin embargo, si nos fijamos en las diferencias de las asignaciones dentro de cada clase (que están calculadas en las dos últimas columnas del cuadro) de los valores de Casajus, de Wiese y del valor particional proporcional de Shapley, podemos comprobar que las diferencias más pequeñas se dan en este último valor, lo cual sugiere un cierto grado de solidaridad. Por el contrario, el valor de Casajus discrimina claramente entre los jugadores de la misma clase, y sus diferencias (las mayores de todas) coinciden necesariamente con las del valor de Shapley, mientras que el valor de Wiese permanece en una posición intermedia. El valor de Aumann–Drèze da lugar a una gran diferencia entre las asignaciones de los dos jugadores de la primera clase y una diferencia muy pequeña en la segunda clase.

[20] Un valor garantiza una partición estable si en todo juego existe una estructura coalicional tal que ningún subconjunto de jugadores tiene un incentivo para abandonarla y formar una coalición por si mismos.

4.7. Comentarios finales

En este capítulo se ha introducido un nuevo valor coalicional, llamado valor particional proporcional de Shapley, se ha caracterizado axiomáticamente y se ha motivado su potencial utilidad a través de varios ejemplos. Además, se ha comparado con los valores de Aumann–Drèze, de Casajus y de Wiese.

Creemos que sería interesante estudiar las posibilidades de este nuevo valor desde el punto de vista de la formación de coaliciones, y estudiar si siempre existe una partición que sea estable (véase la nota al pie 20). Asimismo, se puede profundizar en su estudio comparativo con los otros valores particionales. Y por último, y enlazando con el Capítulo 3, analizar si el valor particional proporcional de Shapley se puede obtener a partir de un problema de optimización y ser, en consecuencia, clasificable como un valor mínimo cuadrático.

Conclusiones

En esta memoria se han estudiado diversas cuestiones relativas a la teoría del valor en juegos cooperativos con utilidad transferible (abreviadamente juegos TU) en los que existe una estructura coalicional, que es una estructura exógena, en concreto una partición del conjunto de jugadores, que condiciona la negociación que se lleva a cabo entre ellos.

La teoría del valor en juegos TU se inicia con un trabajo de Shapley de 1953, en el que se introduce el valor que lleva su nombre, que propone para cada juego TU un reparto ecuánime de los beneficios generados por la cooperación de los jugadores. El valor de Shapley ha generado una amplia literatura y ha tenido una notable influencia en las ciencias sociales. Los dos trabajos pioneros en la teoría del valor en juegos TU con una estructura coalicional llevan la firma de Aumann y Drèze (1974) y de Owen (1977); en ellos se presentan sendas modificaciones del valor de Shapley: los valores de Aumann–Drèze y de Owen. En estos trabajos se incorpora la información aportada por las clases que conforman la estructura coalicional de dos maneras radicalmente distintas. En el segundo se entiende que la negociación entre los jugadores se produce a dos niveles, entre las clases y en el interior de estas, mientras que en el valor de Aumann–Drèze solo se contempla la negociación dentro de las clases.

Esta memoria está dedicada a los valores coalicionales (valores definidos sobre juegos con una estructura coalicional) y se articula en torno a las ideas que subyacen en los valores de Owen y de Aumann–Drèze. Las estructuras coalicionales surgen de forma natural en multitud de problemas reales, algo que creemos se ha puesto de manifiesto en los capítulos anteriores, y esto convierte a los valores coalicionales en un campo de estudio muy interesante, en el que ya se han hecho aportaciones muy importantes pero en el que aun quedan muchos aspectos por explorar.

Vamos a dedicar esta parte final de la memoria a recapitular los temas tratados en la misma, ver sus conclusiones y, por último, exponer algunas cuestiones de las muchas que siguen abiertas.

Los dos primeros capítulos se han dedicado a problemas de asignación de costes, en los que el objetivo es proponer una asignación de los costes de un proyecto entre los agentes involucrados. La asignación debe ser eficiente (hay que asumir la totalidad del coste del proyecto) y debe incorporar las distintas necesidades de los agentes. A pesar de que los valores coalicionales se han aplicado de forma extensa, por ejemplo, en el contexto de los problemas de votación, muy pocos trabajos los han aplicado en problemas de asignación de costes.

El principal objetivo del primer capítulo ha sido el estudio de los valores coalicionales de Shapley eficientes, que siguen el enfoque del valor de Owen, y creemos tienen potencialidad para su empleo en problemas de asignación de costes, y se ha examinado su aplicación a los juegos del aeropuerto, que conforman una colección clásica de problemas de asignación de costes en los que las estructuras coalicionales surgen de forma natural. Se han obtenido expresiones sencillas de calcular de estos valores en los juegos del aeropuerto y se han aplicado a un ejemplo con datos reales que ha permitido su estudio comparativo. Esto ha puesto de manifiesto el interés que los valores coalicionales tienen en el contexto de los problemas de asignación de costes, a pesar de lo escasa que es la literatura en este tema, y los muchos problemas que aun hay abiertos.

Hay otros valores coalicionales (no necesariamente valores coalicionales de Shapley) que se pueden utilizar en los juegos del aeropuerto. Podemos citar, por ejemplo, Casas-Méndez *et al.* (2003), trabajo en el que se estudia el τ-valor (Tijs, 1981) en este contexto; y Alonso-Meijide *et al.* (2003), donde se propone un nuevo valor coalicional que constituye una extensión del valor introducido en Aadland y Kolpin (1998) para problemas de asignación de costes. Creemos que puede ser interesante un estudio comparativo entre estos valores y un análisis de sus propiedades en el contexto de los juegos del aeropuerto. También son dignos de mención los valores coalicionales de Shapley no eficientes, como pueden ser los valores introducidos en Amer *et al.* (2002) y Alonso-Meijide *et al.* (2014b). Aunque no los consideramos apropiados para abordar, de forma directa, la solución de problemas de asignación de costes, creemos que sería interesante el estudio de extensiones normalizadas de estos valores, para conseguir que sean eficientes, en los juegos del aeropuerto.

Las estructuras coalicionales también constituyen instrumentos de uso natural en otras colecciones de problemas de asignación de costes, como pueden ser los juegos de infraestructuras o los juegos de inventario, por ejemplo. La clase de los juegos de costes de infraestructuras, que pueden describirse como la suma de un juego del aeropuerto y un juego de mantenimiento, fue introducida en 2000 para tratar un problema que surgió con la reorganización del sistema ferroviario en Europa en esa época. El Capítulo 2 está dedicado al estudio de los juegos de mantenimiento en presencia de una estructura coalicional. Aunque la utilización del valor de Shapley para abordar este problema (sin estructura coalicional) ya ha sido estudiada en la literatura, hasta ahora apenas se había tratado el uso del valor de Owen. En este capítulo se ha estudiado la utilización del valor de Owen para los juegos de costes de mantenimiento, se ha propuesto una expresión sencilla de calcular del valor de Owen en esta colección de problemas y se ha aplicado a un ejemplo de costes de mantenimiento de una infraestructura ferroviaria.

Creemos que los juegos de costes de mantenimiento constituyen una colección interesante de problemas que apenas han recibido atención en la literatura. Así, solo se ha estudiado el valor de Shapley, a pesar de que el valor solidario, por poner un ejemplo, parece especialmente atractivo en este contexto. E, incorporando una estructura coalicional, puede ser interesante estudiar, no solo el valor de Owen, sino también los demás valores coalicionales de Shapley eficientes que se han tratado en el Capítulo 1. Y, además, también sería interesante la comparación entre estos valores coalicionales de Shapley y otros valores coalicionales que no sean valores coalicionales de Shapley, como por ejemplo los antes citados.

Se ha empezado el Capítulo 3 con una visión de conjunto del valor de Owen, aunque sin ambicionar en modo alguno ser exhaustivos, centrándonos en sus muchas caracterizaciones axiomáticas y en su cálculo utilizando la extensión multilineal del juego. En 1988 se abordó el cálculo del valor de Shapley como solución de un problema de optimización cuadrática con restricciones lineales. Diez años más tarde, se dio el nombre genérico de valor mínimo cuadrático a toda solución del problema anterior. Nuestro principal objetivo en este capítulo ha sido estudiar el valor de Owen desde esta perspectiva, aproximando un juego genérico mediante la utilización de funciones lineales (en nuestro contexto juegos inesenciales), procedimiento que conduce de forma natural al planteamiento de un problema de optimización. Así, se han estudiado los valores mínimo cuadráticos compatibles con una estructura coalicional y se ha comprobado que el valor de Owen puede ser calculado como solución del problema de optimización cuadrática con restricciones lineales asociado. Adicionalmente, se ha podido utilizar el mismo problema para el cálculo del valor coalicional simétrico de Banzhaf.

Creemos que es interesante el enfoque alternativo que aporta el problema de optimización a los valores mínimo cuadráticos y que, por tanto, es merecedor de un estudio más en profundidad del que hasta ahora ha recibido en la literatura. Y, en presencia de una estructura coalicional, el estudio de los valores mínimo cuadráticos compatibles solo se ha iniciado. Habría que estudiar, por ejemplo, si valores ya clásicos como el valor de Banzhaf–Owen (Owen, 1981) puede ser representado a través de un problema de optimización, y de forma más general, caracterizar los valores coalicionales que son valores mínimo cuadráticos.

En el Capítulo 4, y último, se ha introducido el valor particional proporcional de Shapley, un nuevo valor con dominio en los juegos TU monótonos con una estructura coalicional que sigue el enfoque del valor de Aumann–Drèze pero que, a diferencia de este, incorpora las opciones externas de los jugadores. Se han estudiado sus propiedades, comparándolas con las del valor de Aumann–Drèze, analizado sus respectivas caracterizaciones axiomáticas y se ha completado el trabajo con distintos ejemplos que permiten entender mejor sus potenciales campos de aplicación.

Creemos que una ampliación interesante de este trabajo sería estudiar las posibilidades de este nuevo valor desde el punto de vista de la formación de coaliciones, y estudiar si siempre existe una partición que sea estable (véase la nota al pie 20 del Capítulo 4). Asimismo, se puede profundizar en su estudio comparativo con otros valores particionales. Y, por último, analizar si el valor particional proporcional de Shapley se puede obtener a partir de un problema de optimización y ser, en consecuencia, clasificable como un valor mínimo cuadrático.

BIBLIOGRAFÍA

Aadland D, Kolpin V (1998). Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis, *Mathematical Social Sciences* **849**, 203–218.

Alonso-Meijide JM, Álvarez-Mozos M, Fiestras-Janeiro MG (2014a). The least square nucleolus is a normalized Banzhaf value, *Optimization Letters*, DOI 10.1007/s11590-014-0840-9

Alonso-Meijide JM, Carreras F (2011). The proportional coalitional Shapley value, *Expert Systems with Applications* **38**, 6967–6979.

Alonso-Meijide JM, Carreras F, Costa J, García-Jurado I (2015). The proportional partitional Shapley value, *Discrete Applied Mathematics* **187**, 1–11.

Alonso-Meijide JM, Carreras F, Fiestras-Janeiro MG (2005). The multilinear extension and the symmetric coalition Banzhaf value, *Theory and Decision* **59**, 111–126.

Alonso-Meijide JM, Carreras F, Fiestras-Janeiro MG, Owen G (2007). A comparative axiomatic characterization of the Banzhaf–Owen coalitional value. *Decision Support Systems* **43**, 701–712.

Alonso-Meijide JM, Casas-Méndez B, González-Rueda AM, Lorenzo-Freire S (2014b). Axiomatic of the Shapley value of a game with a priori unions, *Top* **22**, 749–770.

Alonso-Meijide JM, Casas-Méndez B, Lorenzo-Freire S (2003). Una extensión de la regla de Aadland y Kolpin. En: *Actas del VI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*, Vigo.

Alonso-Meijide JM, Costa J (2015). Approximations of games by linear functions: an approach to the Owen value, *preprint*.

Alonso-Meijide JM, Fiestras-Janeiro MG (2002). Modification of the Banzhaf value for games with a coalition structure, *Annals of Operation Research* **109**, 213–227.

Amer R, Carreras F, Giménez JM (2002). The modified Banzhaf value for games with a coalition structure: an axiomatic characterization, *Mathematical Social Sciences* **43**, 45–54.

Aumann RJ, Drèze JH (1974). Cooperative games with coalition structures, *International Journal of Game Theory* **3**, 217–237.

Aumann RJ, Maschler M (1964). The bargaining set for cooperative games. En: Dresher M, Shapley LS, Tucker AW (eds.) *Advances in Game Theory*, Princeton University Press, 443–476.

Banzhaf JF (1965). Weighted voting does not work: A mathematical analysis, *Rutgers Law Review* **19**, 317–343.

Baumgartner JP (1997). Ordine di grandezza di alcuni costi nelle ferrovie, *Ingegneria Ferroviaria* **7**, 459–469.

Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley-Interscience.

Bertsekas DP (1999). *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.

Borel E (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **173**, 1304-1308.

Bunge M (1960). *La ciencia, su método y su filosofía*, Editorial Siglo Veinte, Buenos Aires.

Calvo E, Gutiérrez E (2013). The Shapley–solidarity value for games with a coalition structure, *International Game Theory Review* **15**, 1350002 (24 páginas).

Calvo E, Lasaga J, Winter E (1996). The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation, *Mathematical Social Sciences* **31**, 171–182.

Carreras F, Owen G (1988). Evaluation of the Catalonian Parliament 1980-1984, *Mathematical Social Sciences* **15**, 87–92.

Carreras F, Owen G (2011). Pure bargaining problems and the Shapley rule, *Homo Oeconomicus* **28**, 379–404.

Casajus A (2009). Outside options, component efficiency and stability, *Games and Economic Behavior* **65**, 49–61.

Casas-Méndez B, García-Jurado I, van den Nouweland A, Vázquez-Brage M (2003). An extension of the τ-value to games with coalition structures, *European Journal of Operational Research* **148**, 494–513.

Charnes A, Golany B, Keane M, Rousseau J (1988). Extremal principle solutions of games in characteristic function form: core, Chebychev and Shapley value generalizations. En: Sengupta JK, Kadekodi GK (eds.) *Econometrics of Planning and Efficiency*, Kluwer Academic Publishers, 123–133.

Costa J (2015). A polynomial expression for the Owen value in the maintenance cost game, aceptado para su publicación en *Optimization*.

Costa J, García-Jurado I (2013). Coalitional values and cost allocation problems, *International Game Theory Review* **15**, 1340002 (8 páginas).

Cournot AA (1838). *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Théorie des Richesses*, París.

Davis M, Maschler M (1965). The kernel of a cooperative game, *Naval Research Logistics Quarterly* **12**, 223–259.

Davis M, Maschler M (1967). Existence of stable payoff configurations for cooperative games. En: Shubik M (ed.) *Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, 39–52.

Dubey P (1975). On the uniqueness of the Shapley value, *International Journal of Game Theory* **4**, 131–139.

Faigle U, Grabisch M (2014). Linear transforms, values and least square approximation for cooperation systems. Documents de Travail du Centre d'Economie de la Sorbonne, Paris.

Felsenthal DS, Machover M (1998). *The Measurement Of Voting Power. Theory and Practice, Problems and Paradoxes*, Edward Elgar Publishing Ltd.

Fiestras-Janeiro MG, García-Jurado I, Mosquera MA (2011). Cooperative games and cost allocation problems, *Top* **19**, 1–22.

Fragnelli V, García-Jurado I, Norde H, Patrone F, Tijs S (2000). How to share railway infrastructure costs? En: García-Jurado I, Patrone F, Tijs S (eds.) *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory*, Kluwer, Amsterdam, 91–101.

Fragnelli V, Iandolino A (2004). Cost allocation problems in urban solid wastes collection and disposal, *Mathematical Methods of Operations Research* **59**, 447–463.

Gillies DB (1959). Solutions to general non-zero-sum games. En: Tucker AW, Luce RD (eds.) *Contributions to the Theory of Games IV*, Princeton University Press, 47–85.

González-Díaz J, García-Jurado I, Fiestras-Janeiro MG (2010). *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española.

Hammer PL, Holzman R (1992). Approximations of pseudo-boolean functions; applications to game theory, *Methods and Models of Operations Research* **36**, 3–21.

Harsanyi JC (1959). A bargaining model for the cooperative n-person games. En: Tucker AW, Luce RD (eds.) *Contributions to the Theory of Games IV*, Princeton University Press, 325–356.

Harsanyi JC, Selten R (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Hart S (2005). An interview with Robert Aumann, *Macroeconomic Dynamics* **9**, 683–740.

Hart S, Mas-Colell A (1989). Potencial, value and consistency, *Econometrica* **3**, 589–614.

Kalai E, Samet D (1987). On weighted Shapley values, *International Journal of Game Theory* **16**, 205–222.

Kamijo Y (2009). A two-step Shapley value in a cooperative game with a coalition structure, *International Game Theory Review* **11**, 207–214.

Khmelnitskaya AB, Yanovskaya EB (2007). Owen coalitional value without additivity axiom, *Mathematical Methods of Operations Research* **66**, 255–261.

Kurz M (1988). Coalitional value. En: Roth AE (ed.) *The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, 155–173.

Laruelle A, Valenciano F (2008). *Voting and Collective Decision-Making*, Cambridge University Press.

Lehrer E (1988). An axiomatization of the Banzhaf value, *International Journal of Game Theory* **17**, 89–99.

Littlechild SC, Owen G (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case, *Management Science* **20**, 370–372.

Maschler M, Solan E, Zamir S (2013). *Game Theory*, Cambridge University Press.

Moretti S, Patrone F (2008). Transversality of the Shapley value, *Top* **16**, 1–41.

Myerson RB (1977). Graphs and cooperation in games, *Mathematics of Operations Research* **2**, 225–229.

Myerson RB (1980). Conference structures and fair allocation rules, *International Journal of Game Theory* **9**, 169–182.

Nash J (1950). Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **36**, 48–49.

Nash J (1951). Non-cooperative games, *Annals of Mathematics* **54**, 286–295.

Norde H, Fragnelli V, García-Jurado I, Patrone F, Tijs S (2002). Balancedness of infrastructure cost games, *European Journal of Operational Research* **136**, 635–654.

Nowak AS (1997). On an axiomatization of the Banzhaf value without the additivity axiom, *International Journal of Game Theory* **26**, 137–141.

Nowak AS, Radzik T (1994). A solidarity value for n-person transferable utility games, *International Journal of Game Theory* **23**, 43–48.

O'Neill B (1994). Game theory models of peace and war. En: Aumann R, Hart S (eds.) *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Elsevier, 995–1053.

Owen G (1972). Multilinear extensions of games, *Management Science* **18**, 64–79.

Owen G (1975). Multilinear extensions and the Banzhaf value, *Naval Research Logistics Quarterly* **22**, 741–750.

Owen G (1977). Values of games with a priori unions. En: Henn R, Moeschlin O (eds.) *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, 76–88.

Owen G (1981). Modification of the Banzhaf–Coleman index for games with a priori unions. En: Holler MJ (ed.) *Power, Voting and Voting Power*, Physica-Verlag, 232–238.

Owen G (1995). *Game Theory*, Academic Press.

Owen G, Winter E (1992). The multilinear extension and the coalition structure value, *Games and Economic Behavior* **4**, 582–587.

Peleg B, Sudhölter P (2007). *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Springer.

Polya G (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press.

Polya G (1954). *Induction and Analogy in Mathematics. Volume I of Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press.

Roth AE (ed.) (1988). *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

Ruiz LM, Valenciano F, Zarzuelo JM (1998). The family of least-square values for transferable utility games, *Games and Economic Behavior* **24**, 109–130.

Schmeidler D (1969). The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **17**, 1163–1170.

Shapley LS (1953). A value for n-person games. En: Kuhn HW, Tucker AW (eds.) *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton University Press, 307–317.

Tijs S (1981). Bounds for the core of a game and the t-value. En: Moeschlin O, Pallaschke D (eds.) *Game Theory and Mathematical Economics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 123–132.

Tutic A (2010). The Aumann–Drèze value, the Wiese value, and stability: a note, *International Game Theory Review* **12**, 189–195.

van Damme E, Furth D (2002). Game theory and the market. En: Borm P, Peters H (eds.) *Chapters in Game Theory*, Kluwer Academic Publishers, 51–81.

Vázquez-Brage M (1998). *Contribuciones a la teoría del valor en juegos con utilidad transferible*, tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

Vázquez-Brage M, van den Nouweland A, García-Jurado I (1997). Owen's coalitional value and aircraft landing fees, *Mathematical Social Sciences* **34**, 273–286.

von Neumann J (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* **100**, 295–320.

von Neumann J, Morgenstern O (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

Wiese H (2007). Measuring the power of parties within government coalitions, *International Game Theory Review* **9**, 307–322.

Winter E (1989). A value for games with level structures, *International Journal of Game Theory* **18**, 227–242.

Winter E (1992). The consistency and potential for values of games with coalition structure, *Games and Economic Behavior* **4**, 132–144.

Young JM (1985). Monotonic solutions of cooperative games, *International Journal of Game Theory* **14**, 65–72.

Notación básica

N	conjunto finito de jugadores
$n = \|N\|$	número de jugadores
2^N	conjunto de coaliciones
$\subset$	inclusión (no necesariamente estricta)
(N, v)	juego TU
(N, c)	problema (juego) de asignación de costes
$P = \{P_1, \ldots, P_A\}$	estructura coalicional (partición de N)
(N, v, P)	juego TU con una estructura coalicional
(N, c, P)	problema (juego) de asignación de costes con una estructura coalicional
$M = \{1, \ldots, \text{A}\}$	jugadores del juego cociente
$\text{A} = \|P\|$	número de clases (uniones) de la partición P
(M, v_P)	juego cociente
(M, c_P)	problema (juego) cociente
(N, u_T)	juego de unanimidad de la coalición T
$P(N)$	conjunto de particiones en N
$G(N)$	conjunto de funciones caractarísticas en N
$CG(N)$	conjunto de funciones de costes en N
$MG(N)$	conjunto de funciones características monótonas en N
$SG(N)$	conjunto de funciones características de juegos simples en N
$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$	juego de mayoría ponderada
W	conjunto de coaliciones ganadoras de un juego simple (N, v)
W^m	conjunto de coaliciones minimales ganadoras

Φ	valor de Shapley
β	valor de Banzhaf
γ	valor solidario
Ψ	valor de Owen
α	valor de Aumann–Drèze
π	valor particional proporcional de Shapley
η	valor coalicional proporcional de Shapley
ξ	valor coalicional simétrico de Banzhaf

Índice alfabético