DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidade da Coruña

ECUACIÓNS DIFERENCIAIS

A. PRIETO[1]

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

GRAO EN ENXEÑARÍA ELÉCTRICA / ELECTRÓNICA INDUSTRIAL E AUTOMÁTICA

[1]Grupo de investigación *Modelos e Métodos Numéricos en Enxeñaría e Ciencias Aplicadas*, Departamento de Matemáticas, Facultade de Informática, Campus Elviña Universidade da Coruña, 15071 A Coruña, España.

ECUACIÓNS DIFERENCIAIS
GRAO EN ENXEÑARÍA ELÉCTRICA / ELECTRÓNICA INDUSTRIAL E AUTOMÁTICA

A presente publicación pertenece ao Prof. Andrés Prieto, e está suxeita á licencia *Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)* de Creative Commons, e polo tanto está permitido copiar, distribuir, comunicar publicamente, e remezclar; transformar esta obra baixo as siguientes condicións:

Recoñecemento: O contido deste documento pódese reproducir total ou parcialmente por terceiros, citando a súa procedencia e facendo referencia expresa aos autores. Dito recoñecemento non poderá suxerir en ningún caso que os autores presten apoio a un terceiro ou apoien o uso que se fai da súa obra.

Uso non comercial: O material orixinal e os traballos derivados poden ser distribuidos, copiados y exhibidos mientras o seu uso non teña fins comerciais.

Sen obra derivada: Se se altera ou transforma esta obra, ou se xenera unha obra derivada, non se poderá difundir o material modificado.

Ao reutilizar ou distribuir a obra, é preciso que estos termos da licencia sexan claros. Algunha destas condicións pode non aplicarse se se obtén o permiso dos autores como titulares dos dereitos de autor. Nada nesta licencia menoscaba ou restrinxe os dereitos morais dos autores.

Pode consultar o texto completo da licencia na siguiente dirección (en castelán):
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.es_ES`

© Andrés Prieto Aneiros
© Impresión: REPRONOR
Reprografía Noroeste S.L. (2014)
ISBN: 978-84-697-0085-3

Índice de contidos

1 Introdución ás EDOs **1**

1.1 Motivación 2

1.1.1 Modelado matemático do circuíto de Chua 2

1.1.2 Simulación numérica dun magnetrón 4

1.2 Terminoloxía básica: orde, tipo e linealidade 6

1.3 Solución xeral e solución particular 7

1.4 Existencia e unicidade de solución para un problema de valor inicial 8

1.5 Algunhas EDOs que gobernan fenómenos físicos na Enxeñaría 11

1.5.1 A Lei de arrefriamento de Newton 11

1.5.2 O circuíto eléctrico RC en serie 11

1.5.3 Un sistema mecánico simple 12

1.6 Exercicios 13

1.7 Práctica 1. Introdución a OCTAVE 15

2 EDOs de primeira orde **21**

2.1 Ecuacións en variables separadas 21

2.1.1 Definición 22

2.1.2 Procedemento de resolución 22

2.2 Ecuacións exactas 23

2.2.1 Definición 23

2.2.2 Procedemento de resolución 24

2.3 Factor integrante 25
2.3.1 Definición 25
2.3.2 Procedemento de resolución 25
2.4 Ecuacións lineais 27
2.4.1 Definición 27
2.4.2 Procedemento de resolución 28
2.5 Aplicacións das EDOs de primeira orde 29
2.5.1 A Lei de arrefriamento de Newton 29
2.5.2 Circuíto RC en serie 30
2.6 Exercicios 30
2.7 Práctica 2. Resolución de EDOs de primeira orde 33

3 Introdución á resolución numérica de EDOs 41

3.1 Que é a resolución numérica? 42
3.2 Resolución numérica dun PVI de orde un 43
3.2.1 Método de Euler 45
3.2.2 Métodos de Runge-Kutta de segunda orde 45
3.3 Exercicios 48
3.4 Práctica 3. Resolución numérica de EDOs 50

4 Resolución de EDOs lineais de orde superior 53

4.1 Ecuacións lineais de segunda orde 53
4.2 Ecuacións lineais homoxéneas con coeficientes constantes 55
4.3 Solución xeral 56
4.4 Ecuacións lineais non homoxéneas con coeficientes constantes 58
4.5 Método dos coeficientes indeterminados 59
4.6 Ecuacións lineais de orde superior 60
4.6.1 EDOs lineais homoxéneas con coeficientes constantes 61
4.6.2 Solución xeral 61

4.7 Aplicacións 62

4.7.1 Movemento dun fluído ao longo dun tubo 63

4.7.2 Circuíto eléctrico en serie RLC 63

4.8 Exercicios 64

4.9 Práctica 4. Resolución de EDOs lineais de orde superior 67

5 Transformada de Laplace **73**

5.1 Definición da transformada de Laplace 73

5.2 Cálculo e propiedades da transformada de Laplace 75

5.2.1 Transfomada de Laplace de funcións elementais 76

5.2.2 Transformada da función escalón e da función impulso 77

5.2.3 Transformación de problemas de valor inicial 79

5.3 Transformada inversa de Laplace 79

5.3.1 Definición e cálculo da transformada inversa 80

5.3.2 Resolución de PVIs e PVCs 81

5.4 Aplicacións na Enxeñaría 84

5.4.1 Circuíto en serie RLC 84

5.4.2 Flexión dunha viga 85

5.5 Exericicios 86

6 Resolución de sistemas lineais de EDOs **89**

6.1 Sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde 90

6.1.1 Redución de orde de EDOs 90

6.1.2 Estrutura do conxunto de solucións 91

6.1.3 Wroskiano dun conxunto de funcións 93

6.2 Resolución de sistemas de EDOs lineais con coeficientes constantes 94

6.2.1 Utilización da transformada de Laplace 94

6.2.2 Aplicacións na Enxeñaría Eléctrica 95

6.3 Exercicios 97

6.4 Práctica 5. Transformada de Laplace e resolución de SEDOs 99

7 Series de Fourier e transformada Z 103

7.1 Definición das series de Fourier 105

7.2 Cálculo e propiedades das series de Fourier 106

7.3 Aplicación á resolución de EDOs lineais de orde superior 108

7.3.1 Circuíto RLC en serie 109

7.4 Definición da transformada Z 110

7.5 Cálculo e propiedades da transformada Z 111

7.5.1 Transformada Z inversa 113

7.6 Aplicación á resolución de Ecuacións en Diferenzas 115

7.6.1 Cálculo dunha rede eléctrica en escaleira 116

7.7 Exercicios 116

8 Introdución as ecuacións en derivadas parciais 119

8.1 Definición, orde e solución dunha EDP 120

8.2 Introdución ás EDPs clásicas 121

8.2.1 Ecuación de Laplace e Poisson 121

8.2.2 Ecuación do calor 123

8.2.3 Ecuación de ondas 124

8.3 Método de separación de variables 125

8.3.1 Resolución da ecuación do calor 127

8.4 Exercicios 128

Chapter 1

Introdución ás EDOs

Tanto os estudos científicos nas Ciencias Experimentais (tales como Bioloxía, Física, Química, Farmacia, etc.) como os traballos técnicos de calquera campo das Enxeñerías ou da Arquitectura requiren de modelos e ferramentas matemáticas coas que poder representar, predicir e optimizar tanto procesos complexos como fenómenos físicos que cada vez son máis sofisticados. De entre todas as ferramentas que o Cálculo e a Análise Matemática posúen, as Ecuacións Diferenciais (tanto ordinarias como en derivadas parciais) representan o útil máis básico que permiten escribir os modelos matemáticos que describen os fenómenos físicos e as leis da natureza que nos rodea.

Para distinguir as Ecuacións Diferenciais doutro tipo de ecuacións, xa sexan ecuacións de tipo alxebraico, integral, ou integro-diferencial, imos a usar a caracterización que nos proporciona a seguinte definición:

Definición 1.0.1 (Ecuación Diferencial)**.** *Unha ecuación diferencial é aquela relación matemática de igualdade na que aparecen involucradas unha función incógnita e as súas derivadas (ordinarias ou parciais).*

Nas ecuacións diferenciais, a aquelas funcións que son descoñecidas e representan as incógnitas da ecuación denomínanse variables dependentes, mentres que as variables respecto ás que se deriva (habitualmente a variable que representa o tempo ou as coordenadas espaciais), chámanse variables independentes.

Dependendo da bibliografía, ao igual que ocorría coas derivadas dunha función, existen diferentes formas de escribir unha Ecuación Diferencial (xa sexa ordinaria ou en derivadas parciais). Tendo en conta as diferentes notacións:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \dot{f}(x),$$
$$\partial_t g(x,t) = \frac{\partial g}{\partial t}(x,t),$$

imos poder escribir as ecuacións diferenciais tamén de diferentes xeitos.

Exercicio. Atendendo ás anteriores notacións para as derivadas ordinarias, comproba que as seguintes ecuacións diferenciais son idénticas e identifica as variables dependentes e independentes:

$$\begin{aligned}
&3(x^2+1)\dot{y}y - \sin(x)\cos(y) = 3,\\
&uu' - \frac{\sin(t)\cos(u)}{3(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1},\\
&y\mathrm{d}y - \left(\frac{\sin(t)\cos(y)}{3(t^2+1)} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

Trata de escribir de diferentes formas a ecuación diferencial $3\sin(y)yx\mathrm{d}x + (2x-1)\mathrm{d}y = 0$ e identifica en cada caso as variables dependentes e independentes.

1.1 Motivación

Como exemplo de dúas aplicacións reais nas que as Ecuacións Diferencias Ordinarias (EDOs) e as Ecuacións en Derivadas Parciais (EDPs) xogan un papel relevante e esencial na descrición dos fenómenos físicos (neste caso de carácter electromagnético) seleccionáronse os modelos matemáticos do circuíto de Chua e o a simulación numérica dun magnetrón.

1.1.1 Modelado matemático do circuíto de Chua

O circuíto de Chua é un dos circuítos eléctricos máis sinxelos (de feito, está construído mediante a conexión de resistencias, bobinas e condensadores ademais dun amplificador operacional). Este circuíto foi deseñado por primeira vez en 1983 polo profesor Leon O. Chua na Universidade de Waseda (Xapón). A importancia deste circuíto radica en ser o exemplo máis sinxelo da realización física dun sistema eléctrico que posúe un comportamento caótico.

Se denotamos por v_{C_1} e v_{C_2} as voltaxes do circuíto nos condensadores C_1 e C_2 (véxase a Figura 1.1), e por i_{L_1} a intensidade de corrente na bobina L_1, unha vez adimensionalizados, a resposta eléctrica do circuíto queda caracterizado polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais:

$$\dot{v}_{C_1} = a(\dot{v}_{C_2} - \phi(v_{C_1})), \tag{1.1.1}$$

$$\dot{v}_{C_1} = v_{C_1} - v_{C_2} + i_{L_1}, \tag{1.1.2}$$

$$\dot{i}_{L_1} = -bv_{C_2}, \tag{1.1.3}$$

onde a e b son constantes reais que dependen da configuración do circuíto e ϕ é unha función escalar, que orixinalmente, Chua definiu como lineal a cachos mediante a expresión

$$\phi(s) = m_1 s + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|s+1| - |s-1|)$$

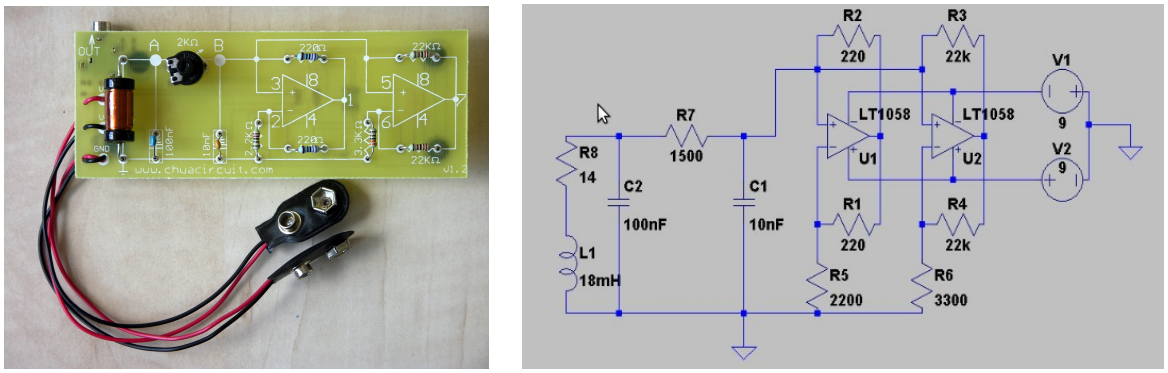


Figure 1.1: No panel esquerdo: Realización física do circuíto e Chua. No panel dereito: Esquema do circuíto implementado sobre o programa de ordenador comercial de simulación de circuítos eléctricos SPICE.

para describir a resposta eléctrica do diodo que contén o amplificador. Na expresión anterior m_1 e m_2 son tamén constantes reais que dependen das características físicas do diodo de Chua.

Para comprobar o carácter caótico deste circuíto eléctrico basta conectar o circuíto a un osciloscopio, e mediante o seu modo de diagrama XY, representar por exemplo a voltaxe no condensador C_2 (no eixe Y) con respecto á voltaxe no condensador C_1 (no eixe X). As figuras que aparecen nese diagrama pódense apreciar na fotografía da esquerda da Figura 1.2, coñecidas como Figuras de Lissajous. Do mesmo xeito a como se comprobou experimentalmente, tamén se pode reproducir este comportamento mediante a resolución numérica do sistema de ecuacións diferenciais (1.1.1)-(1.1.3).

As gráficas da parte dereita da Figura 1.2, representan as voltaxes e a intensidade, incógnitas do sistema diferencial con respecto ao tempo. Como se pode apreciar o comportamento é caótico (xa que non posúen ningún tipo de periodicidade nin patrón estable de crecemento ou decrecemento). Ao representar graficamente as voltaxes do circuíto unha con respecto á outra, a simulación numérica recupera o observado experimentalmente no osciloscopio (figura da parte inferior dereita).

Exercicio. Procura información sobre o modelo de Hodgkin–Huxley: ¿Poderías facer un esquema do circuíto eléctrico asociado a ese modelo? ¿Que representan as incógnitas do modelo dende un punto de vista físico? Escribe o sistema de ecuacións diferenciais que escriben matematicamente o modelo. Fai o mesmo tamén para o modelo de FitzHugh-Nagumo.

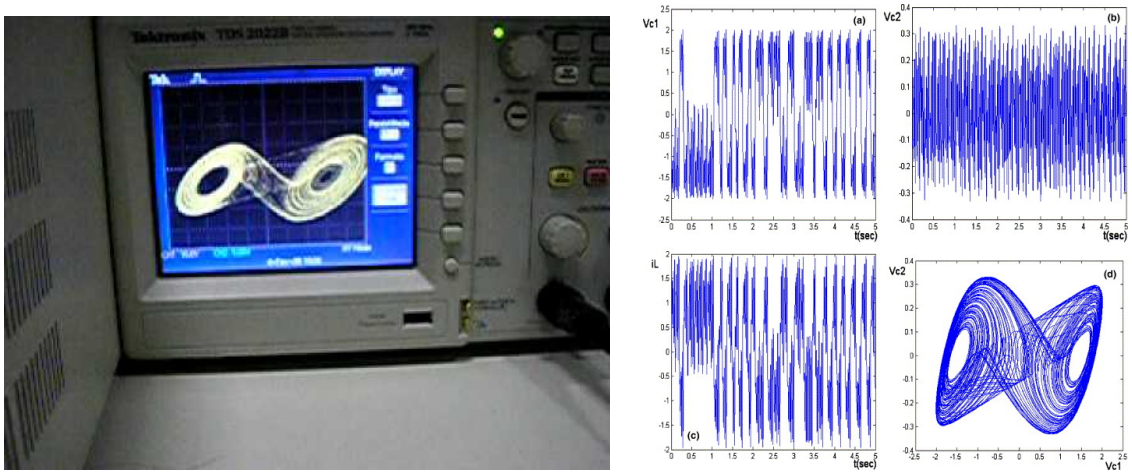


Figure 1.2: No panel esquerdo: Figuras de Lissajous (diagrama do modo XY) obtido cun osciloscopio asociadas ao comportamento caótico das voltaxes nos condensadores do circuíto de Chua. No panel dereito: Simulación numérica do circuíto de Chua onde se representa graficamente as voltaxes nos condensadores e a intensidade na bobina con respecto ao tempo, e se reproduce unha das Figuras de Lissajous usando as dúas voltaxes do circuíto (gráfica da esquina dereita).

1.1.2 Simulación numérica dun magnetrón

Un magnetrón é un dispositivo alimentado por enerxía eléctrica e que ten por finalidade a transformación da enerxía eléctrica en microondas electromagnéticas de alta potencia grazas a interacción dun feixe de electróns cun campo magnético. Este aparello foi desenrolado orixinalmente John Randall e Harry Boot en 1940 na Universidade de Birmingham (Inglaterra). Debido ao seu pequeno tamaño (véxase a Figura 1.3) e á súa capacidade para xerar pulsos electromagnéticos de alta potencia fixeron que o magnetrón fora rapidamente aplicado nos radares (de uso militar en submarinos e fragatas), para a detección de pequenos obxectos. Na actualidade, este tipo de dispositivos séguense a usar como parte do instrumental de radares e forman tamén parte dos fornos microondas.

Para modelar matematicamente a propagación dos campos electromagnéticos xerados polo magnetrón úsase un sistema de Ecuacións en Derivadas Parciais (das que se fará unha introdución no Tema 7), que conforman as Ecuacións de Maxwell (que non é máis que o conxunto de ecuacións descritas polas Leis de Gauss para o campo eléctrico e magnético, a Lei de Faraday e a Lei de

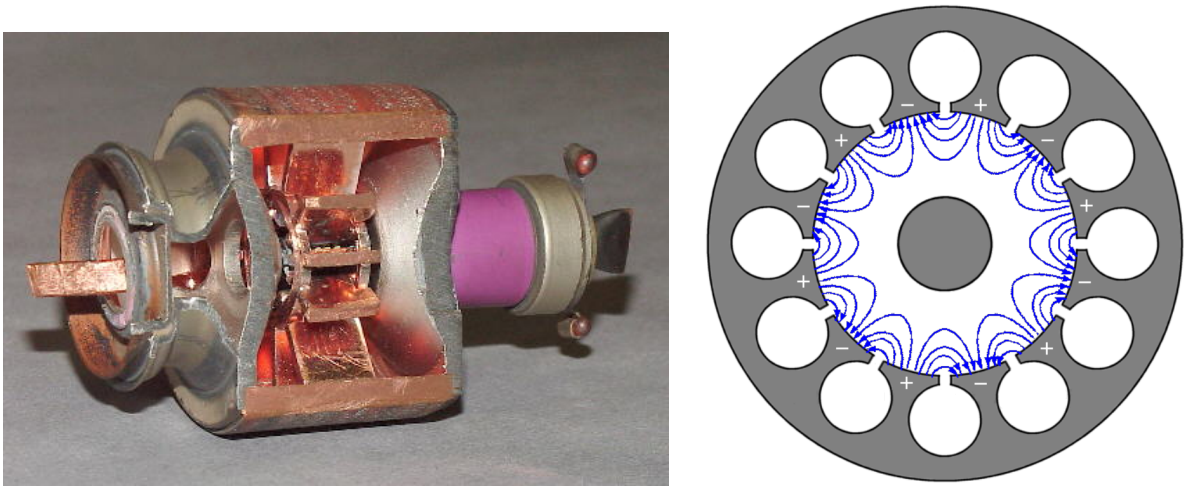


Figure 1.3: No panel esquerdo: Modelo de magnetrón con parte da sección lateral extraida, mostrando a cavidade interior e a guía de ondas que emite as microondas (no lateral esquerdo). No panel dereito: Sección transversal do magnetrón no que están representadas (en azul) as liñas do campo magnético xerado no interior da cavidade.

Ampère xeralizada):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\
\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{rot}\, \mathbf{H} &= -\mathbf{J}, \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \mathbf{E} &= \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

coas correspondentes leis constitutivas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\
\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\
\mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E},
\end{aligned}
$$

que relacionan o campo eléctrico $\mathbf{E}$, a intensidade do campo magnético $\mathbf{H}$, o desprazamento eléctrico $\mathbf{D}$, a densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}$ e a densidade de corrente $\mathbf{J}$ mediante ecuacións que involucran derivadas parciais nas coordenadas espaciais e con respecto ao tempo. Os parámetros físicos (que supoñemos constantes neste caso) que aparecen no modelo son: a permitividade eléctrica ε, a permeabilidade magnética μ e a condutividade eléctrica σ dos materiais involucrados na construción do magnetrón.

Evidentemente, para calcular os campos eléctricos e magnéticos xerados por un aparello cunha xeometría real tan complexa, faise imposible a aplicación de métodos analíticos (é dicir, o anterior

sistema de ecuacións é imposible de resolver teoricamente con lapis e papel como os que se estudaran nos Temas 2, 3, 4 e 6). Xa que logo, as liñas de corrente mostrada no panel dereito da Figura 1.3, foron calculadas mediante a implementación dun método numérico nun programa de ordenador. De feito, tanto a computación realizada coa axuda dos ordenadores como os métodos numéricos (aos que lles dedicaremos un estudo introdutorio no Tema 5) xogan un papel esencial na resolución de problemas reais de deseño e optimización de dispositivos electromagnéticos.

Exercicio. Observa as Ecuacións en Derivadas Parciais que forman o sistema de ecuacións de Maxwell e trata de identificar a versión máis sinxela (unidimensional) dalgunhas das leis clásicas do Electromagnetismo que xa estudaches noutros cursos de Física.

1.2 Terminoloxía básica: orde, tipo e linealidade

De forma xeral, existen moitos tipos de ecuacións diferenciais ordinarias (aquelas ecuacións que só involucran derivadas con respecto a unha única variable independente). A expresión xeral das EDOs pódese escribir como

$$F(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{1.2.1}$$

onde u é a variable dependentes e t é a variable independente. Para poder clasificar as EDOs, identificar de que tipo de son, e ter unha estimación do difícil que pode ser a súa resolución, debemos introducir algunha terminoloxía que nos axudara a distinguilas:

- **Orde dunha EDO**: é a orde da maior derivada que aparece na EDO.
- **EDO autónoma**: son aquelas nas que a expresión da ecuación non dependen explicitamente da variable independente (no caso de (1.2.1), F non depende da primeira variable.
- **EDO lineal**: son aquelas que se poden escribir como

  $$a_n(t)u^{(n}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1}(t) + \ldots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = f(t),$$

  e polo tanto, no caso de (1.2.1), F é unha función lineal con respecto as $n+1$ primeiras variables).

A medida que se avance no estudo dos Temas 3, 4 e 5 iranse incluíndo máis termos que nos axudarán a clasificar as EDOs.

Exercicio. Dada a EDO $F(x, y, y', y'') = 0$ con $F(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_4 - 2s_2/s_1^2$: a) escribe de tres formas diferentes a EDO, b) determina a orde, c) decide se é autónoma e/ou lineal. Fai o mesmo para a EDO $\ddot{u} - 5\dot{u} + 6u = 0$. Nesta última ecuación, ¿cal é a función F?

1.3 Solución xeral e solución particular

Unha vez que temos claro cal ou cales son as ecuacións diferencias que gobernan o fenómeno físico que queremos estudar, temos que resolvelas, é dicir, temos que calcular a solución das ecuacións diferenciais. No que segue imos a comprobar cun exemplo que se debe ter coidado no proceso de escribir as solucións das EDOs, xa que poden admitir infinitas solucións, incluso en casos moi sinxelos.

Exemplo. Consideremos como exemplo a EDO $u''(x) = x^2 + 1$. Sen aínda ter estudado ningún método de resolución analítica de EDOs, poderíamos integrar a igualdade tanto no lado esquerdo como no dereito respecto á variable independente e obter

$$\int u''(x)\mathrm{d}x = u'(x) + K_1 = \int (x^2+1)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x + K_2.$$

Como K_1 e K_2 son constantes arbitrarias, podemos agrupalas como $C_1 = K_2 - K_1$ e obter a nova EDO $u' = x^3/3 + x + C_1$, onde C_1 é calquera constante real. Se repetimos o mesmo procedemento unha vez máis obtemos

$$u(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

onde C_1 e C_2 son dúas constantes de integración reais arbitrarias e con valores independentes entre si.

A partir do anterior exemplo podemos introducir a seguinte nomenclatura para distinguir tres tipos diferentes de solucións dunha EDO: Dada unha EDO $F(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$ de orde n definida nun intervalo $I \subset \mathbb{R}$,

- A **solución xeral** é aquela solución definida nun intervalo I que contén n constantes de integración diferentes na súa expresión.
- Unha **solución particular** é aquela solución definida nun intervalo I que se pode deducir da solución xeral impoñendo valores particulares ás constantes de integración.

Exercicio. Considera a EDO $(u')^2 - tu' + u = 0$: a) Comproba que $u(t) = Ct - C^2$ onde C é unha constante real arbitraria é a solución xeral. b) Calcula unha solución particular da EDO de tal xeito que $u(1) = 0$. c) Comproba que $w(t) = t^2/4$ é tamén unha solución.

Debemos sinalar dous aspectos importantes sobre as solucións xerais e as singulares: En primeiro lugar, no caso das EDOs lineais nunca van a existir solucións singulares (isto é, todas as solucións particulares van poder deducirse a partir da solución xeral); En segundo lugar, no caso das EDOs

non lineais, non temos a seguridade de que exista unha solución xeral con n constantes de integración diferentes. En calquera caso, se existe a solución xeral dunha EDO de orde n (xa sexa lineal ou non), non pode haber máis de n constantes de integración diferentes na súa expresión.

Ata o de agora as solucións da EDO $F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ con $t \in I$ coas que estamos a traballar viñan dadas por funcións definidas de forma explícita, é dicir, tratábanse de **solucións explícitas**:

$$y(t) = \text{expresión en función da variable independente } t \text{ con } t \in I.$$

Sen embargo, ao igual que ocorre co cálculo de derivadas de funcións y que están definidas de forma implícita, mediante a expresión $G(t, y) = 0$, e nas que existía un procedemento para calcular $y'(t)$, tamén existe un procedemento de cálculo para comprobar se unha función definida implicitamente é solución dunha EDO no intervalo I.

Dada unha función u definida implicitamente $G(x, u) = 0$, para comprobar se é solución da EDO $F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$ de orde n, séguense os pasos:

1. A partir de $G(x, u) = 0$, calcúlanse as derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n}$.
2. Substitúense as derivadas na expresión $F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)})$.
3. Se se satisfai que $F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$, diremos que u dada por $G(x, u) = 0$ é unha **solución implícita** da EDO.

Exercicio. a) Comproba que $u(t) = t^2 - 1/t$ é unha solución da EDO $y'' - (2/t^2) = 0$. b) Comproba que $xy - \log(y) + C = 0$ onde C é unha constante arbitraria define unha solución da EDO $y' = y^2/(1 - xy)$, ¿a función y é a solución xeral da EDO?

1.4 Existencia e unicidade de solución para un problema de valor inicial

Acabamos de ver que unha EDO de orde un pode ter infinitas solucións (unha para cada valor da constante de integración que aparece na solución xeral). Vexamos isto máis en detalle e comprobemos como en casos sinxelos a interpretación xeométrica deste feito nos pode axudar a esbozar o debuxo das solucións das EDO máis sinxelas sen ter que calcular a solución analiticamente.

Supoñamos que a EDO ven dada pola expresión $y' = f(x, y)$. Se o que queremos unicamente é representar graficamente a solución $y(x)$ en función da variable independente x nun eixe cartesiano de coordenadas podémonos aproveitar da interpretación xeométrica de derivada dunha función dunha variable real: se pintamos as curvas $y = y(x) + C$ (unha para cada valor de C) sobre o

plano XY, o vector $(1, y'(x)) = (1, f(x, y))$ vai a ser tanxente no punto (x, y) á gráfica definida pola función y que pasa por ese punto.

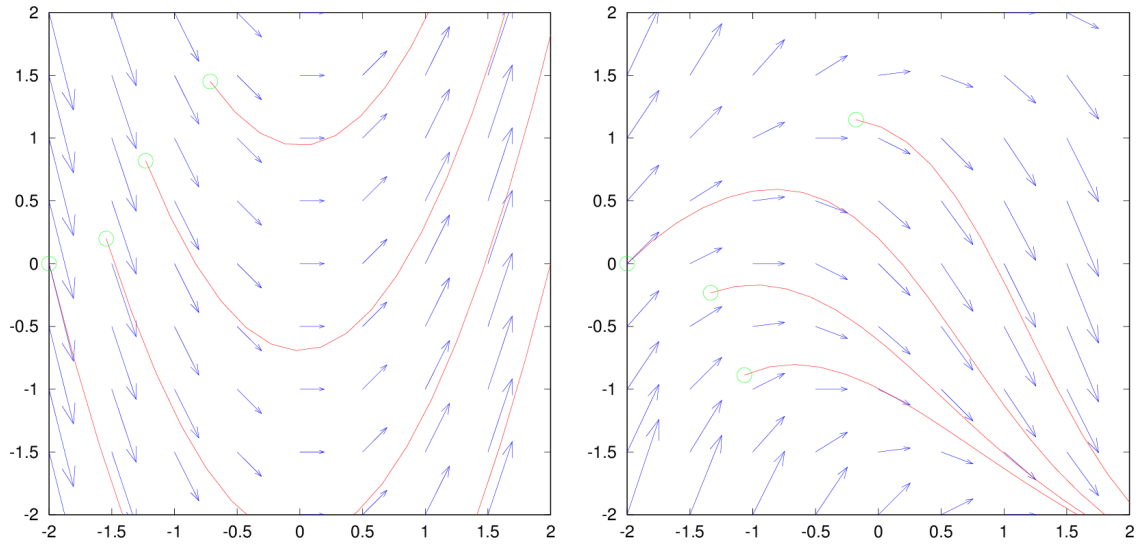


Figure 1.4: No panel esquerdo: Campo de vectores tanxentes $(1, 2x)$ asociados á EDO $y' = 2x$ e algunhas das solucións particulares da EDO. No panel dereito: Campo de vectores tanxentes $(1, xy)$ asociados á EDO $y' = 0.5y^2 - x - 1$ e algunhas das solucións particulares da EDO.

Dous exemplos desta situación están ilustrados na Figura 1.4. No panel da esquerda representouse graficamente o campo de vectores tanxentes $(1, f(x, y)) = (1, 0.5x^2 - x - 1)$ que son tanxentes ás traxectorias solución da EDO $y' = f(x, y) = 0.5x^2 - x - 1$. Como se pode observar, calquera das infinitas solucións particulares da EDO son curvas tanxentes a dito campo de vectores. Do mesmo xeito, na panel da dereita da Figura 1.4 representase o campo tanxente asociado ás solucións da EDO $y' = xy$.

Exercicio. Representa graficamente o campo de vectores tanxentes á solución $y' = y - x$ no dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$ e debuxa de forma aproximada as solucións que pasan polos puntos $(1, 1)$ e $(0, -1)$.

Como acabamos de ilustrar graficamente, poden existir infinitas funcións que son solución dunha EDO. De feito, nas representacións gráficas das EDOs do tipo $y' = f(x, y)$, que acabamos de considerar teñen unha característica en común: fixado un punto $P = (x_0, y_0)$ no plano XY, existe unha única solución particular que pasa por dito punto P. A necesidade de ter en consideración non soamente unha EDO senón tamén a información dun punto polo que pasa, ímola a escribir de forma rigorosa grazas á seguinte definición que involucra a unha EDO de orde n.

Definición 1.4.1. *Un problema de valor inicial (PVI) asociado á EDO* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

consiste en atopar unha solución da EDO nun intervalo $x \in I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga no punto $x_0 \in I$ as seguintes condicións iniciais:

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y_1, \\ &y''(x_0) = y_2, \\ &\cdots\cdots \\ &y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

onde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son n constantes dadas.

Evidentemente, ao igual que lles ocorre ás EDOs non todos os problemas de valor inicial teñen solución. Por exemplo, consideremos o seguinte PVI: atopar y solución tal que satisfai

$$\begin{cases} (y')^2 + x^2 + 1 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Neste caso, á vista da EDO é claro que non existe ningunha solución posible xa que o lado esquerdo da igualdade que define a EDO sempre é estritamente positivo. Polo tanto, parece necesario estudar un resultado de existencia e unicidade que garanta cando é posible calcular unha solución dun PVI. No que segue enunciamos unha versión simplificada do Teorema de Picard–Lindelöf para EDOs de primeira orde onde a derivada da solución se pode despexar explicitamente.

Teorema 1.4.2 (Picard–Lindelöf)**.** *Consideremos o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Se as funcións f e $\partial f/\partial y$ son continuas con respecto ás variables (x, y) nun rectángulo pechado $R = [a, b] \times [c, d]$ que contén no seu interior ao punto (x_0, y_0), entón o PVI admite unha única solución definida nun intervalo aberto ao redor do punto x_0.

Exercicio. a) Comproba a existencia e unicidade de solución empregando o Teorema de Picard–Lindelöf aplicado ao seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

¿Que podes deducir da existencia de solución? b) Comproba que $y = 0$ e $y(x) = x^2/4$ son solucións do PVI: ¿isto entra en contradición co Teorema de Picard–Lindelöf?

1.5 Algunhas EDOs que gobernan fenómenos físicos na Enxeñaría

Como xa estudamos na primeira sección deste Tema 1, as Ecuacións Diferenciais (xa sexa con derivadas ordinarias ou parciais) son as ferramentas matemáticas que nos permiten describir os modelos que gobernan os procesos e fenómenos físicos do mundo real. Os modelos que revisamos ao comezo deste Tema 1 eran moi complexos e a esta altura do noso estudo a súa análise e resolución está fora das nosas competencias. Sen embargo, existen outras EDOs de primeira orde moi relevantes que modelan fenómenos físicos moi importantes na Enxeñaría, que si poderemos resolver ao longo do presente curso, como poden ser a Lei de arrefriamento de Newton, os circuítos eléctricos RC en serie e os sistemas mecánicos máis sinxelos. No que segue imos a describir cada un deles.

1.5.1 A Lei de arrefriamento de Newton

Supoñamos que queremos modelar a evolución da temperatura θ dun corpo sólido ao longo dun intervalo de tempo $[0, T]$, que posúe unha superficie A na que ten unha temperatura uniforme e polo que está a perder enerxía térmica Q de forma uniforme co seu entorno (que está a temperatura θ_{en}). Se supoñemos que a enerxía térmica ven dada por $Q = C\theta$ sendo C a capacidade calorífica do corpo, e se coñece a temperatura θ_0 nun instante dado $t_0 \in [0, T]$, entón a temperatura θ satisfai o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\sigma A}{C}(\theta - \theta_{\text{en}}) & \text{en } [0, T], \\ \theta(t_0) = \theta_0, \end{cases}$$

sendo σ o coeficiente de transmisión térmica do corpo. Como se pode comprobar, aínda non estudamos as técnicas para resolver este tipo de EDOs, isto será o traballo que realizaremos no Tema 2.

1.5.2 O circuíto eléctrico RC en serie

Teñamos en conta agora o modelo matemático que goberna un circuíto eléctrico en serie que posúe unha resistencia e un condensador. A carga eléctrica e a intensidade de corrente que se xera mediante unha batería ou xerador de corrente eléctrica satisfán as Leis de Kirchhoff (formuladas en 1859). Estas leis aseguran a conservación da carga eléctrica (é dicir, a corrente que pasa por cada un dos elementos do circuíto é a mesma) e a conservación da enerxía no circuíto (a suma de caídas de potencial eléctrico en cada un dos elementos do circuíto debe ser igual a cero).

Se denotamos por q a carga eléctrica e por i a intensidade de corrente dun circuíto que posúe unha única resistencia e un condensador, que están alimentados por unha fonte eléctrica que aplica unha

voltaxe $e(t)$ ao circuíto no instante t, satisfaise a seguinte ecuación:

$$Ri + \frac{1}{C}q = e,$$

onde R é a resistencia e C é a capacitancia do condensador. Á vista da anterior expresión, soamente temos unha ecuación pero posuímos dúas incógnitas (i e q). Aproveitando que $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, podemos obter a EDO

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = e,$$

co que resulta unha EDO de orde un coa variable dependente q; Se optamos por derivar a ecuación orixinal resulta

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t},$$

onde agora a incógnita é a intensidade i. A partir destas dúas EDOs de orde un, podemos escribir dous problemas de valor inicial sobre o intervalo de tempo $[0, T]$ dependendo se coñecemos o valor inicial sobre a carga q_0 ou sobre a intensidade i_0 no instante $t_0 \in [0, T]$: a) PVI usando a carga eléctrica q

$$\begin{cases} R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}q = e & \text{en } [0, T], \\ q(t_0) = q_0, \end{cases}$$

ou b) PVI usando a intensidade i

$$\begin{cases} R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} & \text{en } [0, T], \\ i(t_0) = i_0. \end{cases}$$

Exercicio. Revisa os teus coñecementos de física de circuítos para escribir o PVI asociado a un circuíto en serie que posúe soamente unha bobina e unha resistencia. [Indicación: aplica as Leis de Kirchhoff, e en particular, as leis de Ohm e de Faraday]. ¿Cal é a orde da EDO que obtiveches?¿Cal é o campo incógnita nesa EDO?

1.5.3 Un sistema mecánico simple

Do mesmo xeito a como acabamos de facer coa modelización dun circuíto eléctrico, podemos construír un PVI para un sistema mecánico composto por un corpo unido a un resorte que se move soportando unha fricción oposta ao seu movemento. Supoñamos que a forza do resorte (aplicando a lei de Hooke) é proporcional ao desprazamento do resorte e que a forza de rozamento é proporcional (e de sentido oposto) á velocidade imposta polo resorte. Ademais, para simplificar o modelo, podemos desprezar a masa do corpo. Se o sistema mecánico sempre se atopa en equilibrio, en calquera instante de tempo o balance de forzas debe ser exacto polo que se verifica:

$$-ku - \mu v = f$$

onde k e μ son constantes estritamente positivas que corresponde á constante de elasticidade do resorte e ao coeficiente de rozamento, respectivamente; as funcións incógnitas u e v son respectivamente o desprazamento e a velocidade do corpo unido ao resorte e f é a forza externa que está actuando sobre o corpo. Se agora usamos que $v = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, podemos de novo escribir dous PVI sobre un intervalo de tempo $[0, T]$ dependendo se coñecemos nun instante dado $t \in [0, T]$ o valor da velocidade v_0 ou do desprazamento u_0: a) PVI usando o campo velocidade v

$$\begin{cases} -kv - \mu \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} & \text{en } [0, T], \\ v(t_0) = v_0, \end{cases}$$

ou b) PVI usando o campo desprazamento$u$

$$\begin{cases} -ku - \mu \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f & \text{en } [0, T], \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Exercicio. Revisa os teus coñecementos de física sobre o movemento mecánico dun corpo. Se no anterior modelo, supoñemos que o resorte non realiza ningunha forza sobre o corpo e que este posúe unha masa m, empregando as mesmas suposicións feitas (equilibrio de forzas e presenza dunha forza de fricción), ¿cal é o PVI que poderías escribir en función da velocidade?

1.6 Exercicios

1. Determina a orde e clasifica as seguintes EDOs atendendo a se as ecuacións son lineais ou autónomas:

   (a) $y'' + 3\sin(t)y = 4e^{-t}$

   (b) $y'' + 3t\sin(y) = 4e^{-t}$

   (c) $y' + 3t\sin(y'') = 4e^{-t}$

   (d) $y' + 3t\sin(t)y = 4e^{-y}$

   (e) $y + 3\sin(y)\dot{y} = 4e^{-y}$

   (f) $\mathrm{d}y + 3t\sin(t)\mathrm{d}t = 4e^{-y}\mathrm{d}t$

2. Se f e g son dúas solucións particulares dunha EDO lineal, decide cales das seguintes funcións son solucións particulares tamén: $f + g$, $f \circ g$ e fg. ¿Que ocorre no caso de que f e g foran dúas solucións particulares da EDO $y' + y^2 = 0$?

3. Dada a EDO $3y'' - 5\cos(2t-1)y' - 4y = g(t)$, decide razoadamente cales destas expresións non poden ser a solución xeral:

(a) $y(t) = t^2 - 1 + C$ sendo C unha constante arbitraria.

(b) $y(t) = t^4 - 5t + 1 + C - C^2$ sendo C unha constante arbitraria.

(c) $y(t) = \frac{1}{t} - Ct^2 - D(t+1)$ sendo C e D dúas constantes arbitrarias.

4. Escribe en cada caso unha EDO de orde 2 para que as seguintes funcións sexan solucións particulares dela:

   (a) $u(x) = e^{2x}$

   (b) $y(t) = t^3 + 5t^2 - 1$

   (c) $z(s) = \log(2s^2 + 1) - z(s)^2$

5. Consideremos a EDO $x(1 - x^2)y' - x^2 + (x^2 - 1)y + y^2 = 0$. Calcula todas as solucións posibles da forma $y(x) = x^k$ onde k é un número enteiro.

6. Comproba que a relación implícita

$$xy^3 - xy^3 \sin(x) = 1$$

   define unha solución da EDO

$$y' = \frac{(x\cos(x) + \sin(x) - 1)y}{3x(1 - \sin(x))}.$$

7. Verifica que a función y dada por

$$\tan(y - x + 1) = y + 3$$

   é solución da EDO

$$x'(y) = \sin^2(y - x + 1).$$

8. Comproba que $u(x) = 1/(x - C)$ é a solución xeral da EDO $y' = -y^2$. ¿Podes calcular directamente unha solución que non se poida deducir da solución xeral?

9. Considera un problema de valor inicial con condición inicial $y(0) = 1$. Decide en que casos temos a seguridade de ter existencia e unicidade de solución cando se consideran as EDOs:

   (a) $y' = \dfrac{x}{y}$ (b) $y' = -\dfrac{x}{y}$

   (c) $y' = \dfrac{y - 4x}{4y + x}$ (d) $y' = -\dfrac{y}{y - x}$

   (e) $y' = \dfrac{y}{y - x}$ (f) $y' = -\dfrac{\sqrt{|x|}}{y}$

10. Tendo en conta as EDOs do exercicio anterior, esboza de forma aproximada o campo de vectores tanxentes asociados e representa graficamente algunha das solucións particulares das mesmas. Determina en que puntos do plano xy ao redor dos cales non se pode asegurar a existencia ou unicidade de solución.

11. Consideremos a EDO
$$y' = \frac{x+y-1}{1-x+3y}.$$
Sen chegar a resolvela, acha os puntos onde as solucións posuen máximos ou mínimos locais.

12. Sexa a EDO de primeira orde $y' = 1 - 1/y^2$.

    (a) Estuda se por cada punto do plano xy pasa unha única traxectoria solución da EDO e debuxa aproximadamente algunhas das solucións particulares da EDO.

    (b) Sexa u a solución que satisfai $u(0) = 2$, ¿para que valores da variable independente está definida u? Neste caso, calcula de forma aproximada $u(0.1)$

13. Considera o problema de valor inicial
$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \sqrt{|x|}\mathrm{d}t & \text{para } t \geq 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$
Comproba que non posúe unicidade de solución e calcula polo menos dúas solucións diferentes.

1.7 Práctica 1. Introdución a OCTAVE

Ao executar o comando `QtOctave` dende un terminal (ou facendo dobre clic sobre a icona situada no escritorio), aparece na pantalla o entorno gráfico de traballo de OCTAVE. Neste entorno de traballo é onde escribiremos calquera das expresións matemáticas que imos a manipular.

Ao longo deste curso usaremos ademais das funcións estandar que xa veñen instaladas en OCTAVE, tamén aquelas que aparecen incluídas no paquete SYMBOLIC e as contidas na carpeta `OctaveODE` que se poden descargar dende o campus virtual. Para poder traballar coas funcións que aparecen na carpeta `octaveODE`, basta descomprimir o ficheiro co mesmo nome e teclear dende a liña de comandos de QTOCTAVE:

```
>>>pkg load symbolic
>>>addpath('directorio da carpeta descomprimida')
```

onde por exemplo, este directorio podería ser `Z:\Usuarios\Pepito\octaveODE`. Ademais unha vez feito isto, sempre deberemos teclear o seguinte comando:

```
>>>overload_functions
```

para actualizar aquelas funcións que se redefinen e que usaremos ao longo do curso.

Cálculos numéricos básicos

Cada vez que introduzamos unha expresión (por exemplo se quixeramos sumar $2+3$) aparecerá o símbolo de entrada

```
>>>2+3
```

mentres que cada vez que OCTAVE calcule un resultado, mostrará como saída

```
ans = 5
```

Para avaliar as expresións nunha sesión de traballo debemos premer a tecla "Enter". Como podemos comprobar, ás expresións de saída se lles asigna por defecto a variable `ans`, que cada vez que se calcula unha nova expresión ve cambiado o seu valor. En xeral, cada vez que escribamos unha expresión matemática en OCTAVE podemos finalizalas usando un punto e coma "`;`" para evitar que apareza o resultado dos cálculos na pantalla.

Ao contrario do que ocorre noutras linguaxes de programación, as variables non hai porque declaralas cun tipo específico, simplemente hai que asignarlle un valor (noutro caso, se supoñerán que son variables numéricas sen un valor predefinido). Ao longo deste curso traballaremos con variables numéricas, simbólicas e con cadeas de texto. Por exemplo, se introducimos as seguintes expresións dende a liña de comandos:

```
>>>a=4;
>>>s='texto';
>>>x=sym('t^2');
```

podemos comprobar tecleando o comando `whos` o tipo diferente de cada variable. Ao empregar o comando `whos`, na consola de comandos de OCTAVE aparece a seguinte información:

```
>>>Variables in the current scope:

   Attr Name        Size                     Bytes  Class
   ==== ====        ====                     =====  =====
        a           1x1                          8  double
        s           1x5                          5  char
        x           1x1                          0  sym

Total is 7 elements using 13 bytes
```

que nos informa que `a` é unha variable numérica, `s` é unha cadea de texto e `x` é unha variable simbólica.

Ao longo do curso, empregaremos habitualmente dúas constantes que xa está predefinidas en OCTAVE: π, o número e e a unidade imaxinaria i, cada unha delas accesible a través das variables `Pi`, `e` e `1i`, respectivamente. Ademais de traballar con expresións, xa sexan variables ou constantes, tamén podemos definir funcións (de unha ou varias variables). Por exemplo, se queremos

definir a función $f(t) = t^2 \sin(2t-1)$ e avaliala en $a = 3$, deberíamos teclear o seguinte texto:

```
>>>f=@(t)t^2*Sin(2*t-1)
>>>f(3)
>>>a=sym('3');
>>>f(a)
```

Como se pode comprobar a partir do anterior exemplo, OCTAVE sempre calcula o valor dunha función dando o resultado exacto no caso das variables simbólicas (por moi longa que sexa a expresión) mentres que cando os cálculos involucran variables numéricas o resultado da avaliación das funcións sempre vai a ser numérico. No caso de requerirse o valor numérico dunha expresión simbólica con 15 díxitos de precisión, debemos empregar o comando `double`.

Como é de esperar, todas as operacións aritméticas están implementadas en OCTAVE: `+-*/^`, e as súas prioridades (salvo que se usen parénteses) son 1º: `^`, 2º: `*` ou `/`, e 3º: `+` ou `-`. Ademais, como xa aconteceu ao definir a expresión da función $f(t)$ para traballar con variables simbólicas e numéricas todos os nomes das funcións comezan por maiúscula[1]: as funcións trigonométricas `Sin`, `Cos`, `Tan`, o logaritmo neperiano `Log`, a raiz cadrada `Sqrt`, a función exponencial `Exp`, etc.

Por último, debemos sinalar que o comando `clear` nos permite eliminar as variables que temos definidas ao longo da nosa sesión de traballo. Por exemplo, se queremos eliminar a variable x teclearíamos `clear x`, mentres que se queremos eliminar todas as variables coas que traballamos nunha sesión escribiríamos `clear all`

Cando queiramos realizar sucesivamente varias tarefas en OCTAVE, é conveniente crear un ficheiro `.m` dende o menu `Editor` (que se pode lanzar dende o botón do menu de `QtOctave` no que aparece un bolígrafo debuxado). Unha vez gardado este ficheiro de comandos, pódense volver a executar todos os comandos contido nel volvéndoo a abrir dende QTOCTAVE. Para facilitar a lectura deste ficheiro pódense incluír liñas de texto con comentarios (describindo o código, explicando o uso de cada comando, etc). Todas as liñas de comentarios deben comezar por `%`.

Exercicios

1. Realiza as seguintes operacións e determina cal foi a orde da avaliación das operacións aritméticas:
   `2.01*4+3.1416 ; -2.98+0.23*14+2 ; 6+4/2+3.111 ; 5.22*3.1416/6-4`

2. Realiza as seguintes operacións (modifica como sexa necesario a precedencia dos operadores con parénteses) con variables numéricas:

$$\text{a)}\ \frac{3+4^2}{\dfrac{2}{\sqrt[5]{3}} - \left(\dfrac{1}{3.1\times 2}\right)^{\frac{3}{4}}} \qquad \text{b)}\ \frac{4.1^{\frac{0,2+1}{2}}}{\dfrac{2}{0.1^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{0.4}{2^{\frac{1}{3}}}}.$$

[1] cousa que non acontece se empregasemos MATLAB, onde todas as funcións terían que ir escritas en minúscula

3. Sabendo que $a = 21/10$, $b = 3$, calcula os valores numéricos das seguintes expresións definindo as variables a e b como simbólicas: $a + bi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7a/5}$, $\ln(2a)$ e $7e^{5/4} + 3.4$.

4. Comproba que $\cos(\pi) = e^{i\pi}$ avaliando a expresión do lado esquerdo e dereito da igualdade por separado. Fai o mesmo para comprobar a igualdade $\sin(\pi/2) = e^{i\pi/2}/i$.

Manipulación de expresións e representacións gráficas con OCTAVE

Como acabamos de estudar na sección anterior, o programa de ordenador OCTAVE permite traballar con variables numéricas e expresións simbólicas. Estas expresións pódense manipular con algunhas das seguintes funcións:

- `partfrac(expresion, var)`: calcula a descomposición en fraccións simples que aparecen na expresión simbólica `expresion`, tendo en conta como argumento a variable `var`.
- `expand(expresion)`: desenvolve os polinomios, funcións trigonométricas, exponenciais ou logarítmicas contidas na expresión simbólica `expresion`.
- `factor(expresion)`: reescribe (no caso de ser posible) a expresión simbólica `expresion` como produto de factores máis sinxelos.
- `simplify(expresion)`: produce a forma máis simple posible da expresión simbólica de tipo racional `expresion`.
- `simple(expresion)`: trata de simplificar expresións que conteñen logaritmos, exponenciais e radicais e devolver a `expresion` máis curta posible.

Dada unha expresión simbólica, tamén a podemos avaliar asignando un valor ás variables das que dependen, é dicir, podemos substituír as variables simbólicas por valores numéricos co comando

```
subs(expresion, variable, valor)
```

Por exemplo, para avaliar a expresión $x^2 + e^{-x}$ en $x = \pi/2$ usaríamos o comando:

```
>>>x=sym('x');
>>>subs(x^2+Exp(-1*x), x, Pi/2)
ans = 2.6752806766231015635
```

Se a expresión (ou unha función) depende de varias variables simbólicas, poderíamos substituílas por diferentes valores. Por exemplo, se quixeramos avaliar $f(x) = e^{ax}$ para $x = 1$ e $a = 2$, usaríamos os comandos:

```
>>>a=sym('a');
```

```
>>>f=@(x)Exp(a*x);
>>>f(1)
ans = exp(a)
>>>x=sym('x');
>>>subs(f(x),{x,a},{1,2})
ans = 7.3890560989306502274
```

Exercicios

1. Comproba cal é o resultado dos seguintes comandos:

```
S=(x^2+x-Exp(x))*(x+3); simple(S)
factor(x^3+4*x^2-11*x-30)
simple(Sin(x)^2+Cos(x)^2)
partfrac((x+y)/(1/x+1/y),x)
simplify((15*x^2+5*x+6)/(x+2))
expand((x-2)*(x-4))
Log10=@(x)Log(x)/Log(10); subs((x-2)*Log10(a),{x,a},{1,10})
```

Para representar graficamente unha función dunha variable real podemos usar o comando `ezplot`. Este comando traza no plano xy a gráfica da curva $y = f(x)$ definida mediante a función f. Por exemplo, para debuxar no plano a gráfica da función seno entre -6 e 6, poderíamos usar as seguintes ordes (atendendo a se definimos a nosa propia función $f(x)$ ou úsase a propia definición $\sin(x)$):

```
>>>x=sym('x');
>>>ezplot(Sin(x),[-6,6])
>>>f=@(t)Sin(t);
>>>ezplot(f(x),[-6,6])
```

Se quixeramos cambiar as etiquetas que aparecen asociadas aos eixes x e y deberíamos empregar os comandos `xlabel` e `ylabel`, respectivamente. Por exemplo, poderíamos modificar a anterior gráfica como:

```
>>>xlabel('Coordenada x');
>>>ylabel('Valor de f');
```

Se ademais lle quixeramos poñer un título á gráfica poderíamos usar o comando `title` do mesmo xeito ao como se fai coas etiquetas dos eixes.

Co comando `ezplot` soamente se poden representar as gráficas dunha función pero non se poderá representar graficamente os valores dunha táboa de datos. Para iso terá que empregarse o comando `plot`. Por exemplo, para representar os datos da táboa:

X	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Y	1.0	3.4	2.1	5.7	3.2

deberíamos definir os vectores `x` e `y` que almacenan os valores numéricos da táboa (da mesma lonxitude), empregando os comandos:

```
>>>xdata=[1, 2, 3, 4, 5];
>>>ydata=[1.0, 3.4, 2.1, 5.7, 3.2];
>>>plot(xdata,ydata,'bo--')
```

co que representaríamos en azul mediante círculos unidos cunha liña recta continua os datos da táboa (podes consultar a axuda do comando `plot` para averiguar cal é a codificación de cores e estilos de trazos que usa OCTAVE: para iso, teclea o comando `help plot` e revisa a información proporcionada). Por último, para representar as gráficas de varias funcións na mesma figura, basta empregar o comando `hold on` e empregar de novo as sucesivas ordes `plot` ou `ezplot` co resto das gráficas que queres representar na mesma figura. Unha vez rematadas todas as representacións das figuras, usariamos o comando `hold off` para deixar de pintar nesa figura. Do mesmo xeito ao como se facía antes, pódese empregar os comandos `xlabel` e `ylabel` para etiquetar os eixes de abscisas e ordenadas.

Exercicios

1. Representar graficamente con cruces en verde os seguintes puntos do plano: $(0.1, 0.45)$, $(0.2, 0.55)$, $(0.3, 0.65)$, $(0.4, 0.55)$, $(0.5, 0.45)$, $(0.6, 0.35)$, $(0.7, 0.35)$, $(0.8, 0.45)$.

2. Debuxa sobre a mesma figura as seguintes funcións $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$: $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^{-x^2}$ e $f(x) = e^{x^2}$.

3. Debuxa sobre os mesmos eixes as funcións $y = x^p$ para $p = 1, 2, 4, 0.5, 0.25$ no intervalo $[0, 1.5]$ distinguíndoas polo estilo do trazo ou pola cor.

Chapter 2

EDOs de primeira orde

No anterior Tema 1 xa introducimos as primeiras Ecuacións Diferenciais Ordinarias (EDOs) e os Problemas de Valor Inicial (PVIs) que teñen certa relevancia no modelado de procesos e fenómenos físicos en problemas da Enxeñaría (e en particular na Enxeñaría Eléctrica). Ata o de agora, non puidemos calcular solucións destas ecuacións e nos conformamos con comprobar se unha función dada podía ser solución ou non.

No Tema 2, traballaremos coas ferramentas máis sinxelas de resolución analítica de EDOs de primeira orde (e dos PVI que teñen asociados). Estes procedementos serán diferentes atendendo ao tipo de EDOs coas que nos atoparemos: ecuacións en variables separadas, exactas, e ecuacións que se transformarán a exactas mediante un factor integrante e por último as ecuacións lineais. É por esta clasificación, que para resolver unha EDO debemos sempre realizar dúas etapas: 1) definir e identificar que tipo de EDO imos a resolver e 2) aplicar a ferramenta de resolución adecuada para ese tipo de EDOs. No que segue veremos cada unha destas etapas para algúns tipos de EDOs de primeira orde.

2.1 Ecuacións en variables separadas

As EDOs en variables separadas pódese dicir que son as Ecuacións Diferenciais máis sinxelas de resolver e das que poder obter a solución xeral. De feito, en cursos elementais de Cálculo xa se resolveron algunhas EDOs deste tipo (aínda que daquela non se precisara que se estaba a resolver unha EDO en variables separadas).

2.1.1 Definición

Definición 2.1.1 (EDO en variables separadas)**.** *Unha EDO de primeira orde (con variable dependente y e variable independente x) dise que é de variables separadas se se pode escribir como*

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

Exemplo Dada unha función f continua, se calculamos a súa primitiva,

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C \tag{2.1.1}$$

sendo C unha constante arbitraria, o que se está a calcular é unha función y que satisfai (aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral): $y'(x) = f(x)$, que en realidade é unha EDO en variables separadas.

No anterior exemplo, posto que a EDO é de orde un e na ecuación (2.1.1) existe unha constante de integración xa sabemos que é a solución xeral de EDO e que ademais fixando o valor de C podemos obter unha solución particular da EDO.

Exercicio a) Resolve o seguinte PVI (empregando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo Integral) que involucra unha EDO en variables separadas:

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = f(t)\mathrm{d}t & \text{en } [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

sendo f unha función continua en $[0,T]$.
b) Se temos unha EDO en variables separadas $y'(x) = f(x)g(y)$ para $x \in [a,b]$, ¿que condicións sobre f e g en $[a,b]$ son suficientes para que o PVI asociado a esa EDO con condición inicial en $x_0 \in [a,b]$ teña unha única solución?

2.1.2 Procedemento de resolución

Unha vez identificada a EDO en variables separadas como $y'(x) = f(x)g(y)$, o procedemento para a súa resolución é o seguinte:

- Reescribir a EDO de forma que as variables dependentes e independentes soamente estea a un só lado da igualdade:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

- Integrar cada lado da igualdade de forma separada:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

- De ser posible, despexar a variable dependente y en función da variable independente x.

Exercicio. Calcula a solución xeral da EDO $tuu' = u - 1$. Decide se o PVI con condición inicial $u(0) = 2$ posúe unha única solución. ¿Ocorre o mesmo para a condición $u(2) = 2$?

2.2 Ecuacións exactas

Se consideramos unha función y en forma implícita $G(x, y) = C$ (sendo C unha constante arbitraria) é razoablemente doado escribir unha EDO que ten a y como solución xeral (claro está, definida implicitamente). Se derivamos G obtemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}y = 0.$$

Polo tanto, podemos deducir que se consideramos unha EDO escrita como $M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$ e os coeficientes M e N se poden entender respectivamente como derivadas parciais con respecto ás variables independentes e dependentes dunha función G de dúas variables entón, calcular unha solución da EDO redúcese a calcular a función G que se empregou para obter os coeficientes da EDO aplicando as derivadas parciais. Para formalizar esta idea, podemos definir así o que se entende por EDOs exactas.

2.2.1 Definición

Definición 2.2.1 (EDO exactas)**.** *a) Unha EDO de primeira orde (con variable dependente y e variable independente x) dise que é exacta se se pode reescribir como*

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{2.2.1}$$

e se existe unha función G tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \qquad N(x, y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y).$$

Esta función G define implicitamente a solución xeral da EDO mediante a ecuación $G(x, y) = C$, sendo C unha constante arbitraria.
b) De forma máis restrictiva, se a EDO pódese escribir como (2.2.1) *e M e N son funcións continuas*

que teñen as súas derivadas parciais de primeira orde continuas, dise que a EDO é exacta se se satisfai

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Evidentemente, a parte a) da definición xa nos da a solución se somos capaces de atopar unha función G con tales características. Sen embargo, esta parte a) ten a dificultade de non dar ningún tipo de procedemento para calcular esta función G. Polo contra, a parte b) da definición (baixo hipóteses máis restritivas sobre os coeficientes da EDO) nos proporciona unha forma sinxela para decidir se a EDO é exacta ou non.

Exercicio Comproba que a EDO $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ é exacta. Usa a parte a) da definición de EDO exacta e calcula a función G a partir da que se derivan os coeficientes M e N. ¿Poderías dar a solución xeral desta ecuación?

2.2.2 Procedemento de resolución

Unha vez identificada a EDO exacta como $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$, posto que o noso obxectivo é calcular a función G coa que se define implicitamente a solución, o procedemento para a súa resolución é o seguinte:

- Integrar o coeficiente M con respecto á variable independente x

$$G(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x + K(y),$$

  tendo en conta que a constante de integración K pode depender da variable y.
- Calcular $K'(y)$, despexándoa da ecuación $\partial G/\partial y = N(x,y)$, é dicir, resolvendo a ecuación

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\mathrm{d}x\right) + K'(y),$$

  onde $K'(y)$ é a función incógnita a calcular.
- Calcular a integral de $K'(y)$ para obter a solución xeral da EDO

$$G(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x + \int K'(y)\mathrm{d}y + C,$$

  sendo C unha constante arbitraria de integración.

Exercicio. Calcula a solución xeral das EDOs: a) $u - t^2 + tu' = 0$, b)$(3x^2 + 2y\sin(2x))\mathrm{d}x + (2\sin^2(x) + 3y^2)\mathrm{d}y = 0$, c) $(y^2 + 2xy)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = 0$. Decide en todos os casos se son exactas ou non e se o PVI con condición inicial que impón o valor 1 no punto 0 posúe unha única solución.

2.3 Factor integrante

Se consideramos de novo a última das EDOs do exercicio da sección anterior $(y^2+2xy)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$, podemos comprobar directamente (usando a parte b) da definición de EDOs exactas) que esta EDO non é exacta. Este exemplo ilustra o especial e pouco frecuentes que van a ser este tipo de EDOs en problemas sofisticados de aplicación real na Enxeñaría. Sen embargo, se multiplicamos a EDO polo factor $1/y^2$, resulta que a nova EDO

$$\left(1+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=0,$$

é unha EDO exacta (*Exercicio: aplica a parte b) da definición para comprobalo*). Polo tanto, podemos ampliar o conxunto de EDOs que podemos resolver mediante o procedemento aplicado para EDOs exactas, se somos capaces de atopar o factor adecuado para convertelas en EDOs exactas. Esta é xustamente a idea da procura do factor integrante.

2.3.1 Definición

Definición 2.3.1 (Factor integrante)**.** *Unha EDO de primeira orde (con variable dependente y e variable independente x)*

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

dise que posúe un factor integrante se existe unha función $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

é unha EDO exacta.

Esta definición ten un claro problema á hora de aplicala: non proporciona ningún procedemento de cálculo para achar a función μ, ou o que é aínda peor, a definición tampouco nos proporciona a información respecto a se a EDO admite un factor integrante de forma que se poida transformar nunha EDO exacta.

Exercicio Comproba que a EDO $y'-2y/x=0$ non é exacta, pero que posúe como factor integrante $1/x^2$. ¿A función $4/x^2$ tamén é un factor integrante?

2.3.2 Procedemento de resolución

Posto que non posuímos un procedemento xeral para o cálculo do factor integrante, soamente poderemos dar algunhas indicacións de como calculalo en casos sinxelos. En todos os casos consideramos unha EDO escrita da forma $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$.

Factor integrante $\mu(x)$

Se supoñemos que existe un factor integrante para a EDO e que este soamente dependen da variable independente x entón, o procedemento para a resolución é o seguinte:

- Aplicar a parte b) da definición de EDO exacta á ecuación

$$\mu(x)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(x)N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

  é dicir, escribir a ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)N(x,y)\right).$$

- Tratar de reescribir a ecuación anterior de tal xeito que as expresións que dependen de μ e de μ' quedan presentes unicamente a un lado da igualdade, é dicir como

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}.$$

- Se na expresión anterior, o lado esquerdo da igualdade (que non involucra a μ ou μ') e que denotaremos por H soamente depende de x, a EDO $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ admite un factor integrante do tipo $\mu(x)$. Nese caso:
- O factor integrante calcúlase ao resolver a EDO $\mu'(x)/\mu(x) = H(x)$ que ten como unha solución particular

$$\mu(x) = e^{\int H(x)\mathrm{d}x}.$$

- Resolver mediante o procedemento de EDOs exactas a ecuación

$$\mu(x)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(x)N(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Exercicio. b) Calcula a solución xeral da EDO $(2y^2 + 2y - 4x^2)\mathrm{d}x + (2xy + x)\mathrm{d}y = 0$. ¿É exacta? ¿Admite factor integrante do tipo $\mu(x)$?

Factor integrante $\mu(y)$

Se supoñemos que existe un factor integrante para a EDO e que este soamente dependen da variable dependente y entón, o procedemento para a resolución é o seguinte:

- Aplicar a parte b) da definición de EDO exacta á ecuación

$$\mu(y)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(y)N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

é dicir, escribir a ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right).$$

- Tratar de reescribir a ecuación anterior de tal xeito que as expresións que dependen de μ e de μ' quedan presentes unicamente a un lado da igualdade, é dicir como

$$-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}.$$

- Se na expresión anterior, o lado esquerdo da igualdade (que non involucra a μ ou μ') e que denotaremos por H soamente depende de y, a EDO $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ admite un factor integrante do tipo $\mu(y)$. Nese caso:
- O factor integrante ven dado ao resolver a EDO $\mu'(y)/\mu(y) = H(y)$ que ten como unha solución particular

$$\mu(y) = e^{\int H(y)\mathrm{d}y}.$$

- Resolver mediante o procedemento de EDOs exactas a ecuación

$$\mu(y)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(y)N(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Unha das maiores dificultades ao aplicar a técnica dos factores integrantes é coñecer de antemán cal é o factor integrante correcto antes de iniciar ningún cálculo. Para facer esta predición, non existe ningún procedemento xeral e de feito, non é posible decidir se unha función admite un factor integrante que depende dunha única variable.

Exercicio. Calcula a solución xeral da EDO $(12 + 5xy)\mathrm{d}x + (6x/y + 3x^2)\mathrm{d}y = 0$. ¿É exacta? ¿Admite factor integrante do tipo $\mu(x)$? ¿E de tipo $\mu(y)$?

2.4 Ecuacións lineais

Lembrémonos do Tema 1 no que xa introducimos o que entendíamos por unha EDO lineal. No caso particular dunha EDO de orde un, son aquelas que se poden escribir como (sendo x a variable independente e y a variable dependente) $F(x,y,y') = 0$, onde F é unha función lineal sobre o seu segundo e terceiro argumento.

2.4.1 Definición

Posto que as EDOs coas que estamos a tratar son de orde un, podemos dar unha definición de EDOs lineais máis ilustrativa e simple, co que unha rápida inspección visual nos permita decidir se é lineal ou non

Definición 2.4.1 (EDO lineal)**.** *Unha EDO de primeira orde (con variable dependente y e variable independente x) é lineal se e só se a podemos escribir como*

$$a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) = 0.$$

Equivalentemente, posto que $a_2 \neq 0$ (xa que a EDO é de orde un), a EDO é lineal se e só se a podemos escribir como

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

A esta última forma de escribir unha EDO lineal denomínaselle forma canónica da ecuación lineal.

2.4.2 Procedemento de resolución

As EDOs lineais son un caso particular de EDOs que admiten un factor integrante con respecto á variable independente.

Exercicio. Comproba facendo todos os cálculos descritos na sección anterior que un factor integrante dunha EDO lineal en forma canónica ven dado por $\mu(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

Unha vez calculado o factor integrante e multiplicando a EDO lineal por este, poderíamos proceder como no caso das EDOs exactas e calcular a solución empregando o procedemento de resolución xa visto no caso das EDOs exactas. A pesar de que esta forma de proceder é correcta e sempre se pode aplicar, pode resultar algo longa. No que segue, definimos un procedemento alternativo máis sinxelo para calcular a solución dunha EDO lineal:

- Calcular un factor integrante asociado á EDO lineal

  $$\mu(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

  onde debemos ter en conta que podemos considerar nula o valor da constante de intergración.
- Posto que $\mu'(x) = p(x)\mu(x)$, entón

  $$\mu(x)y'(x) + p(x)\mu(x)y(x) = (\mu(x)y(x))' = q(x)\mu(x),$$

- Integrando ambos lados da igualdade con respecto á variable independente obtense

  $$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)\mathrm{d}x + C\right),$$

  sendo C é unha constante de integración arbitraria.

Unha vez máis, como a EDO é de orde un e existe unha constante de integración, a anterior solución é a solución xeral da EDO. Ademais, posto que a EDO é lineal non existirán solucións singulares e calquera das solucións particulares terase que deducir forzosamente da solución xeral.

Exercicio. a) Calcula a solución xeral da EDO $tu' + 2u = t^2 - t + 1$.
b) Calcula a solución do seguinte PVI:

$$\begin{cases} tu' + 2u = t^2 - t + 1, \\ u(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

c) Resolve o mesmo PVI cambiando a condición inicial por esta outra: $u(0) = 1$.
d) ¿É posible atopar unha solución do PVI que satisfaga a condicións iniciais $u(1) = 5/12$?
e) ¿É posible atopar unha solución do PVI que satisfaga dúas condicións iniciais $u(1) = 5/12$ e $u(2) = 5/6$? ¿E as condicións $u(1) = 5/12$ e $u(2) = 1$? ¿E as condicións $u(1) = 5/12$ e $u(-1) = 13/12$?

2.5 Aplicacións das EDOs de primeira orde

Na última das seccións do Tema 1, describimos algúns modelos que gobernaban o comportamento de fenómenos físicos como a transferencia de calor ou a evolución temporal da carga (ou da intensidade) dun circuíto en serie. Agora xa estamos en posición de poder resolver as EDOs que alí aparecían e calcular os problemas de valor inicial que enunciamos daquela.

2.5.1 A Lei de arrefriamento de Newton

Recordemos que a evolución da temperatura θ dun corpo sólido ao longo dun intervalo de tempo $[0, T]$ (que posúe unha superficie A na que ten unha temperatura uniforme e polo que está a perder enerxía térmica de forma uniforme co seu entorno, que está a temperatura θ_{en}), viña gobernada polo problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\sigma A}{C}(\theta - \theta_{\text{en}}) \qquad \text{en } [0, T], \\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

sendo C a capacidade calorífica e σ o coeficiente de transmisión térmica do corpo e supoñendo coñecida a temperatura θ_0 no instante $t = 0$. Evidentemente, o valor do tempo final T neste caso ven marcado polo dominio temporal de interese do estudo da temperatura do corpo, e posto que os coeficientes se están a supoñer constantes, a EDO está ben definida para calquera $t \in [0, \infty)$.

Exercicio. a) Supoñamos que (na versión adimensionalizada do problema) $C = 10$, $\sigma = 1$. Calcula a solución cando $\theta_0 = 10$ e $\theta_{\text{en}} = 20$. Neste caso, ¿a temperatura θ é unha función crecente ou decrecente? ¿Posúe algunha asíntota? Calcula a solución cando $\theta_0 = 20$ e $\theta_{\text{en}} = 10$ e responde

ás mesmas preguntas que anteriormente. Por último, fai o mesmo no caso no que $\theta_0 = \theta_{\text{en}}$ ¿Cal é a solución do PVI neste caso?
b) Supoñamos de novo que $C = 10$, $\sigma = 1$, pero agora a temperatura que rodea ao medio varía con respecto ao tempo como $\theta_{\text{en}} = 10 + 5\sin(2\pi t/24)$ debido aos ciclos noite/día. Se o tempo está medido en horas, calcula ao cabo de catro días cal é a temperatura do corpo sabendo que o corpo posúen unha temperatura inicial de $\theta_0 = 9$. ¿Se $t = 0$ se corresponde ás 6am, ¿podes dar unha estimación aproximada da hora á que se producen os máximos e mínimos de temperatura?

2.5.2 Circuíto RC en serie

Se denotamos por q a carga eléctrica dun circuíto que posúe unha única resistencia e un condensador, que están alimentados por unha fonte eléctrica que aplica unha voltaxe $e(t)$ ao circuíto no instante t, e se coñecemos a carga q_0 do circuíto no instante inicial $t = 0$, a carga eléctrica q satisfai o seguinte PVI:

$$\begin{cases} R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}q = e & \text{en } [0, T], \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

onde R é o valor da resistencia e C é a capacitancia do condensador.

Exercicio. a) Supoñamos que (na versión adimensionalizada do problema) $R = 5$, $C = 2$ e $e(t) = 2\cos(t)$. Calcula a solución cando $q_0 = 10$. Se apagamos a batería que proporciona voltaxe externa: ¿Que lle ocorre á carga ao longo do tempo? Se a batería permanece apagada dende o comezo e $Q_0 = 0$, ¿como é a carga q ao longo do tempo? Por último, considera o caso no que a batería ten un cargador retro-alimentado sobre o circuíto de forma que a voltaxe exterior aumenta conforme a carga do circuíto de forma que $e(t) = 5q(t)$. Se a carga inicial era $q_0 = 0.5$ ¿Cal é a solución do PVI neste caso?
b) Supoñamos de novo que $R = 5$, e $q_0 = 0.5$, pero agora que debido á pobre calidade do condensador, a súa capacitancia diminue a medida que aumenta o tempo de uso do condensador de forma que $C(t) = 2i(t)$ sendo i a intensidade de corrente do circuíto. Baixo estas condicións de traballo, calcula a carga do circuíto cando a voltaxe da batería ven dada por $e(t) = 2\cos(t)$.

2.6 Exercicios

1. Resolve as seguintes EDOs (calculando a solución xeral):

   (a) $xyy' = y - 1$. (b) $y' + y\tan(x) = 0$.

   (c) $xy' = (x+1)(y-1)$. (d) $y' = e^{3x-2y}$.

2. Resolve as seguintes EDOs (comprobando se son exactas):

   (a) $(\sin(x)\sin(y) - xe^y)\mathrm{d}y - (e^y + \cos(x)\cos(y))\mathrm{d}x = 0.$

   (b) $(ye^{xy} + 2x)\mathrm{d}x + (xe^{xy} - 2y)\mathrm{d}y = 0.$

   (c) $(\sin(y) - y\sin(x))\mathrm{d}x + (x\cos(y) + \cos(x))\mathrm{d}y = 0.$

   (d) $(2x\tan(y) + 5)\mathrm{d}x + (x^2\sec^2(y))\mathrm{d}y = 0.$

3. Comproba que as seguintes EDOs admiten o factor integrante indicado e obtén a solución xeral en cada caso:

   (a) $(4x^2y + 2y^2)\mathrm{d}x + (3x^3 + 4xy)\mathrm{d}y = 0$ con factor integrante $\mu(x, y) = xy^2$.

   (b) $(12 + 5xy)\mathrm{d}x + \left(\frac{6x}{y} + 3x^2\right)\mathrm{d}y = 0$ con factor integrante $\mu(x, y) = x^n y^m$, m, n enteiros positivos.

   (c) $(y - x)\mathrm{d}y + (x + y)\mathrm{d}x = 0$ con factor integrante $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

   (d) $\left(3y^2 + 5t^2y\right)\mathrm{d}t + \left(3ty + 2t^3\right)\mathrm{d}y = 0$ con factor integrante $\mu(t, y) = yt^2$.

4. Resolve as seguintes EDOs:

   (a) $(4x + 3y^3)\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y = 0.$ (b) $(4xy^2 + y)\mathrm{d}x + (6y^3 - x)\mathrm{d}y = 0.$

   (c) $2x\mathrm{d}x - x^2\cot(y)\mathrm{d}y = 0.$ (d) $(2x + y)\mathrm{d}x + (x^2 + xy + x)\mathrm{d}y = 0.$

5. Clasifica as EDOs seguintes, identificándoas e indicando brevemente como sería o procedemento de resolución sen chegar a resolvelas:

   (a) $(y - 1)\sin(x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$

   (b) $z' + 2t^2z = tz.$

   (c) $(\sin(y) - y\sin(x))\mathrm{d}x + (x\cos(y) + \cos(x))\mathrm{d}y = 0.$

6. Calcula a solución xeral das seguintes EDOs:

   (a) $xy' - 3y = x^4.$ (b) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}.$

   (c) $(1 + x^2)\mathrm{d}y + (2xy - \cot(x))\mathrm{d}x = 0.$ (d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2.$

   (e) $y - x + xy\cot(x) + xy' = 0.$ (f) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 2xy = 6ye^{y^2}.$

7. Calcula a solución do PVI

$$\begin{cases} y' + 2xy = f(x), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

   onde f é unha función descontinua definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ -x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

8. Considera a EDO
$$f^2(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 3f(y)f'(y)\,x = f'(y),$$
sendo $f(y)$ unha función con valores estritamente positivos.

   (a) Calcula a solución xeral.

   (b) Se $f(y) = \cos(2y)$ en $y \in [0, \pi/4]$, calcula a solución particular que satisfai a condición inicial $x(0) = 2$.

9. Nun circuíto eléctrico estase a usar unha barra de ferrita como elemento condutor. Debido ás condicións ambientais esta barra presenta un estado de oxidación avanzado. Se denotamos por x o tanto por un de superficie que presenta óxido e por y o tanto por un de superficie que está libre de óxido, sábese que a evolución do proceso de oxidación responde á EDO
$$\frac{dx}{dt} = kxy.$$
Se fai un mes a superficie estaba oxidada ao 50% e na actualidade a oxidación está presente nun 73,11%: ¿En que momento a superficie de oxidación alcanzará o 90%?

10. Supoñamos que a evolución da temperatura dun corpo obedece a lei de arrefriamento de Newton. A súa temperatura inicial é de 80°C e colócase nun medio cunha temperatura constante de 50°C. Despois de 5 minutos, a temperatura do corpo descendeu ata os 70°C.

   (a) Acha a temperatura do corpo despois de 10 minutos.

   (b) Cando a súa temperatura será de 60°C?

11. Nun proceso industrial metalúrxico, extráese dun forno de indución unha placa de silicio a unha temperatura de 250°C e despois de 3 minutos, a súa temperatura descende ata os 120°C, nunha temperatura ambiente de 20°C. Calcula canto tempo tardará en descender a temperatura da placa para poder ser manipulada a 45°C.

12. Os materiais semicondutores incrementan as súas propiedades eléctricas se traballan a moi baixas temperaturas. Despois de introducir unha barra semicondutora nun tanque de nitróxeno líquido, a barra alcanza os 110°K de temperatura. Despois de traballar con ela no laboratorio (a temperatura constante de 22°C) durante 12 horas, a temperatura da barra é de 220°K: ¿cal é o momento óptimo para traballar coa barra semicondutora se as propiedades eléctricas óptimas acádanse a 140°K?

13. Consideremos un circuíto do tipo RL (resistencia e bobina) en serie cunha forza electromotriz constante $e(t) = e_0$, onde a EDO que o goberna é
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e(t),$$

sendo i a intensidade de corrente do circuíto e satisfacendo a condición inicial $i(0) = i_0$. Calcula a solución particular correspondente aos datos:

$$R = 0.2\,\Omega, \quad L = 0.1\,\mathrm{H}, \quad e_0 = 1\,\mathrm{V}, \quad i_0 = 20\,\mathrm{A}.$$

¿Que carga eléctrica posúe o circuíto ao cabo de 3 segundos despois do instante inicial?

14. Consideremos un circuíto do tipo RC en serie con forza electromotriz sinusoidal $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ coa condición inicial $q(0) = q_0$. Calcula a solución particular correspondente aos datos:

$$R = 0.2\,\Omega, \quad C = 10\,\mathrm{F}, \quad e_0 = 10\,\mathrm{V}, \quad q_0 = 20\,\mathrm{C}, \quad \omega = 20\,\text{rad/s}.$$

¿Que intensidade de corrente posúe o circuíto ao cabo de 5 segundos despois do instante inicial?

15. Na caída libre dun paracaidista a forza de rozamento do aire é proporcional á velocidade, onde a constante de proporcionalidade depende de dous valores: k_1 co paracaídas pechado e k_2 co paracaídas aberto. Se un paracaidista de 80 kg salta dende unha avioneta a unha altura de 4000 m, sendo as constantes de resistencia do aire $k_1 = 31.1$ kg/s e $k_2 = 78.4$ kg/s:

    (a) Calcula o tempo que tarda en chegar ao chan e a velocidade final se o paracaídas non se puido abrir.

    (b) Calcula o tempo que tarda en chegar ao chan e a velocidade final se o paracaídas se abre aos 15 s do lanzamento.

2.7 Práctica 2. Resolución de EDOs de primeira orde

Nesta práctica aprenderemos a resolver ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde facendo uso do comando `dsolve` de OCTAVE. Ademais tamén resolveremos problemas de valor inicial que involucran EDOs de orde un. En primeiro lugar debemos a estudar como resolver ecuacións e como calcular derivadas. Unha vez feito isto, pasaremos a describir os comandos para a resolución de EDOs e PVIs.

Resolución de ecuacións

Na práctica 1 estudamos como traballar con variables simbólicas, asignarlles valores, definir funcións ou manipular expresións. O que daquela non traballamos foi como definir ecuacións en OCTAVE. As ecuacións introdúcense en OCTAVE mediante cadeas de texto nas que aparecen dúas expresións relacionadas mediante un símbolo "=". Por exemplo, a ecuación $2x^2-3x+2 = 5xy-3a$ se trasladaría á nosa sesión de traballo como:

```
>>>equ='2*x^2-3*x+2=5*x*y-3*a'
```

```
ans = 2x^2-3x+2=5xy-3a
```

Para resolver calquera ecuación (sempre que sexa posible atopar a súa solución analítica exacta) empregaremos o comando `solve`. Seguindo co exemplo anterior, para resolver a anterior ecuación empregaríamos a orde

```
>>>x=sym('x');
>>>solve('2*x^2-3*x+2=5*x*y-3*a',x)
ans = [x = -(sqrt(25*y^2+30*y-24*a-7)-5*y-3)/4,
       x = (sqrt(25*y^2+30*y-24*a-7)+5*y+3)/4]
```

onde o segundo argumento lle indica a OCTAVE cal é a variable incógnita (neste caso x) que queremos calcular. Evidentemente, o resto das variables que aparecen na ecuación (neste caso, a e y) son consideradas como parámetros.

Nalgúns casos, a solución da ecuación non se pode calcular de forma analítica e OCTAVE non é capaz de calculala (por exemplo, no caso de $\log(t) = 1 - 5t$). Neste tipo de problemas, debemos buscar a solución numericamente mediante o comando

```
fzero(fun, [a, b])
```

que resolve a ecuación $\mathrm{fun}(x) = 0$ onde `fun` contén a expresión da ecuación e `a`, `b` son os extremos inferior e superior do intervalo onde buscamos a solución.

Exercicios

1. Resolve as seguintes ecuacións tendo en conta a variable incógnita que se indica en cada caso

   (a) $e^{ax} - 3 = 0$ onde a incógnita é x.

   (b) $\sin(2\pi f t) = 1$ onde a incógnita é t.

   (c) $e^{y} - y = 2$.

Cálculo de derivadas

O comando que usaremos para calcular derivadas de funcións reais dunha variable real é o comando `diff`. Para calcular a derivada primeira dunha función dunha variable basta empregar a orde

```
diff(expresion, variable, orde)
```

onde `expresion` é a expresión da función a derivar, `variable` é o argumento que define a variable con respecto á que se deriva, e `orde` é o argumento opcional (por defecto, `1`) que define a orde

da derivada que se calcula. Por exemplo se quixeramos calcular a primeira derivada da función $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sin(2x)}$, escribiríamos:

```
>>>diff(exp(sin(2*x))/2,x)
ans = 1.0*e^sin(2.0*x)*cos(2.0*x)
```

O cálculo simbólico de OCTAVE tamén permítenos derivar funcións que dependen de parámetros (que son tratados como constantes). Por exemplo, para derivar $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sin(ax)}$ executaríamos:

```
>>>a=sym('a');
>>>diff(exp(sin(a*x))/2,x)
ans = 0.5*a*e^sin(a*x)*cos(a*x)
```

Se o que queremos é calcular unha derivada de orde superior, e non a primeira derivada, empregaríamos as seguintes ordes (para as derivadas de orde 2 e 3, respectivamente):

```
>>>diff(exp(sin(a*x))/2,x,2)
ans = 0.5*a^2*e^sin(a*x)*cos(a*x)^2-0.5*a^2*e^sin(a*x)*sin(a*x)
>>>diff(exp(sin(a*x))/2,x,3)
ans = -1.5*a^3*e^sin(a*x)*cos(a*x)*sin(a*x)
       +0.5*a^3*e^sin(a*x)*cos(a*x)^3-0.5*a^3*e^sin(a*x)*cos(a*x)
```

Para utilizar a derivación implícita, o procedemento non é tan simple. Vexámolo cun exemplo: imos a calcular a derivada implícita da función $y(x)$ que satisfai a ecuación $\sqrt{xy} = 1+x^2y$. Para facer isto, temos que indicarlle a OCTAVE que y é unha función de x mediante o comando `y=sym('y(x)')`. Empregaremos os seguintes comandos:

```
>>>y=sym('y(x)');
>>>equ=diff('sqrt(x*y(x))=1+x^2*y(x)',x)
equ = (x*diff(y(x),x,1)+y(x))/(2*sqrt(x*y(x)))= x^2*diff(y(x),x,1)+2*x*y(x)
>>>solve(equ,diff(y,x))
ans = [diff(y(x),x,1)= -(4*x*y(x)*sqrt(x*y(x))-y(x))/(2*x^2*sqrt(x*y(x))-x)]
```

A expresión da derivada da función $y(x)$ é o resultado final do último comando que resolve a ecuación gardada na variable `equ` e no que se despexa o valor de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Exercicios

1. Calcula empregando OCTAVE a primeira derivada das seguintes funcións. Unha vez feito isto, comproba con lapis e papel que o resultado é correcto:

   (a) $f(x) = 5x^{-2}(x+3)$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$

   (c) $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$ onde c é unha constante

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$ (e) $f(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$

(f) $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ (g) $f(t) = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t$

(h) $g(x) = \log(\log(x)^2)$ (i) $f(x) = x^2 2^x$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{b^2}\left(\log(ax+b) + \dfrac{b}{ax+b}\right)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

2. Calcula a derivada das funcións $y(x)$ empregando o procedemento implícito:

   (a) $\sin(xy) + 3y^2 + 5x = 4$

   (c) $\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + y^2} = 0$ onde a é unha constante dada

   (d) $e^{2(x^2+y^2)} = 1$

Campo de vectores tanxentes e traxectorias solución dunha EDO

O comando `plotdf` crea un gráfico do campo de vectores tanxentes asociado a unha EDO de primeira orde, descrita pola expresión

$$y' = f(x, y),$$

onde y é e variable independente e x a variable dependente. Vexamos cun exemplo o seu uso: para debuxar o campo de direccións asociado á EDO $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = x - y$, escribiríamos o comando

```
>>>x=sym('x');y=sym('y');
>>>plotdf(x-y,x,y,[-2,2])
```

onde se está a considerar a x como variable independente (segundo argumento do comando), y é a variable dependente (terceiro argumento) e tanto o campo de vectores tanxentes como todas as solucións particulares se representan graficamente no conxunto $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

O resultado da anterior orde é a representación gráfica dun campo de direccións que determinan todas as traxectorias que son solucións particulares da EDO (véxase a gráfica da esquerda de Figura 2.1). Ao facer clic sobre un punto (x_0, y_0) do plano xy sobre a zona representada automaticamente se debuxa unha solución particular da EDO que satisfai a condición inicial $y(x_0) = x_0$ (véxase a gráfica da dereita de Figura 2.1).

Exercicios

1. Debuxa os campos de vectores seguintes e sinala de forma aproximada a solución particular da EDO que pasa polo punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$

   (a) $y' = \dfrac{x}{y}$, (b) $y' = -\dfrac{x}{y}$,

   (c) $y' = \dfrac{y - 4x}{4y + x}$, (d) $y' = -\dfrac{y}{y - 2x}$,

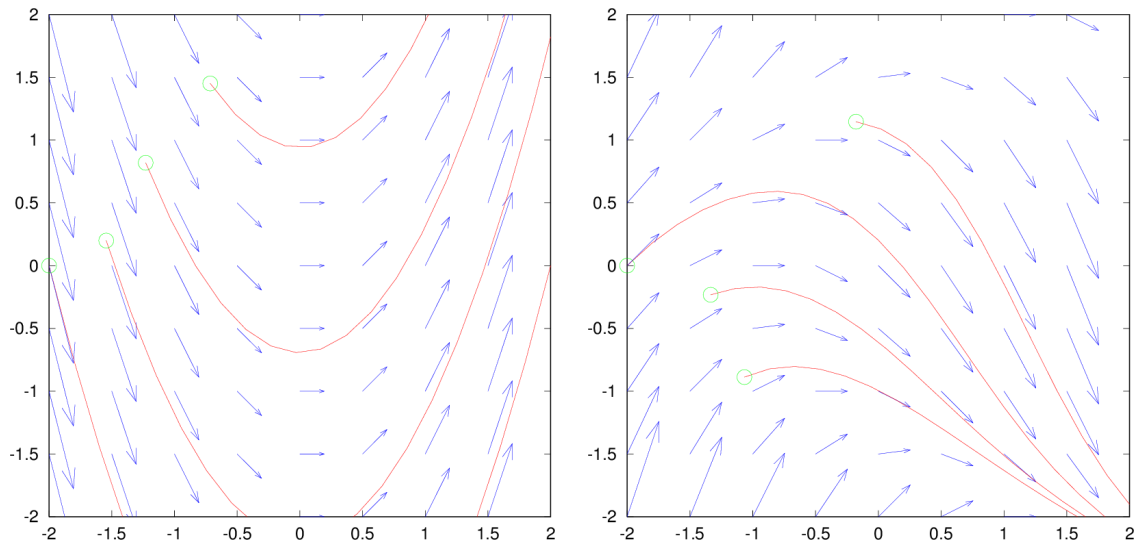


Figure 2.1: No panel esquerdo: Campo de vectores tanxentes $(1, 2x)$ asociados á EDO $y' = 2x$ e algunhas das solucións particulares da EDO. No panel dereito: Campo de vectores tanxentes $(1, xy)$ asociados á EDO $y' = 0.5y^2 - x - 1$ e algunhas das solucións particulares da EDO.

(e) $y' = \dfrac{y}{y-x}$, (f) $y' = -\dfrac{\sqrt{|x|}}{y}$.

A partir das representacións gráficas, escolle un punto (x_0, y_0) no que impoñer as condicións iniciais para o que non existe unicidade de solución.

Resolución simbólica de EDOs

O comando para resolver unha EDO de forma simbólica é `dsolve`. A sintaxe para o uso do comando `dsolve` é a seguinte:

```
dsolve(expresion_EDO, var_independente, var_dependente)
```

onde `expresion_EDO` é a ecuación que define a EDO e `var_dependente` e `var_independente` son respectivamente a variable dependente e independente. Por exemplo, se queremos resolver a EDO $y' = 5y$, empregaríamos as ordes

```
>>>x=sym('x'); y=sym('y(x)');
>>>edo='diff(y(x),x,1)=5*y(x)';
>>>dsolve(edo,x,y)
ans = y(x)=c*e^(5*x)
```

Para resolver un PVI con condición inicial $y(x_0) = y_0$ empregaremos o mesmo comando `dsolve` con dous argumentos adicionais que serían os valores de x_0 e y_0. Seguindo co exemplo anterior,

se impoñemos a condición inicial $y(0) = 2$, a solución do problema de valor inicial se calcula co mesmo comando `dsolve` pero agora engadindo a información da condición inicial como os dous últimos argumentos:

```
>>>dsolve(edo,x,y,0,2)
ans = y(x)=2*e^(5*x)
```

Debemos remarcar que a anterior expresión da solución non é unha función que poidamos avaliar en OCTAVE. Lembremos que para poder definir unha función a partir desas expresións teríamos que usar o seguinte comando:

```
>>>f=@(x)2*exp(5*x)
```

co que xa estaría definida a función $f(x)$ usando o segundo membro da ecuación $y(x) = 2e^{5x}$.

Exercicios

1. Segundo a lei de arrefriamento de Newton, a evolución da temperatura dun corpo ao longo do tempo depende da diferencia entre a súa temperatura e a do medio que o rodea. Se $\theta(t)$ é a temperatura do obxecto no instante t e θ_{en} é a temperatura constante do medio que o rodea, entón satisfaise a EDO

$$\theta' = -k(\theta - \theta_{\text{en}})$$

onde $k = 0.04$ é unha constante de proporcionalidade positiva.

Como aplicación da anterior lei, consideramos o seguinte caso: Nun laboratorio coa temperatura de $21°$C deixase arrefriar un termómetro de mercurio cunha temperatura inicial ($t = 0$ s) de $70°$C.

   (a) Enuncia o correspondente PVI e resólveo empregando o comando `dsolve`.

   (b) Comproba, co comando `diff` que a función calculada por OCTAVE é a solución da ecuación diferencial.

   (c) Despois de 100 segundos, o termómetro marca $50°$C?

   (d) Representa graficamente a solución obtida, co eixe t entre 0 e 300. Representa na mesma gráfica a solución constante $\theta(t) = 21$.

   (e) Que lle ocorre á temperatura despois de varias horas?

2. Considera o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 0.1\sqrt{y}x^2, \\ y(2) = 4. \end{cases}$$

   (a) Intenta calcular a súa solución con OCTAVE e resólveo con lapis e papel.

3. Consideremos o PVI seguinte:

$$\begin{cases} y' + \sqrt{1-y^2} = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) ¿Satisfai este problema as hipóteses do teorema de Picard relativas á existencia e unicidade de solución?

(b) Resolve o problema anterior empregando o comando `dsolve` de OCTAVE.

(c) Comproba, co comando `diff`, que a función obtida é a solución do PVI.

(d) Resolve o problema analiticamente con lapis e papel. ¿Obtés a mesma solución que con OCTAVE? ¿Existe algunha outra solución do problema ademais da proporcionada por OCTAVE?

(e) Calcula a solución xeral da EDO involucrada no PVI e representa graficamente algunhas solucións particulares, restrinxindo o valor de y entre -1 e 1.

Chapter 3

Introdución á resolución numérica de EDOs

No anterior Tema 2, xa estudamos como resolver ecuacións diferenciais ordinarias (calculando a expresión explícita ou implícita da súa solución xeral) e, unha vez feito isto, tamén analizamos como podíamos resolver os problemas de valor inicial (PVIs) asociados. A pesares de que xa coñecemos varios procedementos de cálculo elementais para resolver algúns destes problemas, debemos ter presente que coas ferramentas analíticas que coñecemos soamente podemos resolver de forma satisfactoria un número moi reducido de EDOs (e os seus PVIs asociados).

Exemplo. Consideremos un circuíto en serie RL onde (na súa versión adimensionalizada), a resistencia, a inductancia e a forza electromotriz veñen dadas respectivamente por $R = 5$, $L(t) = 2 - e^t$, e $e(t) = 2\cos(t)$, onde se está a supoñer que o condensador e a bobina sofren fatiga e perden as propiedades nominais que posuían. Sabendo o valor da carga eléctrica inicial: poderíamos resolver analiticamente o PVI asociado?

Exemplo. Supoñamos que un corpo de masa m únese verticalmente a un resorte (onde a constante de elasticidade k é igual á constante k_0) e somérxese nun líquido que exerce unha forza de rozamento sobre o corpo proporcional á velocidade (sendo η a constante asociada a esta fricción). Despois de que o corpo oscilase varios ciclos (por exemplo, $t \geq 10000$ s), sábese que o resorte perde parte das súas propiedades elásticas e $k(t) = k_0 e^{-(\beta - 10000)t}$ onde β é o coeficiente de decaemento de fatiga. A EDO que goberna o movemento do corpo ven dado por

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - ku = mg,$$

onde u é o desprazamento do corpo e g é a aceleración producida pola gravidade. Coñecendo o desprazamento e a velocidade inicial do corpo: poderíamos resolver analiticamente o PVI asociado?

3.1 Que é a resolución numérica?

Posto que a maioría das aplicacións reais na Enxeñaría requiren a resolución de problemas de valor inicial ou de valor de contorno para os que non posuímos un procedemento analítico exacto, debemos analizar que outros tipos de métodos están á nosa disposición para calcular unha solución, aínda que esta sexa aproximada.

Se o noso obxectivo é resolver un PVI enunciado como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ en } (a, b), \\ y(a) = y_a, \end{cases}$$

é dicir, se o que queremos é calcular o valor da función $y(t)$ en calquera punto $t \in (a, b)$, pero ningún dos procedementos de cálculo que estudamos nos Temas 1 e 2 son aplicables á anterior EDO, debemos rebaixar as nosas expectativas e conformarnos con:

- calcular de forma aproximada os valores de $y(t)$,
- soamente nalgúns puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ do intervalo $[a, b]$.

En consecuencia, o noso novo obxectivo non é o de calcular un función que sexa solución do PVI anterior, senón que soamente pretenderemos calcular un conxunto de valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ (véxase a Figura 3.1) que sexan unha aproximación o máis precisa posible,

$$y(t_j) \approx y_j \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n,$$

dos valores da solución exacta $y(t)$ nalgúns puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ que escolleremos.

Como se pode observar na Figura 3.1, se fose posible calcular a solución exacta do PVI descrito anteriormente e a aproximación numérica fora suficientemente precisa, a gráfica da solución exacta formada polo trazo continuo $\{(t, y(t)), t \in (a, b)\}$ (en azul) e os puntos dados polos valores aproximados $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$ deberían estar moi próximos na gráfica.

Os puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ onde se procuran os valores aproximados da solución exacta $y(t)$ denomínanse nodos ou puntos da discretización. Nesta materia, todos os nodos de discretización serán considerados como equidistantes, é dicir, $t_j = a + jh$ con $j = 0, \ldots, n$ sendo

$$h = \frac{b - a}{n}$$

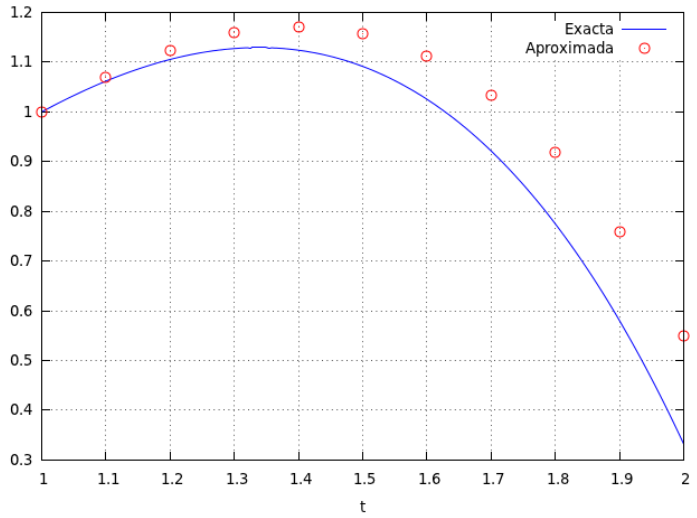


Figure 3.1: Representación gráfica da solución exacta dun problema de valor inicial (en liña continua azul) enunciado no intervalo $(1, 2)$ e a aproximación numérica feita nos puntos $t_0 = 1, t_1 = 1.1, \ldots, t_{10} = 2$ (círculos en vermello).

o paso de discretización (que mide a distancia entre dous nodos consecutivos no intervalo (a, b)). Nas seguintes seccións estudaremos varios métodos numéricos para construír os valores aproximados $y_0, y_1, \ldots, y_n$ tanto para PVIs de orde un e dous como para PVCs de orde dous.

3.2 Resolución numérica dun PVI de orde un

Como acabamos de ver, cando nos enfrontamos a un problema de valor inicial que involucra unha EDO da que non sabemos calcular analiticamente a súa solución xeral, temos que conformarnos con aproximar a súa solución mediante un método numérico. Todos os métodos numéricos que imos a ver ao longo deste Tema 3 baséanse na mesma idea: aproximar o valor $y_0, y_1, \ldots, y_n$ da solución do PVI:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ en } (a, b), \\ y(a) = y_a, \end{cases}$$

sobre unha grella de puntos equiespaciados $t_0, t_1, \ldots, t_n$ onde

$$t_j = a + jh, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \; j = 0, \ldots, n,$$

de forma tal que se pode proceder nos seguintes pasos:

Paso 0: Fíxase $y_0 = y_a$,

Paso 1: Calcúlase co método numérico y_1 coñecendo y_0,

Paso 2: Calcúlase co método numérico y_2 coñecendo y_0, y_1,

...

Paso k: Calcúlase co método numérico y_k coñecendo $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$,

...

Paso n: Calcúlase co método numérico y_n coñecendo $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

A dificultade para avanzar en cada un destes pasos radica en que descoñecemos como substituír na EDO os valores de $y'(t_k)$ e de $f(t_k, y(t_k))$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, xa que xustamente non sabemos calcular analiticamente a solución y. Polo tanto, imos ter que aproximar cada un destes termos da EDO mediante unha expresión coñecida (que si poida ser calculada). No que segue imos a ver os métodos máis simples para a resolución de PVIs e como en cada caso aproximamos de forma diferente os termos $y'(t_k)$ e de $f(t_k, y(t_k))$: o método de Euler e a familia de métodos de Runge-Kutta de segunda orde.

Unha vez que temos definido un método numérico, deberíamos coñecer como de preciso é (ou ser capaz de comparar dous métodos para escoller o máis preciso), ou o que é o mesmo, saber como estimar o erro que estamos a introducir coas aproximacións feitas no método numérico. Para iso, debemos introducir tres definicións: o erro de truncamento local, o erro global acumulado e a orde dun método numérico.

Definición 3.2.1. *Consideremos un método numérico que aproxima a solución exacta $y(t)$ dun PVI nos nodos t_k no intervalo (a, b) cos valores numéricos y_k, $k = 0, 1, \ldots, n$.*

a) O erro de truncamento local no nodo t_k é a diferenza entre o valor exacto $y(t_k)$ e o valor aproximado y_k cando este último se calcula supoñendo coñecidos exactamente y_{k-1}, y_{k-2}, $\ldots$, y_1, y_0, é dicir, cando $y_j = y(t_j)$ para $j = k, k-1, \ldots, 0$.

b) O erro global acumulado é o valor absoluto da diferenza entre o valor exacto no punto final $y(t_n) = y(b)$ e a aproximación y_n, é dicir, $|y(b) - y_n|$.

c) A orde dun método numérico defínese como o expoñente α da potencia h^α que aparece na expresión do erro global acumulado.

Evidentemente, o método numérico será máis preciso canto menor sexan os valores do erro de truncamento local e o erro global acumulado. Polo tanto, un método numérico será máis preciso canto maior sexa a súa orde.

3.2.1 Método de Euler

O método de Euler (tamén coñecido como método de Euler explícito) aproxima os termos da EDO $y'(t_k)$ e de $f(t_k, y(t_k))$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ mediante as seguintes fórmulas:

$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \qquad f(t_k, y(t_k)) \approx f(t_k, y_k).$$

Deste xeito, ao aproximar cada un dos dous membros da EDO por estas expresións resulta que

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k)$$

ou de forma equivalente, dado $y_0 = y_a$, cada unha das aproximacións nos puntos t_k calcúlanse como

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Á vista da expresión anterior, é claro que podemos calcular o valor de y_{k+1} a partir do valor que xa temos calculado na paso anterior y_k.

Exercicio. Calcula o erro de truncamento local e o erro global acumulado do método de Euler. Á vista das expresións obtidas: ¿como se podería mellorar a precisión das aproximacións calculada?

Posto que é un dos métodos máis sinxelos, o método de Euler explícito posúe unha interpretación gráfica que se basea no significado xeométrico da derivada (e a súa relación coa recta tanxente). No paso k do método, o que se está a resolver é o seguinte PVI no intervalo (t_k, t_{k+1}):

$$\begin{cases} \phi_k' = F_k \text{ en } (t_k, t_{k+1}), \\ \phi_k(t_k) = y_k, \end{cases}$$

onde F_k é un valor constante definido por $f(t_k, y_k)$. O valor de y_{k+1} ven determinado pola avaliación $\phi_k(t_{k+1})$. O anterior PVI é facilmente resoluble xa que a EDO asociada é lineal de orde un, e o PVI ten como solución a ecuación dunha recta que paso polo punto (t_k, y_k) e ten por pendente F_k, é dicir, $\phi_k(t) = y_k + F_k(t - t_k)$.

A Figura 3.2 amosa como os valores aproximados co método de Euler (puntos (t_k, y_k) en azul) están próximos á solución exacta (curva en vermello) e como estes calcúlanse como o punto de corte da recta $t = t_k$ coa recta definida por ϕ_k que pasa polo punto (t_k, y_k) e que é paralela á recta tanxente da gráfica da solución exacta no punto $(t_k, y(t_k))$.

3.2.2 Métodos de Runge-Kutta de segunda orde

A familia de métodos de tipo Runge-Kutta aproximan os termos da EDO $y'(t_k)$ e de $f(t_k, y(t_k))$ para $k = 1, \ldots, n-1$ de forma diferente a como se facía no método de Euler. Neste caso, empréganse

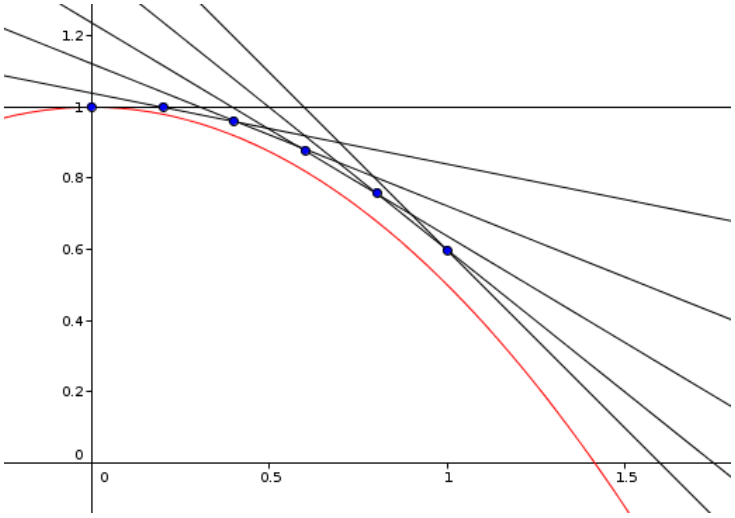


Figure 3.2: Representación gráfica da solución exacta dun problema de valor inicial $y' = -t^2/2 + 1$ (en liña continua vermella) enunciado no intervalo $(0, 2)$, das rectas definidas polas solucións ϕ_k asociadas a cada intervalo (t_k, t_{k+1}) (liñas continuas en negro) e da aproximación numérica feita nos nodos con paso de discretización $h = 0.2$ (círculos en azul).

as seguintes fórmulas:

$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \qquad f(t_k, y(t_k)) \approx A_1 f(t_k, y_k) + A_2 f(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}).$$

onde os valores $\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}$ calcúlanse como

$$\begin{aligned} \hat{t}_{k+1} &= t_k + Bh, \\ \hat{y}_{k+1} &= y_k + Cf(t_k, y_k), \end{aligned}$$

sendo A_1, A_2, B, C constantes que determinan cada un dos métodos que pertencen a esta familia. Definidos deste xeito, é fácil comprobar que no paso k dun método de tipo Runge-Kutta o valor y_{k+1} pódese calcular explicitamente a partir do valor xa calculado anteriormente y_k, posto que tanto a expresión de y_{k+1} como de $\hat{y}_{k+1}$ dependen soamente de y_k.

Dependendo dos valores das constantes A_1, A_2, B, C podemos deducir distintos métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial de orde un:

- Método de Euler mellorado (tamén chamado método de Heun): neste caso escóllese $A_1 = A_2 = 1/2$ e $B = C = 1$. Ao substituír nas expresións do método de Runge-Kutta obtense que, dada a condición inicial $y_0 = y_a$, cada unha das aproximacións no punto t_k calcúlanse

como

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\
\hat{t}_{k+1} &= t_k + h = t_{k+1}, \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1})\right),
\end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Neste caso, o que se está a facer é aproximar o segundo membro da EDO mediante a semi-suma (ou promedio) dos valores de f nos puntos (t_k, y_k) e $(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$, sendo este último o punto que correspondería ao paso k no método de Euler explícito descrito na sección anterior.

- Método de Euler modificado (tamén chamado método do punto medio): neste caso escóllese $A_1 = 0,\ A_2 = 1$ e $B = C = 1/2$. Ao substituír nas expresións do método de Runge-Kutta obtense que, dada a condición inicial $y_0 = y_a$, cada unha das aproximacións no punto t_k calcúlanse como

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k), \\
\hat{t}_{k+1} &= t_k + \frac{h}{2}, \\
y_{k+1} &= y_k + hf(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}),
\end{aligned}$$

  para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Como se pode comprobar a partir das expresión anteriores, o segundo membro da EDO estase a aproximar mediante o valor da función f no punto medio do intervalo (t_k, t_{k+1}) despois de realizar un paso do método de Euler explícito sobre unha grella de puntos con paso de discretización $h/2$.

- Método de Ralson: neste caso escóllese $A_1 = 1/3,\ A_2 = 2/3$ e $B = C = 3/4$. Ao substituír nas expresións do método de Runge-Kutta obtense que dada a condición inicial $y_0 = y_a$, cada unha das aproximacións no punto t_k calcúlanse como

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{k+1} &= y_k + \frac{3h}{4} f(t_k, y_k), \\
\hat{t}_{k+1} &= t_k + \frac{3}{4} h, \\
y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{1}{3} f(t_k, y_k) + \frac{2}{3} f(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1})\right),
\end{aligned}$$

  para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Neste caso, o que se está a facer é aproximar o segundo membro da EDO mediante unha suma ponderada dos valores de f nos puntos (t_k, y_k) e $(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$, sendo este último o punto o que correspondería a avanzar unha etapa co método de Euler explícito cun paso de discretización $3h/4$.

Calquera destes tres métodos teñen un erro de truncamento local de orde tres e polo tanto, os métodos numéricos descritos nesta sección son de orde dous.

Exercicio. Calcula o erro de truncamento local e o erro global acumulado do método de Heun. Á vista das expresións obtidas: ¿como se podería mellorar a precisión das aproximacións calculada?

Aínda que queda fora do temario desta materia, poderíamos definir moitos outros métodos numéricos da familia de Runge-Kutta asignando valores diferentes ás constantes A_1, A_2, B, C. Sen embargo, os valores destas constantes non poden ser asignados de forma arbitraria, senón que teñen certas restricións que deben ser satisfeitas. Necesariamente, para obter un método numérico de segunda orde, o erro local de truncamento debe ser proporcional a h^3 e polo tanto nos métodos de Ruge-Kutta, débese satisfacer $A_1 + A_2 = 1$.

Proposición 3.2.2. *Sexa un método numérico da familia de Runge-Kutta de orde dous, para resolver un PVI $y' = f(t, y)$ no intervalo (a, b) con condición inicial $y(a) = y_a$ entón necesariamente $A_1 + A_2 = 1$.*

Para probar o resultado anterior, basta ver un exemplo de PVI no que se $A_1 + A_2 \neq 1$, o método non ten un erro de truncamento local de orde tres. Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 1 \text{ en } (0, 1), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

Independentemente do método de Runge-Kutta escollido, neste caso particular onde $f(t, y) = 1$ resulta

$$y_{k+1} = y_k + h(A_1 f(t_k, y_k) + A_2 f(\hat{t}_{k+1}, \hat{y}_{k+1}) = y_k + h(A_1 + A_2).$$

Posto que neste caso é posible calcular analiticamente a solución exacta do PVI anterior, temos que $y(t) = t$ e o erro de truncamento local, por exemplo en $t_1 = 0 + h$ resulta

$$y(t_1) - y_1 = h - h(A_1 + A_2) = h(1 - A_1 - A_2),$$

co que obtemos un erro de truncamento que depende de h en lugar de depender de h^3, que é o característico dos métodos de Runge-Kutta de segunda orde.

3.3 Exercicios

1. Aplica o método de Euler explícito para aproximar a solución exacta y dos seguintes PVIs de orde un no punto $t = 0.2$, usando como paso de discretización $h = 0.1$:

   (a) $\begin{cases} y' = e^{-t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3ty' + y^2 = 5 - t, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

   Calcula tamén o valor aproximado, pero agora aplicando o método do punto medio.

2. Calcula a expresión do erro de truncamento local, o erro global acumulado e a orde dos seguintes métodos numéricos para resolver un PVI de orde un:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \text{ en } (a,b), \\ y(a) = y_a. \end{cases}$$

sobre unha grella uniforme de puntos $a = t_0, \ldots, t_n = b$ con paso de discretización h.

(a) Método de Euler implícito: Dado $y_0 = y_a$,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_{k+1}, y_{k+1}) \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

(b) Un método de Taylor explícito: Dado $y_0 = y_a$,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k) \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

(c) Outro método de Taylor explícito: Dado $y_0 = y_a$,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k) + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_k, y_k) \text{ para } k = 0, \ldots, n.$$

3. Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 5 \text{ en } (0,1) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dada unha grella de puntos no intervalo $(0,1)$ con paso de discretización $h = 0.01$:

- Calcula a solución exacta.
- Calcula o erro global acumulado neste PVI co método de Euler, ¿que podes deducir deste método a partir do resultado obtido?

4. Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 3t - 1 \text{ en } (0,1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Dada unha grella de puntos no intervalo $[0,1]$ con paso de discretización $h = 0.01$:

- Calcula a solución exacta.
- Calcula o erro global acumulado neste PVI co método de Heun, ¿que podes deducir deste método a partir do resultado obtido?

5. Debido a unha ensamblaxe defectuosa dunha bobina, o funcionamento dun circuíto eléctrico RL integrado produce certas vibracións que poden chegar a ser perigosas para a integridade da placa onde está situado, se as aceleracións son superiores a $5\,\mathrm{m/s^2}$.

Os elementos do circuíto RL veñen definidos por $R = 1\,\Omega$ e $L = 2e^{-t}$ H; Determínase que as aceleracións $a(t)$ das vibracións dependen da intensidade de corrente mediante a fórmula $a(t) = 10q(t)$.

Sabendo que a forza electromotriz do circuíto é nula, que a carga inicial do circuíto é nula e que a intensidade de corrente satisfai $i(0) = 1$ A, ¿É seguro ter en funcionamento o circuíto despois de 0.1 s?

3.4 Práctica 3. Resolución numérica de EDOs

Nesta práctica traballaremos cos métodos numéricos que nos permitirán calcular unha solución aproximada de problemas de valor inicial de orde un, en particular, co método de Euler explícito e algúns dos métodos de Runge-Kutta de orde dous.

Posto que estos métodos non están programados por defecto en OCTAVE, lembremos que debemos cargar as funcións que están incluídas na carpeta comrpimida `octaveODE.zip` que se achega con esta práctica.

Método de Euler e de tipo Runge-Kutta

Unha vez descomprimida a carpeta `octaveODE` e engadidas ás rutas de traballo de OCTAVE, teremos acceso aos comandos `euler`, `heun`, `euler_modified` e `ralson` no que están implementados respectivamente os métodos de Euler explícito, de Heun, do punto medio e de Ralson.

En primeiro lugar, recordemos cal é a descrición do método de Euler. Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ en } (a, b), \\ y(a) = y_a, \end{cases}$$

do que supoñeremos que posúe unha solución única, $y(t)$, con $t \in [a, b]$. Lembremos que dada unha grella de puntos equiespaciados $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ no intervalo $[a, b]$, é dicir

$$t_k = a + kh, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

sendo $h = (b - a)/n$ o paso da discretización, o método de Euler explícito calcula os valores aproximados da solución exacta $y_0, y_1, \ldots, y_n$ na grella de puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ co esquema: dado $y_0 = y_a$,

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para calcular estes valores aproximados, o comando `Euler` úsase do seguinte xeito:

`euler`($f(t, y)$, y, t, a, b, y_a, n)

onde $f(t, y)$ é o segundo membro da EDO involucrada no PVI de orde un, y é a variable dependente, t é a variable independente, a e b son os extremos inferior e superior do intervalo onde se define o PVI, y_a é o valor da condición inicial e n é o número de subintervalos en (a, b) que define a grella de discretización.

Por exemplo, se quixeramos aproximar numericamente a solución do PVI

$$\begin{cases} u' = x^2 + 3u \text{ en } (0, 1), \\ u(0) = 4, \end{cases}$$

cunha grella de puntos con paso de discretización $h = 0.2$, escribiríamos en OCTAVE

```
>>>x=sym('x');u=sym('u');
>>>f=x^2+3*u;
>>>euler(f,u,x,0,1,4,5)
ans =
0.00000 4.00000
0.20000 6.40000
0.40000 10.28000
0.60000 16.52800
0.80000 26.56480
1.00000 42.66368
```

co que obteríamos unha táboa cos puntos de discretización e cos valores aproximados, ademais dunha gráfica, como a que se mostra na Figura 3.3.

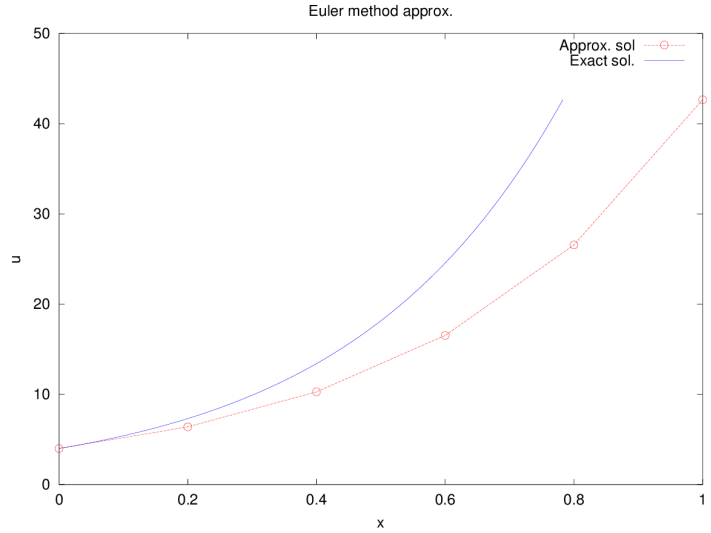


Figure 3.3: Representación gráfica da solución exacta dun problema de valor inicial (liña azul) enunciado no intervalo $(0, 1)$ e a aproximación numérica feita nos puntos $t_0 = 0, t_1 = 0.2, \ldots, t_5 = 1$ (liña vermella).

Os métodos da familia de Runge-Kutta de segunda orde: o método de Heun, o método de Euler modificado, e o método de Ralson tamén están programados nas funcións que acabamos de descomprimir na carpeta `octaveODE`. A forma de empregar estes tres métodos é a mesma que no caso do método de Euler explícito.

Exericicios

1. A lei de arrefriamento de Newton establece que a razón de cambio da temperatura $\theta(t)$ dun corpo é proporcional á diferenza entre a temperatura do corpo $\theta(t)$ e a do entorno θ_{en}:

$$\theta'(t) = k(\theta_{\text{en}} - \theta(t)),$$

onde $k > 0$ é a constante de transferencia de calor. Supoñamos que $k = 1\,(\text{min})^{-1}$ e que $\theta_{\text{en}} = 70°$C. Se o corpo está inicialmente a $100°$C:

   (a) Emprega o método de Euler explícito con distintos pasos de discretización: $h = 0.2$, $h = 0.1$ e $h = 0.05$, para aproximar a temperatura do corpo despois de 48 segundos.

   (b) Fai o mesmo co método de Heun e o de Ralson para $h = 0.2$.

   (c) Calcula o erro global acumulado na temperatura final coas tres aproximacións que se empregaron anteriormente.

2. Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \log(x) \text{ en } (1,2), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) Calcula a solución exacta co comando `dsolve` de OCTAVE.

   (b) Aplica o método de Euler explícito para calcular a solución aproximada no intervalo $[1,2]$ con paso de discretización $h = 0.1$.

   (c) Aplica o método de Heun para calcular a solución aproximada no intervalo $[1,2]$ con paso de discretización $h = 0.25$. Compara esta aproximación coa obtida co método de Euler e decide cal é máis precisa.

3. Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2 \text{ en } (2,3), \\ y(2) = 4. \end{cases}$$

   (a) Calcula a solución exacta co comando `dsolve` de OCTAVE.

   (b) Aplica o método de Euler explícito para calcular a solución aproximada no intervalo $[2,3]$ con pasos de discretización $h = 0.1$ e $h = 0.05$.

   (c) Aplica un dos métodos da familia de Runge-Kutta para calcular a solución aproximada no intervalo $[2,3]$ con pasos de discretización $h = 0.25$ e $h = 0.125$. Compara as aproximacións e decide se son máis precisas que as obtidas co método de Euler.

Chapter 4

Resolución de EDOs lineais de orde superior

No Tema 2, xa estudamos como identificar algunhas das Ecuacións Diferenciais Ordinarias (EDOs) de primeira orde, das que coñecemos o procedemento para a súa resolución. Entre os tipos que estudamos, estaban as EDOs lineais de primeira orde. Debido á importancia que teñen este tipo de EDOs na Física e na Enxeñaría, neste tema imos a estudar procedementos de resolución para EDOs lineais de orde superior. Comezaremos traballando coas EDOs lineais de segunda orde.

Exemplo. Supoñamos que un corpo de masa m únese verticalmente a un resorte (onde a constante de elasticidade é k) e somérxese nun líquido que exerce unha forza de rozamento sobre o corpo proporcional á velocidade (sendo η a constante asociada a esta fricción). Se o movemento se produce en equilibrio de forzas, a EDO que goberna o movemento do corpo ven dado por

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - ku = mg,$$

onde u é o desprazamento do corpo e g é a aceleración producida pola gravidade.

4.1 Ecuacións lineais de segunda orde

Lembremos que as EDOs lineais de orde n (tal e como as definimos no Tema 1) son aquelas que se podían escribir como

$$a_n(x)y^{(n}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

onde x é a variable independente, y é a variable dependente (a función incógnita a determinar) e as funcións $a_n, \ldots, a_0$ e b soamente poden depender da variable independente.

No caso particular das EDOs lineais de orde dous, $a_2(x) \neq 0$ e polo tanto, a forma xeral ven dada pola expresión (onde dividimos a EDO anterior polo coeficiente $a_2(x)$)

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = r(x),$$

sendo $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ e $r(x) = b(x)/a_2(x)$. Tendo en conta esta escritura para as EDOs lineais, debemos introducir certa terminoloxía que usaremos ao longo deste tema (e que tamén se aplicarán a EDOs de orde superior a dous):

- **EDO lineal de coeficientes constantes**: será aquela EDO lineal na que as funcións p e q son funcións constantes.
- **EDO lineal de coeficientes variables**: será aquela EDO lineal na que as funcións p e q **non** son funcións constantes.
- **EDO lineal homoxénea**: será aquela EDO lineal na que $r(x) = 0$.
- **EDO lineal completa ou non homoxénea**: será aquela EDO lineal na que $r(x) \neq 0$.

Ademais, dada unha EDO lineal completa, a súa **ecuación lineal homoxénea asociada**, será aquela que se escribe reemprazando a función r orixinal da EDO pola función nula.

No caso das EDOs de orde dous, como xa estudamos no Tema 1, a solución xeral vai involucrar unha expresión con dúas constantes de integración arbitrarias. Xa que logo, para escribir unha solución particular debemos fixar o valor destas dúas constantes co que necesitaremos dúas condicións adicionais que complementen a información dada pola EDO. Dependendo do tipo de condicións (se son condicións iniciais ou condicións de contorno), teremos dous tipos distintos de problemas: os que xa coñecemos como problemas de valor inicial (PVI) e outro novo tipo, os problemas de valor no contorno (PVC).

Os problemas de valor inicial para unha EDO lineal de segunda orde consisten en atopar y definida nun intervalo I que satisfai

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

onde y_0 e y_1 son valores constantes dados e x_0 é un punto do intervalo I.

Pola contra, os problemas de valor de contorno, se o intervalo ven dado por $I = (a, b)$, consisten en atopar y definida nun intervalo I que satisfai

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), & x \in I, \\ y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b. \end{cases}$$

onde de novo y_a e y_b son valores constantes dados.

O estudo da existencia e unicidade de solución dos problemas de valor de contorno queda fora dos contidos deste curso. Sen embargo, ao igual que xa fixemos para os PVI cunha EDO de orde un, podemos dar un resultado que nos garante a existencia e unicidade de solución.

Teorema 4.1.1. *Consideremos o seguinte PVI que involucra unha EDO lineal de orde dous: Atopar y que satisfai*

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$. Se as funciones p, q e r son continuas no intervalo I entón existe unha única solución y definida en I solución do anterior PVI.

Exercicio. a) Comproba que $u(x) = e^{-x}$ é a única solución do PVI

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy(x) = (1-2x)e^{-x}, & x \in I = [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \end{cases}$$

b) Comproba que $u(x) = \sin(x)$ é solución do PVC

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & x \in I = [0, 2\pi], \\ y(0) = 0, \\ y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

¿Que podes deducir sobre a existencia e unicidade de solución para este PVC?

4.2 Ecuacións lineais homoxéneas con coeficientes constantes

No que segue imos a describir un procedemento para resolver ecuacións diferenciais lineais de orde dous homoxéneas, no caso no que posúen coeficientes constantes, é dicir, cando $p(x) = p_0$, $q(x) = q_0$ e $r(x) = 0$. Baixo estas condicións sobre os coeficientes, este tipo particular de EDOs lineais,

$$y''(x) + p_0 y'(x) + q_0 y(x) = 0,$$

con p_0 e q_0 constantes dadas, resólvense usando o seguinte procedemento:

- Escribir o polinomio característico (en función de λ), reemprazando cada unha das derivadas $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ da EDO pola variable λ:

$$\lambda^2 + p_0\lambda + q_0 = 0.$$

- Calcular as dúas raíces λ_0 e λ_1 do polinomio característico asociado á EDO.
- A solución xeral y da EDO lineal de orde dous homoxénea ven dada por
  - **Raíces reais simples**: Neste caso, $\lambda_0 \neq \lambda_1$ e resulta
  $$y(x) = C_0 e^{\lambda_0 x} + C_1 e^{\lambda_1 x},$$
  onde C_0 e C_1 son dúas constantes arbitrarias.
  - **Raíces reais dobres**: Neste caso, $\lambda_0 = \lambda_1$ e resulta
  $$y(x) = C_0 e^{\lambda_0 x} + C_1 x e^{\lambda_0 x},$$
  onde C_0 e C_1 son dúas constantes arbitrarias.
  - **Raíces complexas conxugadas**: Neste caso, $\lambda_0 = \alpha + i\beta,\ \lambda_1 = \alpha - i\beta$ e resulta
  $$y(x) = C_0 e^{\lambda_0 x} + C_1 e^{\lambda_1 x},$$
  onde C_0 e C_1 son dúas constantes arbitrarias. Aplicando a fórmula de Euler $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, pódese reescribir a solución xeral como
  $$y(x) = K_0 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + K_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$
  onde K_0 e K_1 son dúas constantes arbitrarias.

Exercicio. a) Calcula a solución xeral da EDO $2u'' + 8u' + 26u = 0$.
b) Calcula unha solución do seguinte PVC:

$$\begin{cases} 2y''(x) - 6y'(x) - 20y = 0, & x \in I = [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

¿Cal é unha solución se escollemos como condicións de contorno $y(0) = y(1) = 0$?

4.3 Solución xeral

Como xa estudamos no Tema 1, a solución xeral dunha EDO de orde dous involucra unha expresión que posúe dúas constantes arbitrarias, a partir das cales (fixando un valor concreto) podemos deducir as infinitas solucións particulares dunha EDO. Lembrémonos que son as condicións de contorno ou as condicións iniciais as que definían os valores concretos destas constantes arbitrarias.

Na sección anterior, acabamos de describir un procedemento para escribir a solución xeral dunha EDO lineal homoxénea de grao dous con coeficientes constantes. Sen embargo, para o caso de

EDOs lineais completas aínda non sabemos como calcular esta solución xeral. Comecemos por analizar como podemos escribir a solución xeral dunha EDO lineal de orde dous non homoxénea a partir dunha solución particular e da solución xeral da EDO homoxénea asociada.

Teorema 4.3.1 (Solución xeral)**.** *Consideremos unha EDO lineal de orde dous non homoxénea. Se* y_{h} *é a solución xeral da EDO homoxénea asociada e* y_{p} *é unha solución particular da EDO completa entón*

$$y_{\mathrm{xer}}(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$$

é a solución xeral da EDO completa.

Este resultado nos proporciona o procedemento para calcular a solución xeral dunha EDO completa a partir dunha solución particular e da solución xeral da homoxénea. Polo tanto, soamente nos resta por estudar como calcular a solución particular dunha EDO lineal completa (que analizaremos soamente no caso de coeficientes constantes).

Haberá algúns casos (por exemplo, cando tratemos de EDOs lineais con coeficientes variables) que non sexamos capaces de calcular a solución xeral da EDO homoxénea asociada. Nesta situación, necesitaremos dúas solucións particulares coñecidas, u e v, da EDO lineal homoxénea, para construir grazas a elas unha posible expresión da solución xeral $w = C_1u + C_2v$. Esta posible forma de escribir a solución xeral a partir de dúas solucións particulares baséase no seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 (Principio de superposición)**.** *Sexa* y_1 *unha solución da EDO*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r_1(x),$$

e y_2 *unha solución da EDO*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r_2(x),$$

entón a función u *definida por*

$$u(x) = ay_1(x) + by_2(x),$$

sendo a *e* b *dúas constantes é unha solución da EDO*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = ar_1(x) + br_2(x).$$

Á primeira vista, polo principio de superposición xa sabemos que w é unha solución da EDO lineal homoxénea e posto que aparecen dúas constantes arbitrarias, poderíamos pensar que se trata da solución xeral da EDO. Sen embargo, isto non ten porque sempre ser correcto se non escollemos con coidado as funcións u e v.

Exercicio. Supoñamos que $u(x) = x^2$ e que $v(x) = 5e^{-\log(1/x)}$ son solucións dunha EDO lineal homoxénea de orde dous. ¿A función w definida por

$$w(x) = C_1u(x) + C_2v(x)$$

pode ser a solución xeral da EDO?

Para precisar cales son as condicións correctas que debemos impoñer para que no anterior exercicio w sexa a solución xeral, debemos estudar o seguinte teorema:

Teorema 4.3.3 (Independencia lineal de solucións)**.** *Sexan y_1 e y_2 dúas solucións da EDO lineal homoxénea de orde dous (con coeficientes variables ou constantes) nun intervalo I. A función y definida por*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

é a solución xeral da EDO se e só se:
a) os vectores

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

son linealmente independentes para todo $x_0 \in I$, ou de forma equivalente:
b) o **wroskiano** *de y_1 e y_2, definido por*

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0),$$

é sempre diferente de cero para todo $x_0 \in I$.

Exercicio. a) Comproba que $u(x) = \cosh(\sqrt{3}\log(x))$ e que $v(x) = \sinh(\sqrt{3}\log(x))$ son solucións da EDO lineal homoxénea $x^2y'' + xy - 3y = 0$. b) A función w definida por $w(x) = C_1u(x) + C_2v(x)$ é a solución xeral da EDO?

4.4 Ecuacións lineais non homoxéneas con coeficientes constantes

Nesta sección imos a aplicar os resultados que xa estudamos nas seccións anteriores para resolver EDOs lineais de orde dous non homoxéneas con coeficientes constantes. Máis precisamente, estamos interesados en calcular a solución xeral da EDO

$$y''(x) + p_0y'(x) + q_0y(x) = r(x),$$

onde o segundo membro satisfai $r(x) \neq 0$. Como xa estudamos na sección anterior, a solución xeral ven dada por

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$$

onde y_{h} é a solución da EDO homoxénea asociada e $y_{\mathrm{p}}(x)$ é unha solución particular coñecida. Destas dúas funcións, posto que a EDO é de coeficientes constantes, sabemos calcular a solución xeral da EDO homoxénea asociada mediante o uso do polinomio característico. Pola contra,

aínda non temos estudado como calcular unha solución particular da EDO non homoxénea (incluso no caso de ter coeficientes constantes). O cálculo das solucións particulares das EDOs lineais completas de orde dous será o obxectivo da Sección 5.

Posto que aínda non sabemos calcular solucións particulares, o que si podemos facer é calcular solucións particulares dunha EDO lineal a partir doutras solucións particulares de EDOs cos mesmos coeficientes pero con diferentes segundos membros, aplicando o principio de superposición que estudamos na sección anterior.

Exercicio. a) Calcula a solución do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -2e^x - \cos(x), & x \in I = [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

sabendo que e^x e $\sin(x)$ son solucións particulares respectivamente das EDOs $y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -e^x$ e $y''(x) - 3y'(x) + y(x) = -3\cos(x)$.
b) Calcula a solución xeral da EDO non homoxénea $y'' + 2y = x^2$ sabendo que unha solución particular é un polinomio.

4.5 Método dos coeficientes indeterminados

Nesta sección xa estamos en posición de poder completar o estudo da solución xeral dunha EDO lineal de segunda orde con coeficientes constantes, xa sexa homoxénea ou non, mediante o método dos coeficientes indeterminados.

Dada unha EDO lineal de segunda orde non homoxénea con coeficientes constantes

$$y''(x) + p_0 y'(x) + q_0 y(x) = r(x),$$

con p_0, q_0 constantes e $r(x) \neq 0$, existe un procedemento que nos permite calcular unha solución particular nos casos especiais nos que o segundo membro $r(x)$ é unha expresión que involucra polinomios, exponenciais ou funcións trigonométricas. A Táboa 4.1 especifica, segundo a expresión de $r(x)$, cal sería a expresión candidata a ser solución particular da EDO.

En todos os casos da Táboa 4.1, o valor do exponente s é o menor enteiro non negativo, que se escolle de tal xeito que ningún termo da solución particular candidata sexa unha solución da EDO lineal homoxénea asociada. Os coeficientes da solución particular (tanto das constantes A, B como dos polinomios $A(x)$ ou $B(x)$) que forman parte das solucións particulares $y_{\mathrm{p}}(x)$ deben ser calculadas, substituíndo as expresións candidatas de $y_{\mathrm{p}}(x)$ na EDO non homoxénea.

Expresión $r(x)$	Solución particular candidata $y_{\mathrm{p}}(x)$
$a_n(x)$: polinomio de grao n	$x^s A_n(x)$ onde $A_n(x)$: polinomio de grao n
$ae^{\alpha x}$ a: constante	$x^s Ae^{\alpha x}$ A: constante
$a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$ a, b: constantes	$x^s(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ A, B: constantes
$a_n(x)e^{\alpha x}$ $a_n(x)$: polinomio de grao n	$x^s A_n(x)e^{\alpha x}$ $A_n(x)$: polinomio de grao n
$a_n(x)\cos(\beta x) + b_m(x)\sin(\beta x)$ onde $a_n(x)$: polinomio de grao n $b_m(x)$: polinomio de grao m	$x^s(A_N(x)\cos(\beta x) + B_N(x)\sin(\beta x))$ onde $A_N(x), B_N(x)$: polinomios de grao $N = \max(n, m)$
$ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + be^{\alpha x}\sin(\beta x)$ onde a, b: constantes	$x^s(Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x))$ A, B: constantes
$e^{\alpha x}(a_n(x)\cos(\beta x) + b_m(x)\sin(\beta x))$ $a_n(x)$: polinomio de grao n $b_m(x)$: polinomio de grao m	$x^s e^{\alpha x}(A_N(x)\cos(\beta x) + B_N(x)\sin(\beta x))$ onde $A_N(x), B_N(x)$: polinomios de grao $N = \max(n, m)$

Táboa 4.1: Solucións particulares candidatas a ser solución particular $y_{\mathrm{p}}(x)$ dunha EDO lineal con coeficientes constantes de segunda orde, dependendo do segundo membro $r(x)$ da EDO completa.

Debemos ter en conta que cando o segundo membro $r(x)$ é unha combinación lineal de varias das expresións que aparecen en diferentes filas da Táboa 4.1, entón debemos aplicar o principio de superposición e calcular as solucións particulares por separado para cada caso e despois realizar a mesma combinación lineal coas solucións particulares calculadas.

Exercicio. Calcula a solución xeral da seguinte EDO lineal completa con coeficientes constantes:

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + e^{-x}\cos(x) + xe^{-x}\sin(x).$$

4.6 Ecuacións lineais de orde superior

No que levamos de Tema 4, estivemos a traballar con EDOs lineais de orde dous. Sen embargo, todos os conceptos e resultados que estudamos para as EDOs de orde dous pódense xeneralizar de forma inmediata a EDOs lineais de orde n. Para ver como se estenden estes resultados e procedementos, imos a enunciar de novo os resultados máis importantes pero agora aplicados

para EDOs de orde n.

4.6.1 EDOs lineais homoxéneas con coeficientes constantes

Dada unha EDO lineal homoxénea de orde n con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n}(x) + a_{n-1} y^{(n-1}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

onde $a_n, \ldots, a_0$ son coeficientes constantes, a solución xeral da EDO homoxénea calcúlase como $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ onde cada un dos termos está asociado a unha raíz do polinomio característico, que neste caso é un polinomio de orde n. Se as raíces do polinomio característico están ordenadas e repetidas tantas veces como a súa multiplicidade, e aquelas se son complexas están agrupadas xunto cos seus valores conxugados, dependendo do tipo de raíz λ_j, o termo da solución xeral $y_j(x)$ é diferente:

- **Raíz simple real** λ_j: $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$.
- **Raíces múltiples reais** $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+m-1}$: Se a multiplicidade da raíz é m, temos

$$y_j(x) = e^{\lambda_j},\ y_{j+1}(x) = xe^{\lambda_j}, \ldots,\ y_{j+m-1}(x) = x^{m-1}e^{\lambda_j}.$$

- **Raíces simples complexas** $\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$:

$$y_j(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_{j+1}(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

- **Raíces múltiples complexas** $\lambda_j = \ldots = \lambda_{j+m-1} = \alpha + i\beta$, $\lambda_{j+m} = \ldots = \lambda_{j+2m-1} = \alpha - i\beta$: Se a multiplicidade das raíces complexas é m, temos

$$y_j(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_{j+1}(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots,$$
$$y_{j+2m-2}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_{j+2m-1}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Exercicio. Calcula a solución xeral da EDO homoxénea $y''' + y' = 0$.

4.6.2 Solución xeral

Os dous resultados que estudamos sobre a representación da solución xeral para EDOs de orde dous, son tamén válidos para EDOs de orde n. Polo tanto, para EDOs de orde n, tanto a representación da solución xeral (que ven dada pola suma da solución xeral da EDO homoxénea asociada máis unha solución particular da EDO completa), como o principio de superposición seguen a ser válidos para EDOs de orde n.

No caso da independencia de solucións da EDO homoxénea de orde n, debemos adaptar a definición do wroskiano e do criterio de independencia que estudamos no Teorema 3.3.

Teorema 4.6.1 (Independencia lineal de solucións)**.** *Sexan $y_1, \ldots, y_n$, solucións da EDO lineal homoxénea de orde n nun intervalo I. A función y definida por*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

é a solución xeral da EDO se e só se:
a) os n vectores

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1}(x_0) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1}(x_0) \end{pmatrix}$$

son linealmente independentes para todo $x_0 \in I$, ou de forma equivalente:
b) o **wroskiano** *de $y_1, \ldots, y_n$, definido por*

$$W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1}(x_0) \end{vmatrix}$$

é sempre diferente de cero para todo $x_0 \in I$.

Grazas a que o principio de superposición tamén se aplica a EDOs de orde n,

$$y^{(n}(x) + p_{n-1}(x) y^{(n-1}(x) + \cdots + p_1(x) y'(x) + q(x) y(x) = r(x),$$

o método de coeficientes indeterminados é válido sen modificación algunha para as EDOs lineais de orde n.

Exercicio. Calcula a solución xeral da EDO $y''' + y' = 1/\sin(x)$.

4.7 Aplicacións

Xa comprobamos ao comezo deste Tema 4, que a EDO que goberna o movemento dun corpo de masa m suxeito verticalmente a un resorte con constante de elasticidade k e somerxido sobre un fluído viscoso que exerce unha forza de rozamento proporcional á velocidade é unha EDO lineal de orde dous. Nesta sección, veremos outros dous exemplos: a ecuación que modela o movemento dun fluído incompresible ao longo dun tubo e retomaremos o exemplo de circuíto en serie que posúe unha resistencia, unha bobina e un condensador (que xa analizamos parcialmente no Tema 2).

4.7.1 Movemento dun fluído ao longo dun tubo

Supoñamos que temos un fluído incompresible non viscoso que se move ao longo dun tubo cilíndrico estreito de radio R, debido a que existe unha diferencia de presión oscilante de amplitude Δp entre os extremos do tubo (que oscila cunha frecuencia angular ω). Posto a que o fluído é viscoso, se o movemento do fluído prodúcese en equilibrio, a conservación do momento lineal (relacionando a inercia do fluído, as forzas viscosas e a diferencia de presión) tradúcese na seguinte EDO:

$$-i\omega\rho u(r) - \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\Delta p}{t}$$

onde ρ é a densidade de masa do fluído incompresible, η é o coeficiente de viscosidade, t é a lonxitude do tubo, e u é a compoñente lonxitudinal do campo de velocidades do fluído. A variable r representa a variable espacial radial nas coordenadas cilíndricas centradas no eixe do tubo. Para calcular a compoñente axial da velocidade, debemos completar esta EDO coas condicións de contorno adecuadas: neste problema, posto que o fluído é viscoso, permanece pegado e inmóbil ás paredes do tubo, polo que $u(R) = 0$ e no centro do tubo a velocidade debe ser finita en $r = 0$ (a solución non pode presentar asíntotas verticais respecto á variable r). En resumo, o movemento harmónico dun fluído ao longo dun tubo queda definido polo seguinte PVC:

$$\begin{cases} -i\omega\rho u(r) - \eta\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = \dfrac{\Delta p}{t}, & x \in (0, R), \\ y(R) = 0, \\ y(0) \text{ posúe un valor finito.} \end{cases}$$

Exercicio. a) Procura información sobre as funcións de Bessel de primeira e segunda clase e escribe cales son as EDOs que satisfan por definición. b) Sabendo que a función de Bessel J_0 está involucrada na solución do PVC, trata de escribir un cambio de variable co que obter unha EDO similar á que satisfai á función de Bessel J_0. *[Indicación: podes axudarte do programa* OCTAVE.*]*

4.7.2 Circuíto eléctrico en serie RLC

Teñamos en conta agora o modelo matemático que goberna un circuíto eléctrico en serie que posúe unha resistencia, unha bobina e un condensador. A carga eléctrica e a intensidade de corrente que se xera mediante unha batería ou xerador de corrente eléctrica satisfán as Leis de Kirchhoff. Estas leis aseguran a conservación da carga eléctrica e a conservación da enerxía no circuíto.

Se denotamos por q a carga eléctrica e por I a intensidade de corrente do circuíto que están alimentados por unha fonte eléctrica que aplica unha voltaxe $e(t)$ ao circuíto no instante t, satisfaise a seguinte ecuación:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}q = e,$$

onde R é a resistencia, C é a capacitancia do condensador e L é a indutancia da bobina. Á vista da anterior expresión, soamente temos unha ecuación pero posuímos dúas incógnitas (i e q). Tendo en conta que $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, podemos obter a seguinte EDO lineal de orde dous:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = e,$$

co que resulta unha EDO de orde dous respecto á variable dependente q; Se en cambio optamos por derivar a ecuación orixinal resulta

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t},$$

onde agora a función incógnita é o campo i e a EDO segue a ser lineal de orde dous.

Exercicio. Supoñamos que (na versión adimensionalizada do problema) $R = 5$, $C = 2$, $L = 1$, e $e(t) = 2\cos(t)$. Calcula a solución cando $q(0) = 10$ e $i(0) = 2$. Se apagamos a batería que proporciona voltaxe externa: ¿Que lle ocorre á carga ao longo do tempo? Se a batería permanece apagada dende o comezo e $q(0) = 0$, pero a intensidade inicial segue a ser $i(0) = 2$ ¿cal é a carga q ao longo do tempo?

4.8 Exercicios

1. Calcula a solución xeral das seguintes EDOs de orde dous:

   (a) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$. (b) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$.

   (c) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$. (d) $y'' - 3y' + 2y = 3\sin(2x)$.

   (e) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$. (f) $y'' + 25y = 6\sin(x)$.

   (g) $y'' - 2y' + 5y = e^x\sin(2x)$. (h) $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$.

   (i) $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$.

2. Calcula a solución dos seguintes PVIs:

   (a) $\begin{cases} x'' + 2x' + 2x = te^{-t}, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x''' + 2x'' + 5x' = 5t, \\ x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1/5. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x''' - 2x'' + 10x' = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -8. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} t^3x''' + t^2x'' - 2tx' + 2x = 2t^4, \\ x(1) = x'(1) = x''(1) = 0. \end{cases}$

   [Indicación: (d) As funcións $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1/t$, e $x_3(t) = t^2$ son solución da EDO homoxénea asociada].

3. Calcula a solución xeral da EDO $x''' + (\mu+1)x'' + (\mu+1)x' = 0$ tendo en conta os diferentes valores que pode tomar o parámetro μ.

4. Resolve o seguinte PVI
$$\begin{cases} u'' + u' = f(t), \\ u(0) = -1, u'(0) = 1, \end{cases}$$
onde a función f está definida por
$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{se } 0 \le t < 1, \\ 3-t & \text{se } t \ge 1. \end{cases}$$

5. Consideremos a ecuación diferencial $xy'' - 2y' = 0$.
   (a) Comproba que $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = x^3/3$ son solucións.
   (b) O wroskiano asociado a y_1 e y_2 anúlase nalgún punto?
   (c) A función $C_1y_1 + C_2y_2$ é a solución xeral da EDO?

6. Un circuíto do tipo RLC que ten por compoñentes unha bobina con inductancia $L = 10\,$H, unha resistencia $R = 20\,\Omega$ e un condensador con capacitancia $C = 0.01\,$F está alimentado por unha forza electromotriz $e(t)$. Se a carga inicial e a intensidade de corrente son nulas, calcula a intensidade de corrente do circuíto nos seguintes casos: (a) Corrente continua $e(t) = 10$. (b) Corrente alterna $e(t) = 10\sin(2t)$.

7. A corrente eléctrica dun circuíto LC (sen resistencia) está gobernada polo seguinte PVI onde a función incógnita é a intensidade I:
$$\begin{cases} i'' + 4i = e'(t), \\ i(0) = i'(0) = 0, \end{cases}$$
onde a forza electromotriz do circuíto ven dada por
$$E(t) = \begin{cases} 4t & \text{se } 0 < t < 3\pi/2, \\ 4(3\pi - t) & \text{se } 3\pi/2 < t < 3\pi, \\ 0 & \text{se } t > 3\pi, \end{cases}$$
que simula unha batería con voltaxe crecente ata que pasado un tempo decrece para posteriormente consumirse e apagarse.
   (a) Calcula a intensidade i no intervalo de tempo $[0, 20]$.
   (b) Debuxa a gráfica da intensidade coa axuda de OCTAVE

(c) Calcula a intensidade i cando se cambia de voltaxe ao circuíto, que agora ven dada por

$$e(t) = \begin{cases} 4t & \text{se } 0 < t < \pi, \\ 4(3\pi - t) & \text{se } \pi < t < 2\pi, \\ 0 & \text{se } t > 2\pi. \end{cases}$$

8. Considera o problema de vibración mecánica masa-resorte (sen fricción) cunha forza externa periódica, gobernado polo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2u'' = -8u + \cos(\omega t), \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

onde u é o desprazamento do sistema e ω é a frecuencia angular da forza periódica que soporta o mecanismo.

(a) Calcula a solución do PVI se $|\omega| \neq 2$.

(b) Calcula o límite da solución obtida cando ω tende a 2.

(c) Resolve o problema no caso $\omega = 2$.

9. Consideremos a ecuación $xy'' + ay' = 1$ definida en $[1, \infty)$ onde a é un parámetro:

   (a) Calcula a solución particular que verifica $y_a(1) = 0$, $y_a'(1) = 0$.

   (b) ¿É a función y_a continua con respecto á variable a?

10. Considera os problemas de valores de contorno seguintes:

    (a) Calcula os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os que o problema de valor no contorno

    $$\begin{cases} u'' + au = 0, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases}$$

    posúe unha solución non nula.

    (b) Repite o exercicio anterior pero agora co PVC

    $$\begin{cases} u'' - 2u' + au = 0, \\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0. \end{cases}$$

    e calcula os valores de $a \in \mathbb{R}$ nos que posúe unha solución non nula e calcula as solucións correspondentes a cada valor de a.

11. Resolve o seguinte problema de valor inicial non lineal de segunda orde:

    $$\begin{cases} (x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

    [Indicación: escribe unha EDO onde a variable dependente sexa y'].

4.9 Práctica 4. Resolución de EDOs lineais de orde superior

Nesta práctica resolveremos ecuacións diferenciais de orde dous (así como problemas de valor inicial e valor de contorno asociados a EDOs lineais de orde dous) facendo uso unicamente do comando `dsolve` de OCTAVE.

Revisión do comando `dsolve`

Lémbremos que se na práctica anterior queríamos resolver o PVI de orde un

$$\begin{cases} (2xy - e^{-2y})\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

o que facíamos en OCTAVE era empregar o comando `dsolve` que calculaba a solución xeral da EDO e despois impoñíase a condición inicial co mesmo comando do seguinte xeito:

```
>>>x=sym('x');y=sym('y(x)');
>>>edo='(2*x*y(x)-exp(-2*y(x)))*diff(y(x),x)+y(x)=0';
>>>sol=dsolve(edo,x,y)
sol = x*e^(2*y(x))-log(y(x))=c
>>>sol=dsolve(edo,x,y,0,1)
sol = x*e^(2*y(x))-log(y(x))=0
```

Se queremos saber que tipo de procedemento de cálculo usou OCTAVE para resolver a EDO e eventualmente a expresión do factor integrante que empregou para calcular a solución xeral, p odemos comprobar o contido das variables de saída adicionais que proporciona `dsolve`. No exemplo anterior, obtemos

```
>>>[sol,metodo,factor]=dsolve(edo,x,y)
sol = xe^(2y)-log(y)=c
metodo = exact
factor = e^(2*y(x))/y(x)
```

co que sabemos que a ecuación resultou ser exacta usando o factor integrante e^{2y}/y.

Exercicios

1. Escolle unha EDO de cada un dos exercicios do 1 ao 6 do Boletín 2 e calcula a súa solución xeral. Comproba coas variables de saída adicionais `metodo` e `factor` (no caso de que se empregue) que procedemento de cálculo se seguiu para a súa resolución.

Resolución de EDOs lineais de orde dous

A resolución de EDOs lineais de orde dous realizase do mesmo xeito a como se facían as de orde un, co comando `dsolve`. Evidentemente, agora na escritura da EDO lineal de orde dous $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ debe aparecer a derivada segunda da variable dependente y, haberá que usar `diff(y(x),x,2)` en OCTAVE. Por exemplo, se queremos calcular a solución xeral da EDO lineal de orde dous $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ empregaríamos:

```
>>>edo='x^2*diff(y(x),x,2)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0';
>>>dsolve(edo,x,y)
ans =
y(x)= k1/x+k2/x^2
```

No caso de EDOs lineais de orde dous, podemos resolver problemas de valor inicial, onde se impoñen dúas condicións iniciais $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_1$, ou ben problemas de valor de contorno, no que se impoñen as condicións nos extremos do intervalo (a, b) onde está definida a EDO lineal,

$y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Por exemplo, se queremos resolver o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 5, \end{cases}$$

empregaríamos os seguintes comandos:

```
>>>edo='x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x)-y(x)=0';
>>>dsolve(edo,x,y)
ans =
y(x)= k2*x-k1/(2*x)
>>>dsolve(edo,x,y,1,2,1,5)
ans =
y(x)= 7*x/2-3/(2*x)
```

onde agora o comando `dsolve` impón as dúas condicións iniciais $y(1) = 2$ e $y'(1) = 5$ a partir dos últimos argumentos de entrada. Por outra banda, para resolver o PVC

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0, \\ y\,(2) = 0, \\ y(3) = 1, \end{cases}$$

empregamos

```
>>>edo='x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x)+(x^2-1/4)*y(x)=0';
>>>dsolve(edo,x,y)
ans =
y(x)= (k1*sin(x)+k2*cos(x))/sqrt(x)
>>>dsolve(edo,x,y,2,0,3,1)
ans =
y(x)= (sqrt(3)*sin(2)*cos(x)/(sin(2)*cos(3)-cos(2)*sin(3))
-sqrt(3)*cos(2)*sin(x)/(sin(2)*cos(3)-cos(2)*sin(3)))/sqrt(x)
```

onde agora o comando `dsolve` estase a usar para impoñer as dúas condicións de contorno $y(2) = 0$ e $y(3) = 1$ nos puntos extremos do intervalo $(2, 3)$.

Exercicios

1. Calcula a solución dos seguintes problemas de valor inicial e de contorno usando o comando `dsolve`:

(a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 + 5\sin(x)\,, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^{(4)} + 3y'' = 0, \\ y(2) = 0,\ y'(2) = 1, \\ y''(2) = 3,\ y'''(2) = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} t^3x''' + t^2x'' = 2t^4, \\ x(1) = x'(1) = x''(1) = 0. \end{cases}$

Comproba, coa axuda do comando `diff`, que a expresión que devolve OCTAVE en cada caso é a solución de cada un dos problemas. *[Indicación para (c)-(d): emprega o cambio de variable $z = y''$ e $z = x''$ respectivamente].*

2. A carga eléctrica Q dun circuíto en serie RLC cunha resistencia R, unha bobina con indutancia L e cun condensador de capacitancia C modélase mediante o PVI:

$$\begin{cases} Lq'' + Ri + \dfrac{1}{C}q = e(t), \\ q(0) = q_0, \\ i(0) = i_0, \end{cases}$$

onde q_0 e i_0 son o carga eléctrica e a intensidade de corrente no instante inicial $t = 0$, a variable t representa o tempo (medido en segundos) e $e(t)$ e a forza electromotriz do xerador ao que está conectado o circuíto.

En primeiro lugar, imos a estudar o caso simple no que $e(t) = 0$ e o circuíto non posúe resistencia, que é o caso denominado **caso libre non amortiguado**. Para os datos:

$$L = 1.2\,\mathrm{H}\,, \quad C = 1/15\,\mathrm{F}$$

e supoñendo que a carga inicial é $1\,\mathrm{C}$ e que a intensidade de corrente inicial é nula:

(a) Escribe o problema de valor inicial en función da carga eléctrica.

(b) Calcula e representa graficamente a carga eléctrica ao longo dun minuto.

(c) Determina o valor do período e a frecuencia da carga eléctrica do circuíto.

(d) Determina o menor instante de tempo no que a carga eléctrica volve a coincidir coa carga eléctrica inicial do circuíto.

Consideramos, a continuación, os **efectos da resistencia ou amortiguamento** no circuíto. Para os datos:

$$L = 1.2\,\mathrm{H}\,, \quad C = 1/15\,\mathrm{F}\,, \quad R = 0.3\,\Omega,$$

calcula e representa graficamente a carga eléctrica ao longo dun minuto nos seguintes casos:

(e) Cando a carga inicial é $1\,\mathrm{C}$ e que a intensidade de corrente inicial é nula.

(f) Cando a carga inicial e a intensidade de corrente inicial son nulas, pero se lle aplica unha forza externa periódica $e(t) = \cos t$.

(g) Cando, nas condicións iniciais do caso anterior, se lle aplica unha forza externa periódica $e(t) = \cos(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

(h) Cando, coas condicións iniciais e a forza electromotriz do caso anterior, a resistencia do circuíto ven dada por $R = 0.01\,\Omega$.

Chapter 5

Transformada de Laplace

Nos Temas 2 e 4, xa estudamos como resolver ecuacións diferenciais ordinarias (calculando a expresión explícita ou implícita da súa solución xeral) e, unha vez feito isto, tamén analizamos como podíamos resolver os problemas de valor inicial (PVIs) e problemas de valor de contorno (PVCs) asociados. Para iso, empregamos diferentes procedementos de cálculo adecuados para cada tipo concreto de EDOs.

Neste Tema 5 imos a estudar a técnica da transformada de Laplace como o método de cálculo para resolver problemas de valor inicial (e tamén problemas de valor de contorno) que involucran EDOs lineais de orde arbitrario e coeficientes constantes. Aínda que este tipo de EDOs xa coñecíamos como resolvelo (mediante o uso do polinomio característico e os métodos de coeficientes indeterminados e variación de parámetros), a transformada de Laplace permitiranos dun xeito moito máis sinxelo resolver este tipo de ecuacións diferenciais con segundos membros descontinuos e posibilitará no próximo Tema 6 resolver tamén sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias lineais e con coeficientes constantes dun xeito igual de doado.

5.1 Definición da transformada de Laplace

Ao longo das materias de cálculo de anteriores cursos, xa se estudaron diferentes aplicacións que transformaban funcións noutras funcións. Por exemplo, a aplicación derivada $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ definíase como aquela aplicación que a cada función, por exemplo definida en (a, b), lle asignaba a súa derivada

$$f \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot} f',$$

ou a aplicación de integración

$$f \xrightarrow{\int \cdot} F \qquad \text{onde} \qquad F(t) = \int_a^t f(s)\mathrm{d}s.$$

Lembremos que estas dúas aplicacións eran lineais (a aplicación sobre unha combinación lineal de funcións é a combinación lineal da aplicación sobre cada unha delas). Ao igual que estas aplicacións, a transformada de Laplace, que denotaremos por $\mathcal{L}$, é unha aplicación lineal que leva a función f na función $\mathcal{L}\{f\}$ do seguinte xeito:

Definición 5.1.1. *Sexa f unha función definida para $t \geq 0$, a transformada de Laplace de f defínese por*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

sempre e cando a integral impropia converxa.

De forma habitual, empregarase a notación en maiúscula $F(s)$ para denotar a avaliación con argumento s da transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$.

Recordemos que as integrais impropias de primeira especie son aquelas integrais que teñen un intervalo de integración non acoutado. Neste caso, o intervalo de integración é $(0, \infty)$ e a integral impropia dise que é converxente se existe o límite

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

Polo tanto, o valor da integral impropia ven dado polo valor do límite cando este exista.

Exercicio. Calcula a transforma de Laplace das seguintes funcións: a) $f(t) = 1$, b) $g(t) = e^{at}$ onde a é un parámetro, c) $h(t) = 1/t$, d) $r(t) = e^{t^2}$.

Do exercicio anterior podemos deducir facilmente que non todas as funcións que están definidas no intervalo $[0, \infty)$ van ter ben definida a súa transformada de Laplace. Os problemas na definición van a ter fundamentalmente dúas orixes: a integrabilidade da función f e o crecemento dos valores da función f. Máis precisamente, para que unha función f posúa transformada de Laplace deberémoslle pedir que:

1.- A función $f(t)$ debe ser integrable no intervalo $[0, \infty)$.

2.- A función $f(t)e^{-st}$ debe tender a cero cando $t \to \infty$.

Estas dúas condicións van a resultar suficientes para asegurar que a transformada de Laplace está ben definida como nos indica o seguinte resultado:

Proposición 5.1.2. *Sexa f unha función definida para $t \geq 0$, se se satisfán as condicións:*

(a) para calquera valor $M > 0$, a función $f(t)$ é continua en $[0, M]$ excepto nun número finito de puntos nos que posúe descontinuidades de salto,

(b) existen tres constantes $c, T > 0$ e $N > 0$ tales que $|f(t)| \leq Ne^{ct}$ para todo $t > T$,

entón a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ está ben definida para todo $s \in (c, \infty)$.

Exercicio. Decide razoadamente se existe a transformada de Laplace da función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3, \\ 2, & t \geq 3. \end{cases}$$

No caso de estar definida, calcula $\mathcal{L}\{f\}$.

5.2 Cálculo e propiedades da transformada de Laplace

Unha vez que xa calculamos as transformadas de Laplace da función constante igual á unidade e a función exponencial (véxase o primeiro dos exercicios da sección anterior), imos aproveitar a propiedade de linealidade da transformada para deducir a expresión da transformada doutras funcións elementais.

Proposición 5.2.1 (Linealidade da transformada)**.** *Sexa $f(t)$ e $g(t)$ dúas funcións definidas para $t \geq 0$ para as que existen respectivamente as transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s)$ definidas para todo $s \in (c, \infty)$, entón*

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\} = \alpha F + \beta G \qquad \text{para } s > c,$$

onde α e β son constantes.

Exercicio. Aplica a propiedade de linealidade da transforma de Laplace e o cálculo da transformada de Laplace da función $f(t) = e^{at}$ onde a é un parámetro, para calcular a transformada de: (a) $g(t) = \sin(bt)$, (b) $h(t) = \cos(bt)$, (c) $r(t) = \sinh(bt)$, (d) $u(t) = \cosh(bt)$.

A importancia da transformada de Laplace radica na súa relación coa derivación e a integración. De feito, a transformada de Laplace convirte calquera ecuación diferencial ordinaria (ou incluso unha ecuación integro-diferencial onde aparecen os operadores integrais e diferenciais sobre a variable dependente) nunha simple ecuación alxebraica onde a variable independente t substitúese pola variable s que aparece na transformada.

Proposición 5.2.2 (Transformada de primitivas e derivadas)**.** *Sexa $f(t)$ unha función definida para $t \geq 0$ para a que existe a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ para todo $s \in (c, \infty)$, entón*

(a) Se f' está definida para $t \geq 0$ e existe a súa transformada de Laplace para todo $s \in (c, \infty)$ entón

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0) \qquad \text{para } s > c,$$

(b) Se $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ é a primitiva de f (que satisfai $g(0) = 0$) entón

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{F(s)}{s} \qquad \text{para } s > c.$$

A partir do apartado (a) da proposición anterior podemos calcular tamén unha expresión para a transformada de Laplace de f'', f''',... e en xeral para a derivada de orde n,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) &= s\mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}(s) - f^{(n-1)}(0) = s^2\mathcal{L}\{f^{(n-2)}\}(s) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = \dots \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Exercicio. Aplica o resultado da transformada da derivada e emprega a expresión de $\mathcal{L}\{1\}(s)$ para calcular a transformada de Laplace das funcións: (a) $g(t) = t^2$, (b) $h(t) = t^n$ con n un numero enteiro positivo arbitrario.

5.2.1 Transfomada de Laplace de funcións elementais

Como consecuencia das propiedades revisadas ata o de agora e dos cálculos máis simples feitos da transformada de Laplace sobre as funcións máis elementais, a Táboa 5.1 recolle unha lista das transformadas das funcións máis básicas.

Evidentemente, se cada vez que necesitaramos calcular a transformada de Laplace dunha función estiveramos restrinxidos ou ben: a) comprobar se aparece na Táboa 5.1 (ou unha combinación lineal das funcións que aparecen nela) ou b) calcular a transformada mediante a definición, a utilidade da transformada de Laplace sería moi reducida. A seguinte proposición nos permite ampliar o conxunto de funcións das que coñecemos de forma inmediata a transformada de Laplace.

Proposición 5.2.3 (Translación no eixo s)**.** *Sexa $f(t)$ unha función definida para $t \geq 0$ para a que existe a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ para todo $s \in (c, \infty)$, entón*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \text{ para todo } s > c + a.$$

Función	Transformada de Laplace	Dominio de definición
$f(t) = 1$	$F(s) = \dfrac{1}{s}$	$s > 0$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$f(t) = \sin(at)$	$F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \cos(at)$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \sinh(at)$	$F(s) = \dfrac{1}{s^2-a^2}$	$s > a$
$f(t) = \cosh(at)$	$F(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s > a$

Táboa 5.1: Transformadas de Laplace para algunhas das funcións máis elementais.

Exercicio. Aplica o resultado anterior e as transformadas de Laplace das funcións elementais para calcular: (a) $f(t) = e^{5t}t^3$, (b) $g(t) = e^{-2t}\cos(4t)$, e (c) $h(t) = e^{-2t} + e^t \sin(t)$.

5.2.2 Transformada da función escalón e da función impulso

Como puidemos comprobar nos Temas 2 e 4, en moitas ocasións nas que intentamos resolver ecuacións diferenciais ordinarias que gobernan un fenómeno físico, os segundos membros que aparecen nas EDOs presentan descontinuidades, están definidos a cachos ou deben presentan cambios instantáneos no seu valor. Todos estes casos imos a consideralos mediante a función escalón e a función impulso.

Definición 5.2.4 (Función escalón)**.** *Dada unha constante $a > 0$, a función escalón unitario $u(t-a)$ defínise como*

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \textit{se } 0 \leq t < a, \\ 1, & \textit{se } t \geq a. \end{cases}$$

Coa axuda da función escalón podemos representar calquera función que sexa continua excepto nun número finito de puntos onde posúe descontinuidades de salto.

Exemplo. A función f definida a cachos en $(0, \infty)$ mediante a expresión

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } 0 \leq t < a, \\ e^{-t}, & \text{se } t \geq a, \end{cases}$$

pódese escribir como $f(t) = t^2 + (e^{-t} - t^2)u(t-a)$.

Coa axuda da función escalón podemos ampliar o conxunto de funcións das que coñecemos a súa transformada de Laplace de forma inmediata.

Proposición 5.2.5 (Translación no eixo t)**.** *Sexa $f(t)$ unha función definida para $t \geq 0$ para a que existe a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ para todo $s \in (c, \infty)$. Dada unha constante $a > 0$, satisfaise que*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \text{ para todo } s > c,$$

onde $u(t-a)$ é a función escalón unitario.

Con este resultado, podemos calcular a transformada de Laplace de funcións que están definidas a cachos (xa sexan continuas ou teñan descontinuidades de salto como a da función do exemplo anterior).

A función impulso $\delta(t-a)$ para $a > 0$ pódese definir *formalmente* como a derivada da función escalón. Evidentemente, esta definición carece de rigor no contexto das funcións e da operación derivación no sentido usual estudada ata o de agora, xa que a función escalón é descontinua en $t = a$. Sen embargo, admitiremos esta definición *formal* e no que segue usaremos a seguinte propiedade:

Proposición 5.2.6. *Sexa $f(t)$ unha función definida en $(0, \infty)$ e continua no punto $t = a$, entón satisfaise a relación*

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t = f(a).$$

Á vista desta propiedade, en problemas da Enxeñaría Mecánica, a función impulso permítenos representar unha forza que actúa sobre un corpo soamente durante un instante de tempo $t = a$ e que lle comunica un certo momento que depende da integral das forzas. Do mesmo xeito, en problemas de Enxeñaría Eléctrica, a función impulso pode representar a carga instantánea dun circuíto ou a derivada en tempo dunha forza electromotriz descontinua.

Ao aplicar a propiedade anterior da función impulso $\delta(t-a)$ con $a > 0$, é moi sinxelo calcular a súa transformada de Laplace como

$$\int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-as} \text{ para todo } s > 0.$$

Exercicio. Existen tres obxectos de masa $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 4\,\text{kg}$ e $m_3 = 4\,\text{kg}$ pendurados dunha barra de lonxitude $1\,\text{m}$ a $0.1\,\text{m}$, $0.3\,\text{m}$ e $0.5\,\text{m}$ do extremo esquerdo da barra, respectivamente. Calcula a integral

$$\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(momento lineal de primeira orde)},$$

onde f é a resultante das forzas que actúan sobre a barra.

5.2.3 Transformación de problemas de valor inicial

Unha vez que xa estudamos como calcular a transformada de funcións elementais (incluso cun número finito de descontinuidades de salto) e como se transforma as derivadas dunha función dada, estamos en posición de transformar a solución dun problema de valor inicial.

Exercicio. Sexa $y(t)$ a solución do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' + y = f(t), & \text{para } t > 0, \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2, \\ 3\cos(t) & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

Calcula a transformada de Laplace $Y(s)$ da solución $y(t)$.

Como podemos comprobar a partir deste exemplo, xa dispoñemos de todas as ferramentas para converter un problema que involucra unha EDO lineal de coeficientes constantes (de calquera orde) nun simple problema alxebraico co que calcular a transformada de Laplace da solución buscada.

5.3 Transformada inversa de Laplace

O último paso que debemos analizar para coñecer como a transformada de Laplace nos vai a ser útil para resolver problemas que involucran ecuacións diferenciais consiste en desfacer a transformada, é dicir, como calcular a función orixinal $y(t)$ a partir da súa transformada de Laplace $Y(s)$.

5.3.1 Definición e cálculo da transformada inversa

En primeiro lugar, debemos definir o que entendemos por transformada inversa de Laplace como unha aplicación lineal que leva funcións $F(s)$ definidas en intervalos do tipo (c, ∞) nas funcións $f(t)$ definidas en $[0, \infty)$.

Definición 5.3.1 (Transformada inversa de Laplace)**.** *A transformada inversa de Laplace dunha función $F(s)$ definida para $s \in (c, \infty)$ é aquela función $f(t)$ que é continua (excepto eventualmente nun número finito de puntos no que posúe descontinuidades de salto) en $[0, \infty)$ e satisfai*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) \text{ para todo } s > c.$$

Nese caso, a función $f(t)$ denotase por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$.

Exercicio. Calcula a transformada inversa de Laplace das seguintes funcións: (a) $F(s) = 1/s^5$, (b) $G(s) = 1/(s^2 + 7)$, (c) $H(s) = (-2s + 6)/(s^2 + 4)$.

As funcións coas que acabamos de traballar no exercicio anterior son o suficientemente sinxelas como para calcular a transformada inversa de Laplace mediante inspección directa da táboa de transformadas de funcións elementais. Sen embargo, existen outros exemplos sinxelos nos que o cálculo necesita de certa destreza. Por exemplo, para calcular a transformada inversa de Laplace da función

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

debemos empregar a descomposición en fraccións simples (do mesmo xeito a como se facía cando se trataba de integrar cocientes de polinomios) de forma que reescribamos a función como

$$F(s) = -\frac{16}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{25}{6}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{30}\frac{1}{s+4}.$$

Unha vez feito isto, podemos empregar a táboa de transformadas elementais para calcular a transformada inversa (que queda como exercicio). No que segue recordemos cal era o procedemento para descompoñer un cociente de polinomios $P(s)/Q(s)$ en suma de fraccións simples:

- Calcúlanse as raíces da ecuación polinómica $Q(s) = 0$.
- A descomposición en fraccións simples do cociente de polinomios ven dada pola suma dos seguintes termos asociados a cada unha das raíces:

  (a) Se a raíz a é real e simple, engádese o termo

  $$\frac{A}{s-a}, \qquad \text{con } A \text{ unha constante a determinar.}$$

(b) Se a raíz a é real e con multiplicidade $m > 1$, engádense os termos

$$\frac{A_1}{s-a} + \ldots + \frac{A_m}{(s-a)^m}, \qquad \text{con } A_1, \ldots, A_m \text{ constantes a determinar.}$$

(c) Se as raíces $a = \alpha \pm i\beta$ son complexas e simples, engádese o termo

$$\frac{A + Bs}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}, \qquad \text{con } A, B \text{ constantes a determinar.}$$

(d) Se as raíces $a = \alpha \pm i\beta$ son complexas e con multiplicidade $m > 1$, engádense os termos

$$\frac{A_1 + B_1 s}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \ldots + \frac{A_m + B_m s}{((s-\alpha)^2 + \beta^2)^m}, \qquad \text{con } A_1, B_1, \ldots, A_m, B_m \text{ constantes a determinar.}$$

- Calcúlase a suma de cada un dos termos ata obter unha única fracción onde o denominador coincida con $Q(s)$.
- Posto que a igualdade entre $P(s)/Q(s)$ e a suma de fraccións simples satisfaise para todo punto s, escóllense tantos puntos como constantes a determinar nas fraccións simples $s_0, s_1, \ldots, s_n$ e resólvese o sistema lineal que resulta de igualar os numeradores como

$$P(s_j) = \text{numerador da suma de fraccións simples en } s = s_j,$$

para $j = 0, \ldots, n$.

Exercicio. Calcula as descomposición en fraccións simples dos seguintes cocientes: (a) $F(s) = (s-2)/(s^4(s-1))$, (b) $G(s) = 2/(s^2-1)$, (c) $H(s) = 1/(s^2(s^2+1))$.

5.3.2 Resolución de PVIs e PVCs

Como acabamos de estudar nas seccións anteriores, xa estamos en posición de poder resolver problemas de valor inicial que involucren EDOs lineais de coeficientes constantes usando a transformada de Laplace mediante os seguintes pasos: (a) usar a EDO e as condicións iniciais para escribir un novo problema transformado, (b) calcular a transformada da solución, e (c) calcular a transformada inversa e obter así a solución do PVI. No que segue, imos a escribir máis precisamente como empregar esta estratexia de cálculo en problemas de valor inicial e problemas de valor de contorno para EDOs de orde dous (aínda que os mesmos argumentos poderían usarse para resolver problemas de orde n arbitrario).

Consideremos o seguinte PVI de orde dous:

$$\begin{cases} y''(t) + p_0 y'(t) + q_0 y(t) = r(t) & \text{en } t > a, \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = d_a, \end{cases}$$

onde p_0 e q_0 son os coeficientes constantes da EDO, $r(t)$ é o segundo membro da EDO (que pode ser unha función dependente da variable independente t) e y_a e d_a son as constantes que determinan as condicións iniciais. Para resolver este PVI usando a transformada de Laplace seguimos os seguintes pasos:

- Trasládase o problema no eixo t para ter as condicións inicias no punto $t = 0$. Definindo a nova variable dependente como $z(t-a) = y(t)$. Tendo en conta que $r(t+a) = r(t+a)u(t+a)$ para $t > 0$ (sendo $u(t+a)$ a función escalón no punto $t = -a$), o PVI anterior escríbese como

$$\begin{cases} z''(t) + p_0 z'(t) + q_0 z(t) = r(t+a)u(t+a), & \text{en } t > 0, \\ z(0) = y_a, \\ z'(0) = d_a. \end{cases}$$

- Calcúlase a transformada de Laplace do PVI:

$$\begin{cases} s^2 Z(s) - s z'(0) - z(0) + p_0(sZ(s) - z(0)) + q_0 Z(s) = R(s)e^{as}, \\ z(0) = y_a, \\ z'(0) = d_a, \end{cases}$$

  onde $R(s)$ e $Z(s)$ son as transformadas de Laplace do segundo membro $r(t)$ e da función $z(t)$, respectivamente.
- Empréganse as condicións iniciais e calcúlase a transformada de Laplace da solución do PVI a partir da expresión

$$s^2 Z(s) - s d_a - y_a + p_0(sZ(s) - y_a) + q_0 Z(s) = R(s)e^{as}.$$

- Calcúlase a transformada inversa de Laplace da solución do PVI:

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)e^{as} + s d_a + y_a + p_0 y_a}{s^2 + p_0 s + q_0}\right\}(t),$$

  e polo tanto obtense $y(t) = z(t-a)$.

Do mesmo xeito, o cálculo da solución exacta dun problema de valor de contorno mediante a transformada de Laplace segue os mesmos pasos cunha pequena variación ao aplicar as condicións de contorno. Consideremos agora o seguinte PVC de orde dous:

$$\begin{cases} y''(t) + p_0 y'(t) + q_0 y(t) = r(t) & \text{en } (a, b), \\ y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b, \end{cases}$$

onde p_0 e q_0 son os coeficientes constantes da EDO, $r(t)$ é o segundo membro da EDO (que pode ser unha función dependente da variable independente t) e y_a e y_b son as constantes que determinan as condicións de contorno nos puntos $t = a$ e $t = b$, respectivamente. Para resolver este PVC usando a transformada de Laplace seguimos os seguintes pasos:

- Trasládase o problema no eixo t para ter a condición inicial do extremo inferior do intervalo (a, b) no punto $t = 0$. Definindo a nova variable dependente como $z(t - a) = y(t)$, tendo en conta que $r(t + a) = r(t + a)u(t + a)$ para $t > 0$ (sendo $u(t + a)$ a función escalón no punto $t = -a$), o PVC anterior escríbese como

$$\begin{cases} z''(t) + p_0 z'(t) + q_0 z(t) = r(t + a)u(t + a), & \text{en } (a, b), \\ z(0) = y_a, \\ z(b - a) = y_b, \end{cases}$$

- Calcúlase a transformada de Laplace do PVC:

$$\begin{cases} s^2 Z(s) - sz'(0) - z(0) + p_0(sZ(s) - z(0)) + q_0 Z(s) = R(s)e^{as}, \\ z(0) = y_a, \\ z(b - a) = y_b, \end{cases}$$

  onde $R(s)$ e $Z(s)$ son as transformadas de Laplace do segundo membro $r(t)$ e da función $z(t)$, respectivamente.
- Emprégase a condición de contorno en $t = 0$ e calcúlase a transformada de Laplace da solución do PVC a partir da expresión

$$s^2 Z(s) - sC - y_a + p_0(sZ(s) - y_a) + q_0 Z(s) = R(s)e^{as}.$$

- Calcúlase a transformada inversa de Laplace da solución do PVC:

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)e^{as} + sC + y_a + p_0 y_a}{s^2 + p_0 s + q_0}\right\}.$$

  onde C é unha constante de integración a determinar que reempraza o valor de $y'(0)$.
- O valor da constante C fíxase usando a condición de contorno $z(b-a) = y_b$, co que finalmente se obtén $y(t) = z(t - a)$.

A miúdo os problemas de valor inicial ou de contorno van a estar definidos en intervalos onde o extremo inferior do intervalo coincide co punto $t = 0$. Nese caso, o primeiro paso que consiste en trasladar o problema sobre o eixo t é innecesario e omitirase.

Exercicio. Emprega a transformada de Laplace para resolver o PVI $y' + 3y = 13\sin(2t)$ coa condición inicial $y(0) = 6$. Fai o mesmo co PVC de segunda orde:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-4t} \text{ en } (1, 2), \\ y(1) = 1, \\ y(2) = 5. \end{cases}$$

5.4 Aplicacións na Enxeñaría

Como xa temos estudados nos temas anteriores, as ecuacións diferencias e, en particular, os problemas de valor inicial e de contorno modelan algunhas das situacións máis sinxelas que se poden atopar na Enxeñaría. Neste tema imos analizar dúas delas: o xa coñecido PVI que goberna o comportamento dun circuíto RLC e o PVC que modela a flexión dunha viga elástica que soporta unha carga perpendicular ao seu eixe.

5.4.1 Circuíto en serie RLC

Lembremos que aplicando as leis de Kirchoff, aplicadas en particular a un circuíto en serie, obtense unha EDO que resulta de igualar a suma de todas as caídas de potencial sobre un circuíto a cero. Polo tanto, igualando o potencial debido á forza electromotriz ás caídas de potencial producidas pola resistencia o condensador e a bobina, resulta que

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t),$$

onde $i(t)$ é a intensidade de corrente do circuíto e $q(t)$ é a carga eléctrica. Se supoñemos que os elementos do circuíto teñen propiedades eléctricas constantes, poderíamos empregar a transformada de Laplace para calcular $i(t)$ ou $q(t)$ unha vez foran especificadas as condicións iniciais.

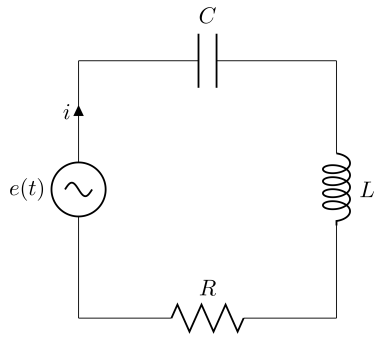


Figure 5.1: Esquema representativo dun circuíto en serie RLC alimentado por unha forza electromotriz $e(t)$, unha resistencia R, un condensador con capacitancia C e unha bobina con inductancia L.

Habitualmente, a forza electromotriz $e(t)$ vai estar definida a cachos e eventualmente podería ter descontinuidades de salto en diferentes instantes de tempo. Para resolver este tipo de PVIs a

estratexia que viñamos empregando era descompoñer o PVI en varios problemas enunciados nos subintervalos nos que $e(t)$ era continua e despois, empregar condicións de acoplamento nos puntos fronteira de cada subintervalo para determinar todas as constantes de integración que aparecían nos cálculos intermedios.

Agora, co emprego da transformada de Laplace imos a ser capaces de resolver o PVI asociado a un circuíto RLC sen ter que descompoñelo en varios subproblemas. O único prezo que teremos que pagar consiste en escribir convenientemente a forza electromotriz empregando a función de escalón unitario $u(t-a)$.

Exercicio. Supoñamos que un circuíto RLC onde os seus elementos están representados por $R = 1\,\Omega$, $L = 2\,$H e $C = 0.25\,$F está conectado a unha pila de corrente continua que proporciona $5\,$V. Debido a unha conexión defectuosa coa pila, despois de estar conectado $3\,$s, o circuíto se desconecta durante $2\,$s e conéctase de novo durante $1\,$s. Se a carga eléctrica e a intensidade de corrente iniciais son nulas, calcula a intensidade de corrente despois de $6\,$s.

5.4.2 Flexión dunha viga

No contexto do cálculo de estruturas é habitual ter que enfrontarse co cálculo da deformación e as vibracións que sofren estruturas delgadas como vigas ou placas, que poden formar parte por exemplo de pontes, edificios ou chasis de vehículos. No caso das vigas, a teoría de flexión máis sinxela permite escribir unha EDO que goberna a deformación dunha viga cando esta traballa a flexión.

Se supoñemos que a viga é de lonxitude L, que está fabricada cun material homoxéneo e a súa xeometría é tal que as seccións transversais son simétricas e constantes ao longo de todo o seu eixe lonxitudinal, o desprazamento perpendicular ao seu eixe lonxitudinal ven modelado pola EDO

$$EI\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = f(x),$$

onde E é o modulo de Young do material do que está feita a viga (que caracteriza as propiedades elásticas do material), I é o segundo momento de inercia da sección transversal da viga, $f(x)$ é a forza que exercen as cargas sobre a viga e $y(x)$ é o desprazamento que sofre a viga en cada punto.

En moitas das aplicación mecánicas, as cargas que soporta a viga teñen carácter puntual (actúan sobre un único punto da viga), e polo tanto teñen que tratarse mediante a función impulso, ou ben están definidas soamente nunha zona da viga e consecuentemente introdúcense na EDO mediante o uso da función escalón unitario.

Para completar a EDO asociada á flexión dunha viga e escribir un PVC, debemos incluír tamén as

condicións de contorno que posúe a viga nos extremos, situados en $x = 0$ e $x = L$. Entre outras condicións, existen dous tipos principais de condicións de contorno:

(a) Extremo empotrado: neste caso o desprazamento é nulo no extremo e ademais a curva de deformación da viga é tanxente ao eixo lonxitudinal da viga. Se o extremo $x = 0$ fose empotrado, as condicións de contorno escribiríanse como

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

(b) Extremo libre: neste caso o momento de forzas que actúa sobre o extremo é nulo e ademais a forza cortante sobre a sección transversal da viga tamén é nula. Se o extremo $x = L$ fose libre, as condicións de contorno serían

$$y''(L) = 0, \qquad y'''(L) = 0,$$

xa que o momento de forzas e as forzas cortantes son proporcionais a y'' e y''', respectivamente.

Exercicio. Considera unha viga de lonxitude 1 m que está empotrada nos dous extremos. Calcula o desprazamento de flexión sufrido pola viga cando a carga que soporta está formada polo peso dun corpo de 10 kg apoiado no intervalo $(0, 0.1)$ e unha masa de 5 kg pendurada do punto $x = 0.8$.

5.5 Exericicios

1. Decide razoadamente en que casos existe a transformada de Laplace, e nos casos nos que sexa posible, calcula a transformada das seguintes funcións:

   (a) $f(t) = t^2$, (b) $f(t) = e^{-t}\sin(\alpha t)$,
   (c) $f(t) = te^{3t}$, (d) $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$,
   (e) $f(t) = (u(t) - u(t-2\pi))\sin(t)$, (f) $f(t) = e^{-t}\cosh(\alpha t)$,
   (g) $f(t) = e^t u(t-1) + (1-e^t)u(t-2)$, (h) $f(t) = \sin(t-\alpha)$,
   (i) $f(t) = \sinh(t)/t$, (j) $f(t) = e^{-t}\cos(\pi t)u(t-1)$,

   onde $u(t-a)$ é a función escalón unidade no punto $t = a$ e $\alpha \geq 0$ é un parámetro constante.

2. Comproba as seguintes igualdades:

$$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}(s), \qquad \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}s^2}(s) = \mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s),$$

   e aplícaas ao cálculo das transformades de Laplace das funcións

(a) $f(t) = t^2 e^{-2t}$, (b) $f(t) = 2t\cos(5t)$,

(c) $f(t) = (t-1)u(t)$, (d) $f(t) = tu(t-1)$,

(e) $f(t) = (t-1)u(t-1)$, (f) $f(t) = u(t-1)/t$.

3. Calcula a transformada inversa de Laplace das seguintes funcións usando a descomposición en fraccións simples:

(a) $F(s) = \dfrac{3s^2 - s + 6}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$, (b) $F(s) = \dfrac{4s^2 - 1}{(s^2-1)(s^2-4)}$,

(c) $F(s) = \dfrac{6s^2 + 1}{s^3(s+1)}$, (d) $F(s) = \dfrac{32}{(s^2-1)^4}$,

(e) $F(s) = \dfrac{4s + 3}{s^3(s+1)}$, (f) $F(s) = \dfrac{4}{s^4 - 1}$.

4. Calcula a transformada de Laplace das seguintes funcións (empregando a función escalón unitario):

(a) $f(t) = \begin{cases} -2\cos(t) \text{ se } t \leq 2\pi, \\ 4t^2 \text{ se } t > 2\pi. \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \leq 1, \\ -2 \text{ se } 1 < t \leq 2, \\ 0 \text{ se } t > 2. \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} e^{-3t} \text{ se } 0 < t \leq 2, \\ 0 \text{ se } t > 2. \end{cases}$ (d) $f(t) = \begin{cases} e^{t} \text{ se } 0 < t \leq 1, \\ t \text{ se } 1 < t \leq 2, \\ 1 \text{ se } t > 2. \end{cases}$

5. Calcula a solución dos seguintes problemas de valor inicial mediante o uso da transformada de Laplace:

(a) $\begin{cases} y' - 3y = e^{2t}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0, \\ y(0) = -2,\ y'(0) = 5. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = -8e^{\pi - t},\ t > \pi \\ y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 5. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''' + y'' + 3y' - 5y = 16e^{-t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t}\sin(2t)u(t-3), \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t(u(t) - u(t-1)), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3. \end{cases}$

6. Un circuíto do tipo RLC que ten por compoñentes unha bobina con inductancia $L = 1$ H, unha resistencia $R = 0\,\Omega$ e un condensador con capacitancia $C = 10^{-4}$ F está alimentado por unha forza electromotriz $e(t) = 100$ V para $0 < t \leq 2\pi$, mentres que $e(t) = 0$ V para $t > 2\pi$. Se a carga eléctrica e a intensidade de corrente iniciais son nulas, calcula a intensidade de corrente do circuíto.

7. Un circuíto do tipo RL (sen condensador), que ten por compoñentes unha bobina con induc-

tancia $L = 1$ H e unha resistencia $R = 4\,\Omega$, está alimentado por unha forza electromotriz

$$e(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ -t+2 & \text{se } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Se a intensidade de corrente e a súa derivada son nulas no instante inicial, calcula a intensidade de corrente do circuíto. Fai os mesmos cálculos no caso no que

$$e(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ -t & \text{se } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

8. Unha viga elástica de lonxitude unidade ten pendurado sobre o punto $x = a$ un corpo de masa 4 kg. Sabendo que a EDO que goberna os desprazamentos a flexión da viga ven dada por

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} = f(x),$$

sendo f a carga aplicada sobre a viga. Se o módulo de Young $E = 10^4$ N/m^2 e $I = 0.01$ m^3 e a viga está empotrada nos seus extremos, calcula cal é a posición do punto no que pendurar o corpo para que acada o maior desprazamento posible da viga.

Chapter 6

Resolución de sistemas lineais de EDOs

Ata o de agora, dende o Tema 1 ata o Tema 5, sempre traballamos con ecuacións diferencias ordinarias onde había unha única variable dependente. Este tipo de EDOs non son sempre as adecuadas para modelizar algúns sistemas físicos onde existen varias incógnitas (variables dependentes) que non se poden despexar directamente e que satisfán cadansúa ecuación diferencial ordinaria. Este tipo de situacións son as que orixinan o estudo de sistemas de EDOs (SEDOs) e, en particular, os SEDOs de tipo lineal.

Exemplo. Consideremos o sistema resorte-masa formado por dous corpos de masa m_1 e m_2 que están unidos a dous resortes con constantes k_1 e k_2, respectivamente. O sistema formado polos dous corpos e os resortes están unidos a un soporte ríxido fixo por un dos extremos do primeiro resorte. Se denotamos por $x_1(t)$ e $x_2(t)$ aos desprazamentos dende a posición de equilibrio de cada un dos corpos, o sistema de ecuacións diferencias ordinarias lineais que satisfán ven dado por

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k_2(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Para obter o anterior sistema de ecuacións estase a supoñer que a forza que exerce os resortes sobre cada un dos corpos depende linealmente da elongación do resorte (lei de Hooke) e que, en calquera instante de tempo, existe un equilibrio de forzas entre a parte cinética asociada á masa de cada corpo e a parte potencial que proporcionan os dous resortes.

Ao igual que no Tema 5, onde acabamos de estudar como podemos empregar a transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial e de valor de contorno asociados a ecuacións diferenciais lineais con coeficientes constantes, podemos empregar tamén esta técnica para resolver

SEDOs lineais. De feito, a transformada de Laplace permitiunos resolver de forma sinxela algúns problemas nos que os segundos membros das EDOs era descontinuos. O mesmo vai a suceder agora cando teñamos que resolver PVIs asociados a sistemas de EDOs lineais de primeira orde.

6.1 Sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde

Como acabamos de ver no exemplo anterior, un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias non é máis que un conxunto de EDOs con varias variables dependentes. Ao longo deste tema nos centraremos en sistemas de ecuacións diferenciais lineais de primeira orde.

Definición 6.1.1. *Un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias (SEDO) lineais de primeira orde é aquel conxunto de EDOs lineais que se pode escribir da forma*

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) = f_1(t), \\ y_2'(t) + a_{21}(t)y_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) + a_{n1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) = f_n(t), \end{cases}$$

onde t é a variable independente e $y_1, \ldots, y_n$ son as n variables dependentes do SEDO. As funcións $a_{ij}(t)$, con $1 \leq i, j \leq n$, son os coeficientes do sistema de EDOs e $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son os coeficientes do segundo membro.

Á vista desta definición (aínda sen coñecer as técnicas propias da resolución de SEDOs), coas ferramentas que xa coñecemos do Tema 2 e 3, podemos calcular a solución xeral de cada unha das variables dependentes dun SEDO en casos sinxelos.

Exercicio. Calcula a solución xeral dos seguintes SEDOs:

(a) $\begin{cases} y_1' = 2t, \\ y_2' = e^t. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_1' = 2t, \\ y_2' - y_1 + 3y_2 = e^t. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y_1' - 3y_2' = 0, \\ y_2' - y_1 + 3y_2 = e^t. \end{cases}$

6.1.1 Redución de orde de EDOs

Como xa estudamos no Tema 3, en moitas ocasións as EDOs lineais que gobernan algúns fenómenos físicos relevantes na Enxeñaría, tales como o comportamento eléctrico dun circuíto RLC, a deformación a flexión dunha viga ou movemento dun fluído viscoso ao longo dun tubo cilíndrico, son de orde elevado (maior a un). Todas estas EDOs pódense reescribir como un sistema de EDOs lineais de orde un. Esta transformación pode permitir simplificar os cálculos nalgunhas ocasións, ou poñer de relevancia certas magnitudes físicas relacionadas coa variable dependente orixinal que soportaba as derivadas de alta orde.

Se o noso obxectivo é reducir a orde da EDO

$$p_n(t)y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = g(t),$$

poderíamos introducir (hai moitas outras alternativas) as seguintes novas variables dependentes:

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \ldots, \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t),$$

e polo tanto o sistema de EDOs lineais de orde un con n ecuacións resulta

$$\begin{cases} p_n(t)y_n'(t) + p_{n-1}(t)y_n(t) + \ldots + p_1(t)y_2(t) + p_0(t)y_1(t) = g(t), \\ y_{n-1}'(t) - y_n(t) = 0, \\ y_{n-2}'(t) - y_{n-1}(t) = 0, \\ \ldots\ldots \\ y_2'(t) - y_3(t) = 0, \\ y_1'(t) - y_2(t) = 0, \end{cases}$$

onde se está a empregar de forma recorrente a relación entre y_k e y_{k+1}

$$y_{k+1}(t) = y^{(k)}(t) = (y^{(k-1)}(t))' = y_k'(t).$$

Con este sistema de ecuacións, a EDO orixinal de orde n aparece reescrita coas novas variables dependentes introducidas $y_1, \ldots, y_n$ para evitar as derivadas de orde maior que un.

Exercicio. Reescribe as seguintes EDOs de orde elevado como un sistema de EDOs lineais de orde un: (a) $y''' - 3y'' + 5y - t^2 = 0$, (b) $y'' + 3 = 0$, (c) $xy^{(4)} + 2\cos(x)y'' = x - 1$.

6.1.2 Estrutura do conxunto de solucións

Ao igual que ocorre cos sistemas lineais de ecuacións en Álxebra, os cales pódense escribir cunha formulación matricial, tamén un sistema de EDOs lineais vai poder escribirse en forma matricial. Dado o sistema de EDOs lineais escrito como

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) = f_1(t), \\ y_2'(t) + a_{21}(t)y_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) + a_{n1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) = f_n(t), \end{cases}$$

este sistema admite a forma matricial

$$\vec{y}\,'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{y}(t) + \vec{f}(t),$$

onde a operación derivación faise compoñente a compoñente dos vectores, o vector de variables dependentes e o vector segundo membro son respectivamente

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

e a matriz de coeficientes ven dada por

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Unha vez escrito o sistema de EDOs lineais en forma matricial, estamos en posición de estudar cal é a estrutura da solución xeral. A partir da estreita relación que existe entre as EDOs lineais de orde elevado e os sistemas de EDOs lineais, debemos intuír que a estrutura da solución xeral vai a ser semellante nos dous casos.

Teorema 6.1.2 (Solución xeral)**.** *Consideremos un sistema de EDOs lineais de orde un con segundo membro non nulo. Se $\vec{y}_{\mathrm{h}}$ é a solución xeral do sistema de EDOs lineais de orde un homoxénea $\vec{y}_{\mathrm{h}}{}'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{y}_{\mathrm{h}}(t)$ e $\vec{y}_{\mathrm{p}}$ é unha solución particular do sistema de EDOs lineais de orde un completo entón*

$$\vec{y}_{\mathrm{xer}}(t) = \vec{y}_{\mathrm{h}}(t) + \vec{y}_{\mathrm{p}}(t)$$

é a solución xeral do sistema de EDOs lineais de orde un completo.

Este resultado ao igual que ocorría no caso das EDOs lineais de orde elevado, dedúcese dun principio de superposición que tamén se cumpre no caso de SEDOs lineais de orde un.

Teorema 6.1.3 (Principio de superposición)**.** *Sexa $\vec{u}$ unha solución do SEDO*

$$\vec{u}\,'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t),$$

e $\vec{v}$ unha solución do SEDO

$$\vec{v}\,'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{v}(t) + \vec{g}(t),$$

entón a función $\vec{w}$ definida por

$$\vec{w}(t) = a\vec{u}(t) + b\vec{v}(t),$$

sendo a e b dúas constantes, é unha solución da EDO

$$\vec{w}\,'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{w}(t) + (a\vec{f}(t) + b\vec{g}(t)).$$

Ao aplicar este resultado, se temos n solucións particulares coñecidas, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, dun SEDO de n ecuacións lineais de orde un homoxéneo, debemos ter un criterio para deducir se $\vec{w} = C_1\vec{u}_1 + \ldots + C_n\vec{u}_n$ é ou non a solución xeral da EDO lineal homoxénea. Como xa ocorrera no Tema 3, a resposta vai vir dada polo criterio de independencia lineal de solucións e o cálculo do Wronskiano asociado a un conxunto de solucións particulares do SEDO homoxéneo.

6.1.3 Wroskiano dun conxunto de funcións

Para precisar cales son as condicións correctas que debemos impoñer para que o conxunto de funcións $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ formen a solución xeral $\vec{w} = C_1\vec{u}_1 + \ldots + C_n\vec{u}_n$ dun SEDO lineal de orde un con n ecuacións, debemos estudar o seguinte teorema:

Teorema 6.1.4 (Independencia lineal de solucións)**.** *Sexa $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ solucións particulares do SEDO lineal de orde un homoxéneo formado por n ecuacións (con coeficientes variables ou constantes) nun intervalo I. A función $\vec{w}$ definida por*

$$\vec{w}(t) = C_1\vec{u}_1(t) + \ldots + C_n\vec{u}_n(t) \quad \textit{con } t \in I,$$

é a solución xeral do SEDO se e só se o **Wroskiano** *de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, definido por*

$$W[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n](t) = \det \left(\begin{array}{c|c|c|c} \vec{u}_1(t) & \vec{u}_2(t) & \ldots & \vec{u}_n(t) \end{array} \right)$$

é sempre diferente de cero para todo $t \in I$.

Exercicio. Considera o seguinte sistema de EDOs lineais de orde un homoxéneo:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = -2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Escríbeo en forma matricial e comproba que as funcións

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -e^{3t} \\ -e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

son solucións particulares do SEDO. Razoa se estas funcións poderían usarse para escribir a solución xeral do sistema de EDOs.

6.2 Resolución de sistemas de EDOs lineais con coeficientes constantes

Ao igual que ocorría no caso das EDOs lineais de orde elevado, existen multitude de métodos de resolución para calcular a solución xeral dun SEDO, ou a solución dun problema de valor inicial asociado a un SEDO. No que segue nos centraremos na resolución de PVIs empregando a transformada de Laplace.

Entenderemos como un problema de valor inicial asociado a un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias lineais de orde un a aquel problema que involucra unha SEDO e unha condición inicial

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = \mathcal{A}(t)\vec{y}(t) + \vec{f}(t) & \text{para } t > 0, \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0, \end{cases}$$

onde $\vec{y}_0$ é un vector de compoñentes constantes que determina o valor de cada variable dependente do SEDO no instante inicial, que por simplicidade sempre supoñeremos situado en $t = 0$.

6.2.1 Utilización da transformada de Laplace

Se supoñemos o caso máis simple, no que a matriz de coeficientes $\mathcal{A}(t)$ son constantes, a transformada de Laplace pódese empregar para transformar o PVI, despexar a transformada de cada unha das variables dependentes resolvendo un sistema de ecuacións alxebraicas lineais e, por último, empregar a transformada inversa de Laplace para obter a expresión da solución con respecto á variable independente orixinal do PVI. Máis precisamente, se o noso obxectivo é resolver o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) = f_1(t), \\ y_2'(t) + a_{21}(t)y_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) + a_{n1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) = f_n(t), \\ y_1(0) = y_{1,0},\ y_2(0) = y_{2,0}, \ldots, y_n(0) = y_{n,0}, \end{cases}$$

a utilización da transformada de Laplace na súa resolución debe seguir os pasos:

- Reescribir o PVI como un problema onde aparecen as transformadas de Laplace das variables dependentes e a variable s como parámetro, empregando convenientemente as condicións iniciais sobre cada unha das variable dependentes:

$$\begin{cases} sY_1(s) - y_{1,0} + a_{11}Y_1(s) + \ldots + a_{1n}Y_n(s) = F_1(s), \\ sY_2(s) - y_{2,0} + a_{21}Y_1(s) + \ldots + a_{2n}Y_n(s) = F_2(s), \\ \ldots\ldots\ldots \\ sY_n(s) - y_{n,0} + a_{n1}Y_1(s) + \ldots + a_{nn}Y_n(s) = F_n(s). \end{cases}$$

- Despexar as variables transformadas $Y_1(s), \ldots, Y_n(s)$ a partir da resolución do anterior sistema de ecuacións lineais de n ecuacións con n incógnitas.
- Empregar a transformada inversa de Laplace para calcular as expresións de $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ a partir de $Y_1(s), \ldots, Y_n(s)$ (o que implica o cálculo da descomposición en fraccións simples de cada fracción de polinomios, o uso da táboa das transformadas de Laplace elementais, etc.)

Exercicio. Considera o seguinte PVI que involucra un SEDO de dúas ecuacións:

$$\begin{cases} y_1' - 2y_2 = 4t, \\ y_2' + 2y_2 - 4y_1 = -4t - 2, \\ y_1(0) = 4, \ y_2(0) = -5. \end{cases}$$

a) Calcula a súa solución. b) Se as condicións iniciais fosen nulas: ¿Cal sería a solución?

6.2.2 Aplicacións na Enxeñaría Eléctrica

Como xa temos estudados nos temas anteriores, as ecuacións diferencias e, en particular, os problemas de valor inicial e de contorno modelan algunhas das situacións máis sinxelas que se poden atopar na Enxeñaría. Neste tema imos analizar como os circuítos eléctricos en paralelo pódense modelar tamén mediante sistemas de ecuacións lineais onde as incógnitas (variables dependentes) son as intensidades de corrente e as cargas eléctricas en cada lazo da rede do circuíto.

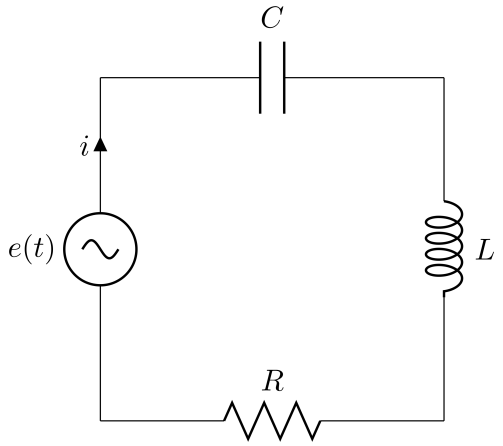


Figure 6.1: Esquema representativo dun circuíto RLC en serie alimentado por unha forza electromotriz $e(t)$, unha resistencia R, un condensador con capacitancia C e unha bobina con inductancia L.

Ao aplicar as leis de Kirchhoff a un circuíto eléctrico tanto en serie como en paralelo, obtéñense cales son as ecuacións alxebraicas e diferenciais que satisfán tanto as intensidades de corrente como as cargas eléctricas que gobernan a resposta eléctrica do circuíto. En particular, as leis de Kirchhoff establecen que:

(a) As intensidades de corrente consérvanse en cada un dos nodos do circuíto, que separan os distintos lazos da rede do circuíto.

(b) As ecuacións diferenciais que satisfán as intensidades e as cargas eléctricas en cada lazo do circuíto veñen dadas polo equilibrio entre as contribucións das forzas electromotrices e as caídas de potencial asociadas a cada elemento (xa sexa unha resistencia, unha bobina ou un condensador).

(c) En cada lazo da rede do circuíto, a intensidade queda definida pola derivada temporal da carga eléctrica.

Lembrémonos que, se $i(t)$ e $q(t)$ son respectivamente a intensidade de corrente e a carga eléctrica, a caída de voltaxe asociada a unha resistencia R ven dada polo termo $Ri(t)$, a caída asociada a unha bobina é $Li'(t)$ e a caída de voltaxe asociada a un condensador escríbese como $(1/C)q(t)$.

No caso dun circuíto RLC en serie, posto que a rede posúe un único lazo (como se amosa na Figura 6.1) as ecuacións que gobernan o circuíto son

$$\begin{cases} Li' + Ri + \dfrac{1}{C}q = e(t), \\ q' = i. \end{cases}$$

Se supoñemos que os elementos do circuíto teñen propiedades eléctricas constantes, e se son coñecidas as condicións iniciais sobre cada variable dependente do sistema lineal de ecuacións diferenciais ordinarias, podemos empregar a transformada de Laplace para transformar o problema, calcular a transformada de Laplace de cada unha das variables dependentes mediante a resolución dun sistema lineal (coa variable s na que se escribe a transformada de Laplace como parámetro) e, finalmente, empregar a transformada inversa de Laplace para obter as funcións de intensidade de corrente e carga eléctrica para cada un dos lazos da rede do circuíto en función do tempo.

Exercicio. Consideremos un circuíto RLC en paralelo, como o que se amosa na Figura 6.2, onde os seus elementos están representados por $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $L = 2\,$H e $C = 0.25\,$F, está conectado a unha pila de corrente continua que proporciona $5\,$V.

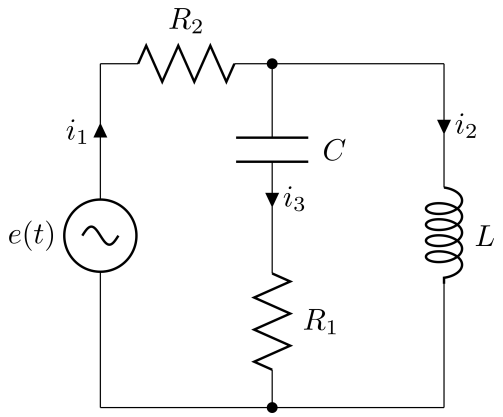


Figure 6.2: Esquema representativo dun circuíto RLC en paralelo cunha rede de dous lazos alimentado por unha forza electromotriz $e(t)$, dúas resistencias R_1 e R_2, un condensador con capacitancia C e unha bobina con inductancia L.

Ao aplicar as leis de Kirchhoff, este circuíto en paralelo modélase mediante as seguintes ecuacións:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ R_2 i_1 + \dfrac{1}{C} q + R_1 i_3 = e(t), \\ L i_2' - R_1 i_3 - \dfrac{1}{C} q = 0, \\ q' = i_3. \end{cases}$$

Debido a unha conexión defectuosa coa pila, despois de estar conectado 3 s, o circuíto desconéctase durante 2 s e conéctase de novo durante 1 s. Se a carga eléctrica e a intensidade de corrente iniciais son nulas, calcula a intensidade de corrente despois de 6 s.

6.3 Exercicios

1. Calcula a solución xeral dos seguintes sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias:

   (a) $\begin{cases} 3x'(t) + 2x(t) - y(t) = 1, \\ 4y'(t) + 3y(t) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) = -1, \\ x'(t) + y'(t) - x(t) = t^2. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 3x'(t) + 2x(t) - y(t) = 1, \\ 4y'(t) + 3y(t) + x'(t) = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + 2z(t), \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 2z(t), \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + x(t). \end{cases}$

2. Escribe un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias equivalente para cada unha das seguintes EDOs e calcula a solución xeral do SEDO asociado empregando a transformada

de Laplace:

(a) $y'' - y' - 2y = 0,$ (b) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

(c) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 16e^{-t},$ (d) $x''' + x'' + 2x' - x = \sin(t).$

3. Calcula a solución dos seguintes problemas de valor inicial, escribindo onde sexa necesario un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias de orde un:

(a) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t), \\ y'(t) = x(t) + z(t), \\ z'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 5z(t), \\ x(0) = -1,\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + t - 1, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - 5t - 2, \\ x(0) = -2,\ y(0) = 3. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^{(4)}(t) - y(t) = u(t-4), \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''(t) - y(t) = u(t-3), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1. \end{cases}$

onde $u(t-a)$ é a función escalón unidade no punto $t = a$.

4. Resolve o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + f(t), \\ y'(t) = x(t) - 2y(t), \\ x(0) = -e,\ y(0) = 0, \end{cases}$$

onde a función $f(t)$ ven dada por $f(t) = 0$ se $0 \le t < 1$ e $f(t) = t$ no caso de $t \ge 1$.

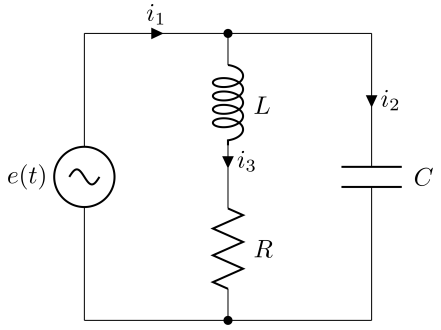
5. Resolve o seguinte problema de valor inicial, escribindo un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias de orde un e empregando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 2cy' + y = \delta(t-1), \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $\delta(t-a)$ é a función impulso con soporte no punto $t = a$. No cálculo da solución, distingue os casos $c > 1$, $c = 1$ e $0 \le c < 1$.

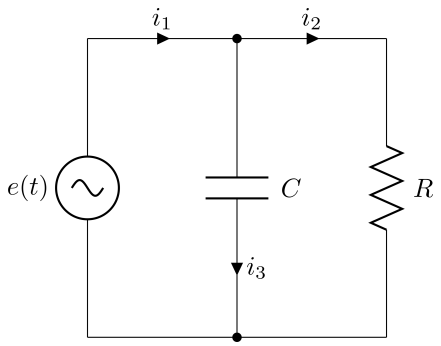
6. Calcula as intensidades de corrente e a carga eléctrica en cada un dos lazos dos seguintes circuítos en paralelo, supoñendo que tanto a carga eléctrica inicial é 1 C, as intensidades de corrente iniciais son nulas e que a voltaxe da pila é de 5 V.

(a)



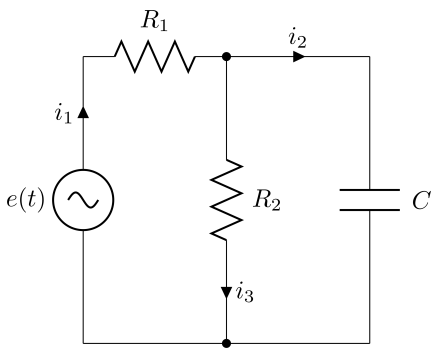
$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ Li_3' + Ri_3 = e(t), \\ \dfrac{1}{C}q - Ri_3 - Li_3' = 0, \\ q' = i_2. \end{cases}$$

(b)



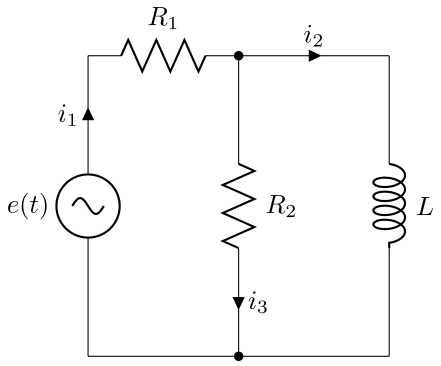
$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ \dfrac{1}{C}q = e(t), \\ Ri_2 - \dfrac{1}{C}q = 0, \\ q' = i_3. \end{cases}$$

(c)



$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ R_1 i_1 + R_2 i_3 = e(t), \\ \dfrac{1}{C}q - R_2 i_3 = 0, \\ q' = i_2. \end{cases}$$

(d)



$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ R_1 i_1 + R_2 i_3 = e(t), \\ L i_2' - R_2 i_3 = 0. \end{cases}$$

6.4 Práctica 5. Transformada de Laplace e resolución de SEDOs

Nesta práctica traballaremos tanto coa transformada de Laplace (e a súa transformada inversa) como cos comandos necesarios para resolver problemas de valor inicial que involucran sistemas de EDOs lineais.

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace calcúlase co comando `laplace`, ao que hai que indicarlle a función a transformar, cal é o nome da variable independente da función (habitualmente t) e o nome da nova variable da que depende a función transformada (habitualmente s). Por exemplo, se queremos calcular a transformada de Laplace $F(s)$ da función $f(t) = 3t^2 + 5\sin(2t)$, empregaríamos o comando:

```
>>>t=sym('t');s=sym('s');
>>>laplace('3*t^2+5*sin(2*t)',t,s)
ans = 10.0/(s^2+4.0)+6.0/s^3.0
```

O cálculo das transformadas de Laplace da función escalón unidade e da función impulso realizaríase exactamente do mesmo xeito, sabendo que en OCTAVE a función escalón $u(t-a)$ escríbese como `unit_step(t-a)` e que a función impulso $\delta(t-a)$ introdúcese como `delta(t-a)`. Por exemplo se queremos calcular a transformada de Laplace de $f(t) = t^2u(t-4)$ e $g(t) = t\delta(t-3)$, empregaríamos os comandos:

```
>>>laplace('t^2*unit_step(t-4)',t,s)
ans = (16/s+8/s^2+2/s^3)*e^-(4*s)
>>>laplace('t*delta(t-3)',t,s)
ans = 3.0*e^-(3.0*s)
```

Para o cálculo da transformada inversa de Laplace, o comando a empregar é `ilaplace`, onde de novo hai que especificar non soamente a expresión da transformada $F(s)$ senón tamén a variable do plano de Laplace (habitualmente s) e a variable independente orixinal da función (habitualmente t). Por exemplo, se queremos transformar

$$F(s) = \frac{s^2+3s-4}{s^4-6s^3-3s^2+52s-60},$$

empregaríamos o comando

```
>>>ilaplace('(s^2+3*s-4)/(s^4-6*s^3-3*s^2+52*s-60)',s,t)
ans = e^(5*t)/2-2*t*e^(2*t)/5-13*e^(2*t)/25+e^(-3*t)/50
```

Aínda que o comando `laplace` era capaz de calcular a transformada de Laplace tanto da función escalón como da función impulso, o comando `ilaplace` non é capaz de calcular transformadas inversas que teñan descontinuidades (e polo tanto non será posible calcular funcións que involucren $u(t-a)$ ou $\delta(t-a)$).

Exericicios

1. Calcula a transformada de Laplace das seguintes funcións:

   (a) $f(t) = t^2$, (b) $f(t) = e^{-t}\sin(\alpha t)$,

   (c) $f(t) = te^{3t}$, (d) $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$,

   (e) $f(t) = (u(t) - u(t-2\pi))\sin(t)$, (f) $f(t) = e^{-t}\cosh(\alpha t)$.

2. Calcula a transformada inversa de Laplace das seguintes funcións e comprobaa usando a descomposición en fraccións simples:

(a) $F(s) = \dfrac{3s^2 - s + 6}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$, (b) $F(s) = \dfrac{4s^2 - 1}{(s^2-1)(s^2-4)}$,

(c) $F(s) = \dfrac{6s^2 + 1}{s^3(s+1)}$, (d) $F(s) = \dfrac{32}{(s^2-1)^4}$,

(e) $F(s) = \dfrac{4s + 3}{s^3(s+1)}$, (f) $F(s) = \dfrac{4}{s^4 - 1}$.

3. Calcula a transformada de Laplace das seguintes funcións (empregando a función escalón unitario):

(a) $f(t) = \begin{cases} -2\cos(t) \text{ se } t \leq 2\pi, \\ 4t^2 \text{ se } t > 2\pi. \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \leq 1, \\ -2 \text{ se } 1 < t \leq 2, \\ 0 \text{ se } t > 2. \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} e^{-3t} \text{ se } 0 < t \leq 2, \\ 0 \text{ se } t > 2. \end{cases}$ (d) $f(t) = \begin{cases} e^{t} \text{ se } 0 < t \leq 1, \\ t \text{ se } 1 < t \leq 2, \\ 1 \text{ se } t > 2. \end{cases}$

Resolución de sistemas de EDOs lineais

Xa estudamos no Tema 2 como se podían resolver EDOs de orde un (e calquera PVI que teña asociado) co comando `dsolve`. Agora, imos a retomar este comando para resolver sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias lineais de orde un. Posto que a resolución de SEDOs con este comando emprega a transformada de Laplace, restrinxiremos o uso de `dsolve` a sistemas de EDOs lineais con coeficientes constantes. Ao igual que xa fixemos con EDOs de orde un, imos a seguir as mesmas convencións que daquela: todas as variables dependentes do sistema teñen que ir seguidas da variable independente entre parénteses.

Deste xeito, os tres pasos a seguir para resolver un PVI son: a) Escribir cada unha das ecuacións do SEDO, b) impoñer as condicións iniciais a cada incógnita, incluidas como argumentos de entrada no comando `dsolve`. Por exemplo, se queremos resolver o seguinte PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(t) + y'(t), \\ x'(t) + t^2 - x(t) = 2y(t), \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0, \end{cases}$$

teríamos que seguir os pasos anteriormente descritos: a) primeiro, escribimos as dúas EDOs que forman o sistema de ecuacións diferenciais:

```
>>>t=sym('t');x=sym('x(t)');y=sym('y(t)');
>>>edo_1='diff(x(t),t)= sin(t)+ diff(y(t),t)';
>>>edo_2='diff(x(t),t)+ t^2 -x(t)= 2*y(t)';
```

e finalmente b) resolvemos o SEDO co comando `dsolve` incluindo as condicións iniciais:

```
>>>dsolve({edo_1,edo_2},t,{x,y},0,{1,0})
ans =
[x(t)= sin(t)/5-3*cos(t)/5+26*e^(3*t)/135+t^2/3+2*t/9+38/27,
y(t)= sin(t)/5+2*cos(t)/5+26*e^(3*t)/135+t^2/3+2*t/9-16/27]
```

De non especificar as condicións inicias, o comando `dsolve` calcularía a solución xeral, onde se deben interpretar os valores iniciais das incógnitas como as constantes de integración arbitraria da solución xeral:

```
>>>dsolve({edo_1,edo_2},t,{x,y})
ans =
[x(t)= sin(t)/5-3*cos(t)/5+(90*y(0)+45*x(0)-19)*e^(3*t)/135+t^2/3
+2*t/9-(18*y(0)-18*x(0)-20)/27,
y(t)= sin(t)/5+2*cos(t)/5+(90*y(0)+45*x(0)-19)*e^(3*t)/135+t^2/3
+2*t/9+(9*y(0)-9*x(0)-7)/27]
```

Exericicios

1. Calcula a solución dos seguintes problemas de valor inicial empregando o comando `dsolve`:

(a) $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t), \\ y'(t) = x(t) + z(t), \\ z'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 5z(t), \\ x(0) = -1,\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + t - 1, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - 5t - 2, \\ x(0) = -2,\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Chapter 7

Series de Fourier e transformada Z

As aplicacións no campo da Enxeñaría que levamos revisado ao longo desta materia teñen un denominador común: a variable incoógnita de interese que se precisa calcular está gobernada por unha ecuación diferencial (ou por un sistema de ecuacións diferenciais), onde o segundo membro é unha expresión simple (por exemplo unha expresión polinomica, unha función trigonométrica ou de tipo exponencial) ou ben unha combinación lineal destas expresións. No caso de EDOs lineais de coeficientes constantes, xa estudamos nos temas anteriores procedementos para a súa resolución (xa sexa mediante o método de coeficientes indeterminados no Tema 4 ou ben mediante a transformada de Laplace nos Temas 5 e 6).

Nembargantes, é posible que nalgunhas situacións non sexa viable aplicar estos métodos. Esta situación ocorre por exemplo cando o termo fonte é unha función periódica non trigonométrica tal é como ilustra a Figura 7.1. Será na primeira parte deste tema onde estudemos un procedemento para tratar este tipo de casos, empregando as series de Fourier.

Exemplo. Disponse dun circuíto eléctrico RLC en serie onde as súas características veñen dadas por $R = 5\,\Omega$, $L = 0.1\,$H e $C = 2\,$F, que traballa cunha forza electromotriz periódica que se representa na Figura 7.1. Sería posible calcular a carga eléctrica $q(t)$ do condensador e a intensidade de corrente $i(t)$ usando o método de coeficientes indeterminados estudado no Tema 4?

Na segunda parte deste tema abordaremos outros sistemas que aparecen habitualmente na Enxeñaría, como son aqueles nos que as características físicas soamente son accesibles nun número discreto de puntos. Isto ocorreo, por exemplo, cando nun circuíto eléctrico soamente se pode medir o seu estado de carga e intensidades eléctricas ou a forza electromotriz nos instantes de tempo $t = 0, T, 2T, 3T, \ldots$ (véxase por exemplo a Figura 7.2).

Neses casos, as variables incógnita do sistema físico non satisfan unha Ecuación Diferencial Ordi-

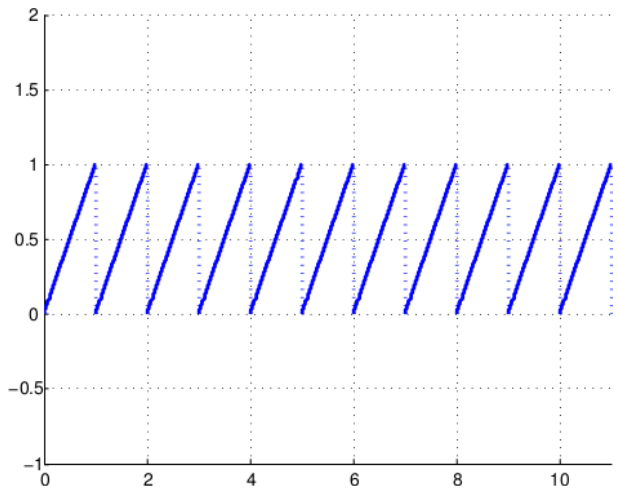


Figure 7.1: Forza electromotriz periódica do circuíto RLC en serie.

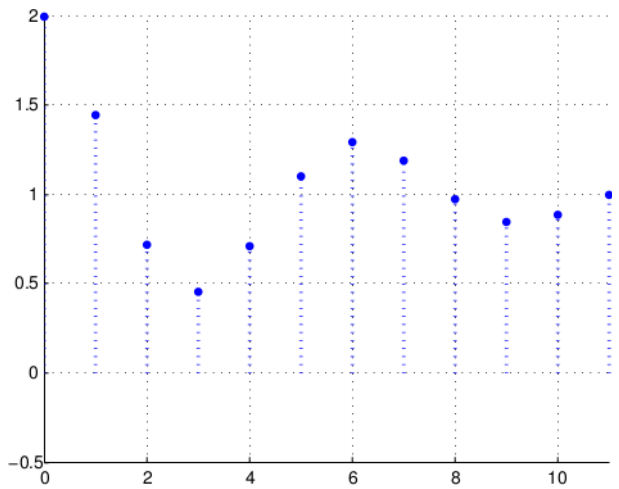


Figure 7.2: Sinal discreta da forza electromotriz dun circuíto RLC en serie medida cada 1 s.

naria senón que pola contra satisfan o que se chaman *Ecuacións en Diferenzas*. Ao igual que as EDOs lineais de coeficietes constantes pódense resolver mediante a transformada de Laplace, o procedemento a seguir para resolver as Ecuacións en Diferenzas será a transformada Z.

Exemplo. Cada 1 s mídese a carga eléctrica no condesador dun circuíto RLC en paralelo con múltiples lazos. Despois de facer varias medidas nos tempos $t_k = k$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$ e obter os valores das cargas, chégase á conclusión que $q_{k+2} - 7q_{k+1} + 10q_k = 16k$. Se nos tempos inicias as medidas da carga foron $q_0 = 6$ e $q_1 = 2$: Cal será o valor ao que tende a carga eléctrica do condensador cando $k \to \infty$?

7.1 Definición das series de Fourier

Antes de definir e coñecer o procedemento de cálculo, debemos introducir o tipo de funcións as que lles poderemos calcular a súa serie de Fourier: estas funcións serán aquelas que teñan valor cadrático medio finito.

Definición 7.1.1. *Sexa unha función de variable real f de período T, dise que f ten valor cadrático medio finito (valor RMS ou* **root mean square value** *finito), se se satisfai que*

$$\mathrm{RMS}(f) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Exercicio. Decide cal das seguintes funcións teñen valor cadrático medio finito no intervalo $(0,1)$: (a) $f(t) = 3t - 2$, (b) $f(t) = \cos(3t)$, (c) $f(t) = 1/t$, (d) $f(t) = 1/t^{\frac{1}{4}}$

Agora para cada unha das funcións de valor cadrático medio finito, podemos definir a súa serie de Fourier:

Definición 7.1.2. *A serie de Fourier $\mathcal{F}\{f\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dunha función real f de período T e de valor cadrático medio finito está dada pola seguinte expresión:*

$$\mathcal{F}\{f\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right),$$

onde

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots, \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Os coeficientes $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ coñecense co nome de **coeficientes ou amplitudes de Fourier** *da función f.*

Dende un punto de vista xeométrico, os coeficientes de Fourier de f pódense interpretar como a proxeción de f sobre cada unhas das funcións $\cos(2\pi kt/T)$ e $\sin(2\pi kt/T)$ que forman parte da serie de Fourier.

Asociada á serie de Fourier $\mathcal{F}\{f\}$, imos tamén a introducir a suma dos N primeiros termos desta serie, é dicir, a serie truncada a N termos, mediante a notación

$$\mathcal{S}_N\{f\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right).$$

Evidentemente, como $\mathcal{S}_N\{f\}(t)$ pódese entender como unha suma parcial da serie de Fourier da función f, obtemos a relación:

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{S}_N\{f\}(t) = \mathcal{F}\{f\}(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ onde a serie $\mathcal{F}\{f\}$ converxa puntualmente. Para ser capaces de comprobar en que puntos a serie de Fourier converxe e determinar cal é o valor ao que converxe, debemos estudar algunhas das súas propiedades. Este será o obxectivo da seguinte sección.

Exercicio. Calcula a serie de Fourier das seguintes funcións definidas en $(0, 2)$: (a) $f(t) = 3$, (b) $f(t) = \cos(3\pi t)$, (c) $f(t) = t^2$. Determina en cada caso $\mathcal{F}\{f\}(t)$.

7.2 Cálculo e propiedades das series de Fourier

Unha vez coñecido o procedemento de cálculo da serie de Fourier dunha función debemos asegurarnos en que condicións $\mathcal{F}\{f\}$ e f coinciden, ou o de forma equivalente, cando podemos asegurar que a valor da serie de Fourier truncada $\mathcal{S}_N\{f\}(t)$ converxe ao valor orixinal da función $f(t)$.

Proposición 7.2.1 (Converxencia)**.** *Consideremos unha función real f de período T, con valor cadrático finito e tal que f e f' son continuas en $(0, T)$, excepto nun número finito de puntos onde poden presentar descontinuidades de salto.*

(a) Converxencia da función: dado un punto $a \in (0, T)$

$$\mathcal{F}\{f\}(a) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{S}_N\{f\}(a) = f(a) \qquad \textit{se } f \textit{ é continua en } a,$$

$$\mathcal{F}\{f\}(a) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{S}_N\{f\}(a) = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} \qquad \textit{se } f \textit{ é descontinua en } a.$$

(a) Converxencia da derivada: se adicionalmente a segunda derivada f'' é continua excepto nun número finito de puntos onde pode presentar descontinuidades de salto, entón

$$\mathcal{F}\{f'\}(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}\{f\}(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k}{T} \left(-a_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right).$$

Na anterior proposición, debemos recordar que $f(a^+)$ e $f(a^-)$ representan os límites lateriais polo dereita e esquerda respectivamente, é dicir,

$$f(a^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h), \qquad f(a^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h).$$

Proposición 7.2.2. *Consideremos unha función real f de período T e a súa serie de Fourier $\mathcal{F}\{f\}$. Satisfanse as seguintes relacións:*

(a) Conservación do valor cadrático medio,

$$\mathrm{RMS}(\mathcal{F}\{f\}) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |\mathcal{F}\{f\}(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{RMS}(f).$$

(b) Extensión periódica de f, se f e unha función continua en $(0,T)$ entón

$$\mathcal{F}\{f\}(t+nT) = f(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ excepto eventualmente en $t = 0, \pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$.

Exercicio. Considera as seguintes funcións definidas en $(0,5)$: (a) $f(t) = 3$, (b) $f(t) = \cos(3\pi t)$, (c) $f(t) = t^2$. Determina en cada caso cal é o valor de $\mathcal{F}\{f\}(2)$, $\mathcal{F}\{f\}(0)$ e $\mathcal{F}\{f\}(5)$.

Por último, debemos resaltar que existen diferentes formas de reescribir as series de Fourier, por un lado introducindo unha fase sobre unha das funcións trigonométricas que aparece na serie ou ben mediante exponenciais complexas. Estes dous tipos de reescritura resúmense no seguinte resultado:

Proposición 7.2.3. *Consideremos a serie de Fourier $\mathcal{F}\{f\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dunha función real f de período T e de valor cadrático medio finito. Se a súa serie de Fourier está dada pola seguinte expresión:*

$$\mathcal{F}\{f\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right),$$

entón pódese reescribir medianta as seguintes expresións:

(a) Facendo explícita o valor da fase en cada sumando,

$$\mathcal{F}\{f\}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right),$$

onde $A_0 = a_0$ e $A_k\cos(\phi_k) = a_k$ e $-A_k\sin(\phi_k) = b_k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

(b) *Usando exponenciais complexas,*

$$\mathcal{F}\{f\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}},$$

onde $c_0 = a_0/2$, $c_k = (a_k - b_k)/2$ *para* $k = 1, 2, \ldots$ *e* $c_k = (a_k + b_k)/2$ *para* $k = -1, -2, \ldots$.

7.3 Aplicación á resolución de EDOs lineais de orde superior

Nos últimos temas levamos estudado diferentes procedementos para resolver EDOs lineais de orde superior, xa foran completas ou homoxéneas.

Se o segundo membro da EDO é unha función periódica que non aparece recollida nin na táboa de coeficientes indeterminados (véxase o Tema 4) nin se coñece a súa transformada de Laplace (véxase o Tema 5) entón podemos proceder estudando a súa serie de Fourier para posteriormente calcular unha solución particular. Os pasos do procedemento a seguir para resolver calquera EDO lineal, completa e de coeficientes constantes $a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 = f$ cun segundo membro periódico sería o que se describe a continuación:

- Posto que a EDO é lineal e completa, a súa solución xeral ven dada por $y = y_h + y_p$ sendo y_h a solución xeral da EDO homoxénea asociada e y_p é unha solución particular da EDO completa.
- Calcúlase a solución xeral y_h da EDO homoxénea asociada (por exemplo mediante o polinomio característico ou mediante a transformada de Laplace).
- Para calcular a solución particular y_p:

  (a) Calcúlase a serie de Fourier do segundo membro f. Excepto naqueles puntos onde a extensión periódica de f non sexa continua satisfaise

  $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right),$$

  (b) A solución particular escríbese tamén mediante unha serie de Fourier

  $$y_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right),$$

  (c) Ao substituir tanto $f(t)$ como $y(t)$ na EDO, obtense unha igualdade entre series de Fourier. Para que se verifique dita igualdade, cada un dos coeficientes da serie a cada lado da igualdade debe ser o mesmo co que se obterían, termo a termo da serie, os coeficientes A_k e B_k da serie de y_p en función dos coeficientes coñecidos a_k e b_k de f.

7.3.1 Circuíto RLC en serie

Se centramos a nosa atención na EDO que modela o circuíto RLC (véxase a Figura 7.3) escrito por exemplo en función da carga eléctrica $q(t)$, resultaría

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = e(t),$$

onde L, R, C son constantes de inductancia, resistencia e capacitancia que caracterizan o circuíto eléctrico e $e(t)$ é a forza electromotriz da pila do circuíto.

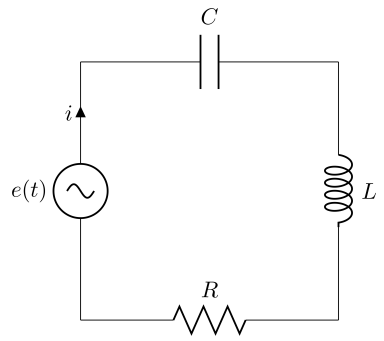


Figure 7.3: Esquema representativo dun circuíto en serie RLC alimentado por unha forza electromotriz $e(t)$, unha resistencia R, un condensador con capacitancia C e unha bobina con inductancia L.

Se $e(t)$ é unha función periódica que non aparece recollida nin na táboa de coeficientes indeterminados (véxase o Tema 4) nin se coñece a súa transformada de Laplace (véxase o Tema 5), ao aplicar o procedemento anterior no caso da EDO do circuíto RLC obteríamos como coeficientes da serie de Fourier asociada á solución particular, a solución do seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\frac{A_0}{2} &= \frac{a_0}{2}, \\ -LA_k\left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 + RB_k\left(\frac{2\pi k}{T}\right) + \frac{1}{C}A_k &= a_k \qquad k = 1, 2, \ldots, \\ -LB_k\left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 + RA_k\left(\frac{2\pi k}{T}\right) + \frac{1}{C}B_k &= b_k \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Exercicio. Disponse dun circuíto eléctrico RLC en serie onde as súas características veñen dadas por $R = 5\,\Omega$, $L = 0.1$ H e $C = 2$ F, que traballa cunha forza electromotriz periódica que se representa na Figura 7.1. Calcula a carga eléctrica $q(t)$ do condensador e a intensidade de corrente $i(t)$ supoñendo que carga e intensidade iniciais son repsectivamente $q(0) = 1$ e $i(0) = 0$?

7.4 Definición da transformada Z

A definición da transformada Z, que de agora en adiante denotaremos por $\mathcal{Z}$, está intimamente ligada á definición da tranformada de Laplace. En primeiro lugar supoñamos que temos unha función f avaliada nunha serie de puntos equiespaciados por unha distancia T, é dicir, coñecemos os valores de $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(T)$, $f_2 = f(2T), \ldots$ A partir destes valores podemos construir un sinal discreto $f_d(t)$ mediante unha serie que involucra deltas de Dirac (tal é como aparece na Figura 7.2) dada pola expresión

$$f_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta(t-kT).$$

Ao aplicar os resultados xa estudados no Tema 5 da transformada de Laplace sobre a función discreta f_d resulta

$$\mathcal{L}\{f_d(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kTs}.$$

De maneira formal, a transformada Z vaise a definir substituindo na expresión anterior a expresión e^{Ts} pola variable z.

Definición 7.4.1. *Dada unha sucesión de valores $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ defínese a transformada Z como a seguinte función de variable complexa:*

$$F(z) = \mathcal{Z}(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

Ao longo deste tema, abusaremos da notación e volveremos a entender que $F(z)$ denota a transformada Z da sucesión $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ (que non deberemos confundir coa transformada de Laplace $F(s)$ dunha función $f(t)$ de variable continua t).

Tendo en conta a súa relación coa transformada de Laplace, tamén se podería definir como

$$F(z) = \mathcal{Z}(f_k) = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta(t-kT)\right\}\Bigg|_{e^{Ts}=z}.$$

Evidentemente, posto que na definición da transformada Z está involucrada unha serie, antes de usala nunha aplicación práctica, debemos asegurarnos baixo que condicións esta serie vai a ser converxente.

Proposición 7.4.2. *Dada unha sucesión de valores $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, a transformada Z define una función converxente para $|z| < 1/\rho$ sendo ρ o radio de converxencia da serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ definido mediante os seguintes criterios:*

(a) Criterio da raíz:

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|}.$$

(b) Criterio do cociente:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right|.$$

Exercicio. Calcula a transformada Z das seguintes funcións determinando o seu radio de convergencia: (a) $f_k = 3k^2 - 2k + 5$, (b) $g_k = 3^k$, (c) $g_k = e^{5k}$, (d) $h_k = 2^{k^2}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Da definición anterior e aproveitando que coñecemos a relación da transformada Z coa transformada de Laplace, podemos deducir a propiedade fundamental de linealidade.

Proposición 7.4.3 (Linealidade da transformada)**.** *Sexan $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ dúas sucesións para as que existen respectivamente as transformadas $\mathcal{Z}\{f_k\}(z) = F(z)$ e $\mathcal{Z}\{g_k\}(z) = G(z)$ definidas para todo $|z| < 1/\rho$, entón*

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_k + \beta g_k\}(z) = \alpha\mathcal{Z}\{f_k\}(z) + \beta\mathcal{Z}\{g_k\}(z) = \alpha F(z) + \beta G(z) \qquad \textit{para } |z| < 1/\rho,$$

onde α e β son constantes.

Exercicio. Aplica a propiedade de linealidade da transforma Z e o cálculo da transformada Z da sucesión $f_k = e^{ak}$ onde a é un parámetro, para calcular a transformada de: (a) $g_k = \sin(bk)$, (b) $h_k = \cos(bk)$.

7.5 Cálculo e propiedades da transformada Z

Como acabamos de estudar na sección anterior, a transformada Z e a transformada de Laplace están fortemente relacionadas e polo tanto poderíamos estudar o cálculo elemental de transformadas e as propiedades máis básicas usando resultados análogos aos da transformada de Laplace.

Comecemos pola táboa elemental das transformadas Z: a Táboa 7.1 recolle unha lista das transformadas das sucesións máis básicas.

Evidentemente, se cada vez que necesitaramos calcular a transformada Z dunha función estiveramos restrinxidos ou ben: a) comprobar se aparece na Táboa 7.1 (ou unha combinación lineal das funcións que aparecen nela) ou b) calcular a transformada mediante a definición, a utilidade da transformada Z sería moi reducida. As seguintes dúas proposicións nos permiten ampliar o conxunto de funcións das que coñecemos de forma inmediata a transformada Z.

Sucesión	Transformada Z	Dominio de converxencia
$f_k = 1$	$F(z) = \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$f_k = a^k$	$F(z) = \dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > 1/\lvert a\rvert$
$f_k = \binom{k}{m-1} a^{k-m+1}$	$F(z) = \dfrac{z}{(z-a)^m}$	$\lvert z\rvert > 1/\lvert a\rvert$
$f_k = \sin(ak)$	$F(z) = \dfrac{z\sin(a)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$f_k = \cos(ak)$	$F(z) = \dfrac{z(z-\cos(a))}{z^2 - 2z\cos(a) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Táboa 7.1: Transformadas Z para algunhas das sucesións máis elementais.

Proposición 7.5.1 (Translación no índice k)**.** *Sexa $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ unha sucesión para a que existe a transformada $\mathcal{Z}\{f_k\}(z) = F(z)$ para todo $|z| < 1/\rho$, entón tamén existe a transformada Z da sucesión $\{f_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$, dada por*

$$\mathcal{Z}\{f_{k+1}\}(z) = z(F(z) - f_0) \qquad \textit{para } |z| < 1/\rho,$$

A partir deste resultado podemos calcular tamén unha expresión para a transformada Z da sucesión $\{f_{k+N}\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f_{k+N}\}(z) = z(\mathcal{Z}\{f_{k+N-1}\} - f_{N-1}) = z(z(\mathcal{Z}\{f_{k+N-1}\} - f_{N-2}) - f_{N-1}) = \dots \\ = z^N F(z) - f_0 z^N - f_1 z^{N-1} - \dots - f_{N-1} z.\end{aligned}$$

Exercicio. Aplica o resultado da translación no índice k para calcular a transformada Z das sucesións: (a) $g_k = 2^{k+2}$, (b) $h_k = 1/(k+1)!$.

Proposición 7.5.2 (Escalado na variable z)**.** *Sexa $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ unha sucesión de valores para a que existe a transformada $\mathcal{Z}\{f_k\}(z) = F(z)$ para todo $|z| < 1/\rho$, entón*

$$\mathcal{Z}\{a^{-k} f_k\} = F(az),$$

para todo $|z| < 1/(|a|\rho)$.

Exercicio. Aplica o resultado anterior e as transformadas Z das funcións elementais para calcular:

(a) $f_k = 5^k 2^{k+1}$, (b) $g_k = 2^{k-2} - 3(5^{-2k})$, e (c) $h_k = (3k^3 - k + 1)2^{-k}$.

Da mesma forma a como estudamos a función escalón na transformada de Laplace, tamén podemos facer o estudo analálogo para a sucesión escalón.

Definición 7.5.3 (Sucesión escalón)**.** *Dado un número enteiro positivo N, a sucesión escalón unitario $\{u_k^N\}_{k=0}^{\infty}$ defínise como*

$$u_k^N = \begin{cases} 0, & \textit{se } 0 \leq k < N, \\ 1, & \textit{se } k \geq N. \end{cases}$$

Coa axuda da sucesión escalón podemos representar calquera sucesión que veña dada pola avaliación nos puntos $0, T, 2T, 3T, \ldots$ dunha función continua excepto nun número finito de puntos onde posúe descontinuidades de salto.

Exemplo. A sucesión $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida a cachos mediante a expresión

$$f_k = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{se } 0 \leq k < N, \\ \dfrac{3}{k!}, & \text{se } k \geq N, \end{cases}$$

pódese escribir como $f_k = 2^{-k} + \dfrac{3}{k!} u_k^N$.

Coa axuda da sucesión escalón podemos ampliar o conxunto de sucesións das que coñecemos a súa transformada Z de forma inmediata.

Proposición 7.5.4 (Translación na variable k)**.** *Sexa $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ unha sucesión de valores para a que existe a transformada $\mathcal{Z}\{f_k\}(z) = F(z)$ para todo $|z| < 1/\rho$ Dado un valor enteiro positivo $N > 0$, satisfaise que*

$$\mathcal{Z}\{f_{k-N} u_k^N\} = z^{-N} F(z) \textit{ para todo } |z| < 1/\rho,$$

onde $\{u_k^N\}_{k=0}^{\infty}$ é a sucesión escalón unitario.

Con este resultado, podemos calcular a transformada Z de funcións que están definidas a cachos (xa proveñan da avaliación de funcións continuas ou daquelas que posúan descontinuidades).

7.5.1 Transformada Z inversa

O último paso que debemos analizar para coñecer como a transformada Z nos vai a ser útil para resolver problemas que involucran ecuacións diferenciais consiste en desfacer a transformada, é dicir, como calcular a sucesión orixinal $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ a partir da súa transformada $F(z)$.

En primeiro lugar, debemos definir o que entendemos por transformada Z inversa como unha aplicación lineal que leva funcións $F(z)$ (definidas na rexión do plano complexo $|z| < 1/\rho$) nas sucesións $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Definición 7.5.5 (Transformada Z inversa)**.** *A transformada Z inversa dunha función $F(z)$ definida para $|z| < 1/\rho$ é aquela sucesión $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ que se construe como*

$$f_k = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left(F\left(\frac{1}{z}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Neste caso, usarase a notación $f_k = \mathcal{Z}^{-1}\{F\}_k$ (debemos notar que a derivada de orde cero é simplemente a avaliación da función).

Exercicio. Calcula os tres primeiros valores das sucesións dadas pola transformada Z inversa das seguintes funcións: (a) $F(z) = z/(z-1)$, (b) $G(z) = \arctan(1/z)$, (c) $H(z) = 0.5^{\frac{1}{z}}$.

O procedemento de cálculo baseado na definición soamente é abordable naqueles casos máis sinxelos. Ao igual que fixemos coa tranformada de Laplace, o método eficiente para o cálculo da transformada Z inversa basearase na descomposición en fraccións simples. Por exemplo, para calcular a transformada Z inversa da función

$$F(z) = \frac{z^3 + 6z^2 + 9z}{(z-1)(z-2)(z+4)}$$

debemos empregar a descomposición en fraccións simples (xa estudado no Tema 5 cando se describiu o procedemento de cálculo da Transforma de Laplace inversa), pero de ser posible por simplicidade traballaríamos non coa función $F(z)$, senón coa función $F(z)/z$, de forma que reescribimos a función como

$$\frac{F(z)}{z} = -\frac{16}{5}\frac{1}{z-1} + \frac{25}{6}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{30}\frac{1}{z+4}.$$

Unha vez feito isto, podemos empregar a táboa de transformadas elementais para calcular a transformada inversa (que queda como exercicio).

Exercicio. Calcula as descomposición en fraccións simples e a transformadas Z inversas dos seguintes cocientes: (a) $F(z) = z(z-2)/(z-1)^4(z-3))$, (b) $G(z) = 2z/(z^2-1)$, (c) $H(z) = z/((z-1)^2(z^2+1))$.

7.6 Aplicación á resolución de Ecuacións en Diferenzas

Como acabamos de estudar nas seccións anteriores, xa estamos en posición de poder resolver problemas de valor inicial que involucren Ecuacións en Diferenzas de coeficientes constantes usando a transformada Z mediante os seguintes pasos: (a) usar a Ecuación en Diferenzas e as condicións iniciais para escribir un novo problema transformado, (b) calcular a transformada da solución, e (c) calcular a transformada inversa e obter así a solución do problema orixinal. No que segue, imos a escribir máis precisamente como empregar esta estratexia de cálculo en problemas de valor inicial que involucran Ecuacións en Diferenzas.

Consideremos o seguinte PVI de orde dous: calcular a sucesión $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ que satisfai

$$\begin{cases} y_{k+2} + p_0 y_{k+1} + q_0 y_k = r_k & \text{en } k = 0, 1, 2, \ldots \\ y_0 = c_0, \\ y_1 = c_1, \end{cases}$$

onde p_0 e q_0 son os coeficientes constantes da Ecuacións en Diferenzas, $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ é o segundo membro (sucesión coñecida) e c_0 e c_1 son as constantes (tamén coñecidas) que determinan as condicións iniciais. Para resolver este PVI usando a transformada Z seguimos os seguintes pasos:

- Calcúlase a transformada Z do PVI:

$$\begin{cases} z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + p_0 (z Y(z) - z y_0) + q_0 Y(z) = R(z), \\ y_0 = c_0, \\ y_1 = c_1, \end{cases}$$

  onde $R(z)$ e $Y(z)$ son as transformadas Z do segundo membro $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ e da función $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, respectivamente.
- Empréganse as condicións iniciais e calcúlase a transformada Z da solución do PVI a partir da expresión

$$Y(z) = \frac{R(z) + z c_1 + (z^2 + z p_0) c_0}{z^2 + p_0 z + q_0}.$$

- Calcúlase a transformada Z inversa da solución do PVI:

$$y_k = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R(z) + z c_1 + (z^2 + z p_0) c_0}{z^2 + p_0 z + q_0} \right\}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Exercicio. Emprega a transformada Z para resolver o PVI $y_{k+2} - 5y_{k+1} - 6y_k = 2^{-k}$ coas condicións iniciais $y_0 = 0$ e $y_1 = 2$.

7.6.1 Cálculo dunha rede eléctrica en escaleira

Consideremos unha rede eléctrica como a que aparece ilustrada na Figura 7.4. De forma máis precisa, estamos a traballar cunha sucesión de elementos idénticos de tipo resistencia de valor R que se conectan en paralelo con outras resistencias (con valor de conductancia G) e con pilas que aportan unha voltaxe e_n a cada unha das ramas verticais do circuíto.

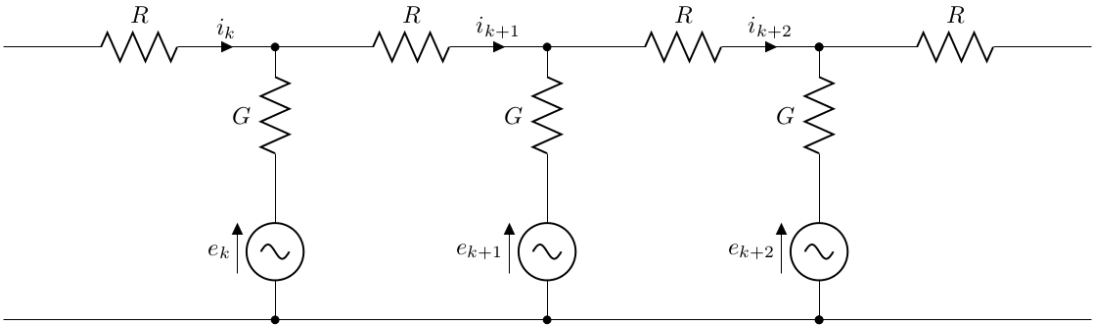


Figure 7.4: Esquema representativo dun rede eléctrica en escaleira onde os elementos do circuíto son unha sucesión de resistencias R e elementos de derivación (que teñen asociada unha conductancia G), e unha sucesión de forzas electromotrices e_n.

Ao aplicar as leis de Kirchhoff, neste caso, ás caídas da voltaxe en elementos de tipo resistencia que relacionan as voltaxes nos nodos da parte superior do circuíto (puntos negros na Figura 7.4) coas intensidades de corrente, obtemos $Ri_{k+1} = v_{k+1} - v_k$ e $Ri_{k+2} = v_{k+2} - v_{k+1}$. Facendo o mesmo coas conexións de derivación vertical no que aparecen as pilas e a conductancia dos lazos de valor G, e ao ter en conta a conservación da corrente eléctrica, resulta a seguinte Ecuación en Diferencias en función da voltaxe:

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{R} = \frac{v_{k+2} - v_{k+1}}{R} + G(e_{k+1} - v_{k+1}) \qquad \text{para } k = 0, 1, 2 \ldots$$

Exercicio. Emprega a transformada Z para resolver o PVI coa Ecuacións en Diferencias que modela a rede eléctrica en escaleira que aparece na Figura 7.4, supoñendo $R = 2\,\Omega$, $G = 1\,\Omega^{-1}$, $e_k = 10^{-k}$, e que as condicións inicias para a voltaxe son $v_0 = 0$ V e $v_1 = 1$ V.

7.7 Exercicios

1. Calcula a serie de Fourier das seguintes funcións, tomando como intervalo de periodicidade aquel na que aparecen definidas:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } -\pi < t < 0, \\ a \text{ se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$ (b) $g(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } -1 < t < 0, \\ t \text{ se } 0 \leq t < 1. \end{cases}$

(c) $h(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } -\pi/2 < t < 0, \\ \cos(\omega t) \text{ se } 0 \leq t < \pi/2. \end{cases}$ (d) $r(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } -\pi < t < 0, \\ t^2 \text{ se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$

onde a e ω son constantes positivas.

2. Disponse dun circuíto eléctrico RLC en serie onde as súas características veñen dadas por $R = 0\,\Omega$, $L = 1$ H e $C = 0.5$ F, que traballa cunha forza electromotriz periódica $e(t)$. Calcula a carga eléctrica $q(t)$ do condensador e a intensidade de corrente $i(t)$ supoñendo que carga e intensidade iniciais son repsectivamente $q(0) = 1$ e $i(0) = 0$ nose seguintes casos:

   (a) $e(t) = 2\pi t - t^2$ se $0 < t < 2\pi$ e $f(t + 2\pi) = f(t)$.

   (b) $e(t) = \begin{cases} t \text{ se } 0 < t < 1/2, \\ 1 - t \text{ se } 1/2 < t < 1. \end{cases}$ e $f(t + 1) = f(t)$.

   (c) $e(t) = \pi t$ se $-1 < t < 1$ e $f(t + 2) = f(t)$.

3. Calcula a transformada Z das sucesións $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ co seguinte termo principal:

   (a) $f_k = e^{-ak}$, (b) $f_k = 1/k!$,

   (c) $f_k = (u_k^0 - u_k^2)a^{-k}$, (d) $f_k = u_k^3/(k + 3)!$,

   (e) $f_k = e^{-ak}\cos(2k)$, (f) $f_k = e^{-ak}\sin(k)u_k^1$.

   onde u_k^N é a sucesión escalón unidade e $a \geq 0$ é un parámetro constante.

4. Calcula a transformada Z inversa das seguintes funcións usando a descomposición en fracciónes simples:

   (a) $F(z) = \dfrac{3z^3 - z^2 + 6z}{(z-1)(z+1)(z+2)(z+3)}$, (b) $F(z) = \dfrac{4z^3 - z}{(z^2-1)(z^2-4)}$,

   (c) $F(z) = \dfrac{6z^3 + z}{(z+2)^3(z+1)}$, (d) $F(z) = \dfrac{32z}{(z^2-1)^4}$,

   (e) $F(z) = \dfrac{4z^2 + 3z}{(z+1)^3(z^2-1)}$, (f) $F(z) = \dfrac{4z}{z^2 + 5z + 6}$.

5. Calcula a transformada Z das seguintes sucesións $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ (empregando a sucesión escalón unitario u_k^N) con termo principal:

(a) $f_k = \begin{cases} -2\cos(\pi k) \text{ se } k \leq 2, \\ 4a^{-k} \text{ se } k > 2. \end{cases}$ (b) $f_k = \begin{cases} 1 \text{ se } k \leq 1, \\ -2 \text{ se } 1 < k \leq 2, \\ 0 \text{ se } k > 2. \end{cases}$

(c) $f_k = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 < k \leq 2, \\ e^{-3k} \text{ se } k > 2. \end{cases}$ (d) $f_k = \begin{cases} e^k \text{ se } 0 < k \leq 1, \\ k \text{ se } 1 < k \leq 2, \\ 2^{-k} \text{ se } k > 2. \end{cases}$

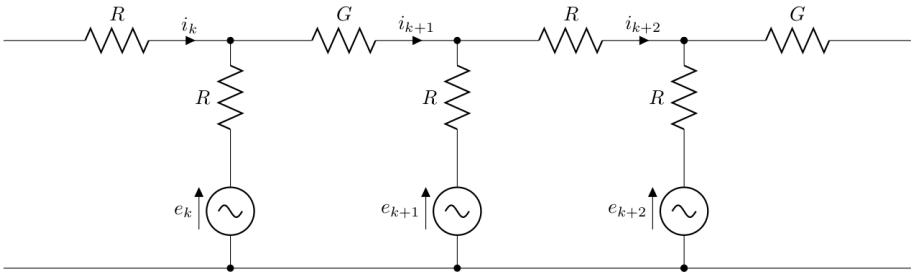
6. Calcula a solución $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ das seguintes Ecuacións en Diferenzas cos valores iniciais que se indican mediante o uso da transformada Z:

(a) $\begin{cases} y_{k+1} - 3y_k = e^{-2k}, \quad k \geq 0, \\ y_0 = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 0, \quad k \geq 0, \\ y_0 = -2,\ y_1 = 5. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{k+2} - 2y_{k+1} - 8y_k = -5e^{-k}, \quad k \geq 0, \\ y_0 = 2,\ y_1 = 5. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y_{k+3} + 4y_{k+2} + y_{k+1} - 6y_k = 16k, \quad k \geq 0, \\ y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0. \end{cases}$

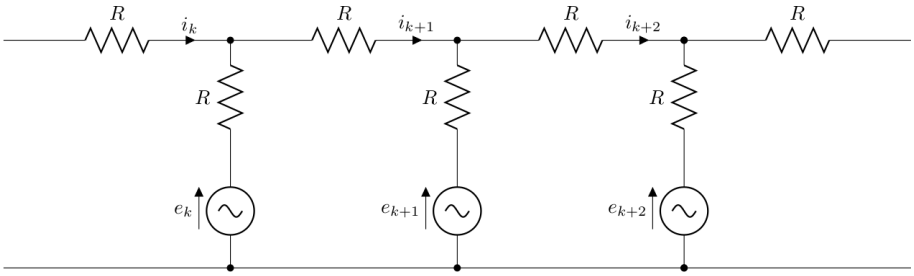
7. Emprega a transformada Z para resolver o PVI coa Ecuacións en Diferencias que modela a rede eléctrica en escaleira que aparece nos seguintes esquemas, supoñendo $R = 2\,\Omega$, $G = 1\,\Omega^{-1}$, $e_k = 10^{-k}$ e que as condicións inicias para a voltaxe son $v_0 = 0$ V e $v_1 = 1$ V:

(a)



$$\frac{v_{k+1} - v_k}{R} = G(v_{k+2} - v_{k+1}) + \frac{e_{k+1} - v_{k+1}}{R} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2 \ldots$$

(b)



$$\frac{v_{k+1} - v_k}{R} = \frac{v_{k+2} - v_{k+1}}{R} + \frac{e_{k+1} - v_{k+1}}{R} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2 \ldots$$

Chapter 8

Introdución as ecuacións en derivadas parciais

Ata o de agora, dende o Tema 1 ata o Tema 7, sempre traballamos con ecuacións diferencias ordinarias (ou sistemas de EDOs) onde tiñamos unha ou varias funcións a determinar (variables dependentes) e unha variable independente, que era aquela con respecto á que se derivaba. Neste Tema 8, volveremos a analizar problemas que involucran unha única variable dependente (función incógnita a determinar) pero agora haberá varias variable independentes con respecto ás que se derivan. Esta situación dará lugar ecuacións diferenciais onde non aparecen involucradas derivadas ordinarias (con respecto a unha única variable) senón a ecuacións en derivadas parciais (EDPs), denominadas xustamente así ao aparecer nas expresións das ecuacións derivadas parciais da función incógnita.

Exemplo. Ao quentar unha placa metálica rectangular $(0,a)\times(0,b)$ sobre un dos seus lados, sábese que o seu campo de temperatura non é uniforme (a temperatura é máis elevada preto da fonte de calor que nos arredores dos lados onde non se aplica calor). A ecuación que goberna a distribución de temperatura no intervalo de tempo $(0,T)$ ven dada pola EDP:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)\quad \text{con } (x,y)\in(0,a)\times(0,b),\ t\in(0,T),$$

onde $\theta(x,y,t)$ é a temperatura no punto (x,y) da placa no instante de tempo t, k é unha constante positiva que depende das propiedades físicas da placa metálica.

Ao longo deste tema introdutorio sobre EDPs, centraremos case exclusivamente no estudo de ecuacións en derivadas parciais lineais con coeficientes constantes (ao igual que xa fixemos en parte do Tema 4 cando estudamos EDOs lineais de orde dous).

8.1 Definición, orde e solución dunha EDP

Do mesmo xeito a como se podían clasificar as EDOs, distinguíndoas se son lineais ou non, con coeficientes constantes ou non, a orde que posuían, etc, as ecuacións en derivadas parciais pódense clasificar do mesmo xeito. Para precisar esta terminoloxía aplicada ás EDPs, debemos recordar o que significaban cada un destes termos:

- **Orde dunha EDP**: orde da derivada máis elevada que aparece involucrada na escritura da ecuación en derivadas parciais.
- **EDP lineal**: é aquela ecuación en derivadas parciais que se pode escribir como

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k},\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right)=0,$$

  sendo u a variable dependente e $x_1,\ldots,x_n$ as variables independentes, cando a función F é lineal con respecto a cada un dos seus argumentos.

Evidentemente, no caso de EDPs lineais, a clasificación dunha EDO lineal como homoxénea (ou completa) e de coeficientes constantes (ou variables) se estende de forma directa ao caso de EDPs.

Ao longo deste tema, centrarémonos no estudo de ecuacións en derivadas parciais de orden dous, lineais, con coeficientes constantes, e naquelas EDPs que involucran unicamente dúas variables independentes (habitualmente denotadas por x e y). Para este tipo de EDPs, podemos dar unha definición precisa:

Definición 8.1.1. *As ecuacións en derivadas parciais de orde dous, lineais e con coeficientes constantes son aquelas que se poden escribir como*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,y),$$

onde A,B,C,D,E e F son constantes reais e G é unha función que depende das variables independentes x e y. As solucións deste tipo de EDPs son aquelas funcións de dúas variables $u(x,y)$ que satisfán dita ecuación nunha rexión do plano xy.

Dentro deste tipo de EDPs lineais de orde dous podemos distinguir tres grandes grupos atendendo ao valor das anteriores constantes:

- EDP elíptica: $B^2-4AC<0$,
- EDP parabólica: $B^2-4AC=0$,
- EDP hiperbólica: $B^2-4AC>0$.

Segundo o tipo de EDP co que esteamos a traballar, admitirán diferentes tipos de condicións iniciais e de contorno que resultarán de carácter moi distinto se se tratan de EDPs elípticas, parabólicas

ou hiperbólicas. Nas seguintes seccións veremos algúns exemplos de cada un destes tipos e analizaremos cales son as condicións iniciais e de contorno adecuadas en cada caso.

Exercicio. Clasifica as seguintes EDPs:

$$\text{(a)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \text{(b)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \text{(c)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8.2 Introdución ás EDPs clásicas

Unha vez introducida a anterior clasificación sobre EDPs de orde dous, imos a analizar tres das ecuacións en derivadas parciais clásicas máis importantes. A continuación, ilustraremos o seu uso con exemplos relevantes no ámbito de traballo da Enxeñaría Eléctrica: as ecuacións de Laplace e Poisson, a ecuación do calor e a ecuación de ondas.

8.2.1 Ecuación de Laplace e Poisson

En problemas de Electrostática, cando se quere calcular cal é o campo eléctrico $\vec{E}$ sobre un material dieléctrico en presenza dunha densidade de cargas, é habitual supoñer que este campo é *irrotacional*[1] e polo tanto se pode supoñer que $\vec{E}$ pódese escribir como un potencial, é dicir, que existe unha función escalar $u(x, y)$ tal que

$$\vec{E} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Baixo estas hipóteses (e supoñendo que o campo magnético é independente do tempo), a Lei de Gauss do Electromagnetismo establece que se satisfai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho(x, y)}{\varepsilon},$$

onde $\rho(x, y)$ é a densidade de cargas eléctricas que actúan en cada punto (x, y) do dieléctrico e ε é a constante de permitividade absoluta do medio dieléctrico. Unha vez calculada a solución $u(x, y)$, o valor do campo eléctrico $\vec{E}$ acharíase mediante o cálculo do gradiente. A anterior ecuación, que se podería escribir de forma xeral como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

[1] Un campo de vectores $\vec{E} = (E_1, E_2)$ en $\mathbb{R}^2$ dise que é irrotacional cando $\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0$.

denomínase ecuación de Poisson.

Do mesmo xeito, en problemas de Magnetostática onde se quere calcular o campo magnético $\vec{H}$ sobre un material imantando (por exemplo un material ferromagnético), é habitual supoñer que este campo é irrotacional. De novo, nese caso o campo magnético escríbese en función dun potencial como

$$\vec{H} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Baixo estas hipóteses (supoñendo que non hai cargas eléctricas libres no material imantando e que tanto o campo eléctrico como o magnético non dependen do tempo), a Lei de Gauss e a Lei de Ampère do Electromagnetismo establecen que se satisfai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial M_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial M_2}{\partial y}(x,y)\right),$$

onde $\vec{M} = (M_1, M_2)$ é o campo de magnetización presente en cada punto do material e μ é a constante de permeabilidade magnética do medio. Unha vez calculada a solución $u(x,y)$, o valor do campo magnético $\vec{H}$ acharíase mediante o cálculo do gradiente. De novo, neste tipo de problemas aparece a ecuación de Poisson cun segundo membro $f(x,y) = (\partial M_1/\partial x + \partial M_2/\partial y)/\mu$.

En calquera dos dous casos de problemas de Electrostática ou Magnetostática, se non houbera unha densidade de cargas ρ ou un vector de magnetización $\vec{M}$, respectivamente, a ecuación que resultaría nos dous casos sería

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Neste caso, a EDP denomínase ecuación de Laplace.

Nos dous problemas anteriores, tanto no caso da ecuación de Laplace como na de Poisson, as variables independentes con respecto ás que se derivan representan as coordenadas espaciais (no espazo bidimensional $\mathbb{R}^2$). Pare definir un problema ben enunciado que posúa unha solución única debemos engadir condicións de contorno. Por exemplo, se os dous problemas anteriores tiveran como dominio de definición unha rexión rectangular $(0,a) \times (0,b)$ habería que indicar a seguinte información suplementaria:

- Condición de contorno sobre o lado esquerdo do dominio: $u(0,y) = u_0(y)$ para $y \in (0,b)$.
- Condición de contorno sobre o lado dereito do dominio: $u(a,y) = u_a(y)$ para $y \in (0,b)$.
- Condición de contorno sobre o lado inferior do dominio: $u(x,0) = u_1(x)$ para $x \in (0,a)$.
- Condición de contorno sobre o lado superior do dominio: $u(x,b) = u_b(x)$ para $x \in (0,a)$.

Unha vez que a estas EDPs se lle engaden as condicións de contorno, nos casos particulares de dominios moi simples (como un dominio rectangular), é posible calcular a solución exacta do problema de contorno (como veremos na última sección deste tema).

8.2.2 Ecuación do calor

En maquinas eléctricas, tales como fornos de indución ou incluso nos aparellos domésticos de microondas, os campos electromagnéticos xeran unha calor sobre un material condutor (este cambio da temperatura é coñecido como o efecto Joule). Unha vez que o corpo deixa de estar baixo este tipo de efectos, a súa temperatura variará con respecto ao tempo e, moi posiblemente, en problemas reais, non será uniforme en todos os puntos.

Ata o de agora, cando empregabamos unha EDO para modelar o comportamento temporal da temperatura dun corpo, supoñíamos que a temperatura era uniforme (non dependía das coordenadas espaciais) e só dependía do tempo. Foi baixo esta hipótese como empregamos a lei de arrefriamento de Newton. Se pola contra, consideramos un corpo cunha distribución non uniforme de temperaturas, teremos que ter en conta necesariamente este cambio espacial de temperaturas mediante o uso dunha EDP.

Os procesos térmicos na física clásica están gobernados pola Lei de Fourier e polo principio de conservación da enerxía. Pola primeira lei, aseguramos que o fluxo de calor $\vec{q}$ é proporcional ao gradiente da temperatura (e de sentido contrario):

$$\vec{q} = -k \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix},$$

onde θ é a temperatura e k é o coeficiente de condutividade térmica do material (constante positiva). Adicionalmente, debemos tamén supoñer que a enerxía interna Q do corpo depende proporcionalmente da súa temperatura, isto é,

$$Q = c_{\mathrm{p}} \rho \theta,$$

sendo c_{p} o calor específico do material e ρa densidade de masa do material. A partir do principio de conservación da enerxía, pódese deducir cal é a EDP que goberna o campo de temperaturas.

Se por simplicidade asumimos que o corpo se pode representar por un dominio unidimensional (por exemplo, unha barra onde a área da súa sección transversal é varias ordes de magnitude inferior á súa lonxitude), a temperatura $\theta(x,t)$ no punto espacial x e no instante t satisfai a seguinte EDP:

$$c_{\mathrm{p}} \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f(x,t),$$

onde recordemos que c_{p} é o calor específico do material, ρ é a densidade de masa, k é o coeficiente de condutividade térmica do material e $f(x,t)$ representa unha fonte de calor. A esta EDP denomínaselle ecuación do calor.

Ao igual que ocurre coa ecuación de Poisson ou Laplace, para ter un problema ben enunciado (cunha única solución) debemos engadir condicións inicias e de contorno adecuadas. Dende un punto de vista físico, se a barra está situada no dominio (a,b) e estamos interesados en coñecer a temperatura no intervalo temporal $(0,T)$, debemos engadir a seguinte información suplementaria:

- Condición de contorno sobre o extremo esquerdo: $u(a,t) = u_a(t)$ para $t \in (0,T)$.
- Condición de contorno sobre o extremo dereito: $u(b,t) = u_b(t)$ para $t \in (0,T)$.
- Condición inicial no instante $t = 0$: $u(x,0) = u_0(x)$ para $x \in (a,b)$.

Neste caso, ao contrario que nas ecuacións de Poisson ou de Laplace, aínda que temos unha EDP con dúas variables independentes soamente hai que incluír unha condición suplementaria na variable temporal (en $t = 0$) e non hai que indicar ningunha condición en $t = T$.

8.2.3 Ecuación de ondas

En materiais dieléctricos (ou, por exemplo, no baleiro), baixo certas simplificacións (nas que se asume que tanto o campo de magnetización como a densidade de carga eléctrica son nulas) as ecuacións de Maxwell determinan que tanto o campo eléctrico $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ como o campo de fluxo magnético $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ son irrotacionais[2] e ademais satisfán as seguintes EDPs:

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x} = -\frac{\partial B_3}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{\partial B_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial y} = -\frac{\partial B_1}{\partial t},$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial E_3}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial E_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial E_1}{\partial t},$$

onde μ é a constante de permeabilidade magnética do medio e ε é a constante de permitividade absoluta do medio. Se o noso obxectivo é calcular o campo eléctrico (ou o fluxo magnético) a partir dunha configuración eléctrica dada no instante inicial, manipulando convenientemente as ecuacións no sistema de Maxwell (a dedución queda fora do alcance deste curso), resulta

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad \text{para } i = 1,2,3,$$
$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad \text{para } i = 1,2,3,$$

onde $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ é a velocidade de propagación das sinais electromagnéticas no medio. No caso de tratarse do baleiro, esta constante c determina o valor da velocidade da luz (que lembremos que é unha onda de tipo electromagnético).

Se como xa aconteceu no caso da ecuación do calor, por simplicidade, asumimos que a configuración do medio pódese representar por un dominio unidimensional (por exemplo, unha barra onde a área da súa sección transversal é varias ordes de magnitude inferior á súa lonxitude), e soamente estamos interesados en calcular a primeira compoñente do campo eléctrico $E(x,t)$ no punto espacial x e no instante t, satisfaise a seguinte EDP:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0.$$

[2] Un campo de vectores $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ en $\mathbb{R}^3$ dise que é irrotacional cando satisfai $\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0$

Do mesmo xeito, teríamos unha ecuación análoga para a primeira compoñente do campo de fluxo magnético $\vec{B}$. Nos dous casos, esta EDP denomínase ecuación de ondas.

Exercicio. Clasifica de que tipo son a ecuación de Laplace, de Poisson, do calor e de ondas atendendo a se son elípticas, parabólicas ou hiperbólicas.

Ao igual que ocorre coa ecuación do calor, para definir un problema ben enunciado que posúa solución única debemos engadir condicións de contorno e condicións iniciais. Dende un punto de vista físico, se a barra está situada no dominio (a, b) e estamos interesados en coñecer o campo eléctrico no intervalo temporal $(0, T)$, debemos engadir a seguinte información suplementaria:

- Condición de contorno sobre o extremo esquerdo: $E(a, t) = E_a(t)$ para $t \in (0, T)$.
- Condición de contorno sobre o extremo dereito: $E(b, t) = E_b(t)$ para $t \in (0, T)$.
- Condición inicial no instante $t = 0$ que involucra a E:

$$E(x, 0) = E_0(x) \text{ para } x \in (a, b).$$

- Condición inicial no instante $t = 0$ que involucra a $\partial E/\partial t$:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) = E_1(x) \text{ para } x \in (a, b).$$

8.3 Método de separación de variables

Nas seccións anteriores estudamos algúns exemplos das EDPs clásicas que aparecen máis frecuentemente na modelización de fenómenos físicos do Electromagnetismo. Sen embargo, aínda non estudamos como resolvelas e calcular as súas solucións.

O noso obxectivo nesta sección non será o de calcular a solución xeral dunha EDP, como xa facíamos coas ecuacións diferenciais ordinarias debido á complexidade que implica esta tarefa. Polo contrario, o que faremos é dar un procedemento para calcular solucións particulares dunha EDP lineal homoxénea con coeficientes constantes (ou coeficientes variables que poidan escribirse en variables separadas).

Con este procedemento, coñecido como método de separación de variables, reduciremos o problema de calcular unha solución particular dunha EDP lineal homoxénea que depende de dúas variables independentes a calcular dúas EDOs lineais que só dependen de cada unha das variables independentes por separado.

Máis precisamente, os pasos para calcular solucións particulares co método de separación de variables son os seguintes:

- Suponse que a variable dependente $u(x, y)$ escríbese como un produto de funcións que dependen soamente dunha única variable:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

- Substituíse esta expresión na EDP e reescríbese de forma tal que os factores que dependen de x quedan ao lado esquerdo da igualdade e os factores que dependen de y quedan do outra lado da igualdade:

$$\text{expresión diferencial que depende de } X(x) = \text{expresión diferencial que depende de } Y(y)$$

- Posto que unha expresión que depende de x soamente pode ser igual a outra que depende de y se teñen valores constantes, introdúcese o valor constante λ:

$$\text{expresión diferencial que depende de } X(x) = \text{expresión diferencial que depende de } Y(y) = \lambda.$$

- Calcúlase as expresións de $X(x)$ e $Y(y)$ calculando a solución xeral das dúas seguintes ecuacións diferenciais ordinarias:

$$\text{expresión diferencial que depende de } X(x) = \lambda,$$
$$\text{expresión diferencial que depende de } Y(y) = \lambda.$$

A primeira EDO ten como variable dependente X e a variable independente x, mentres que a segunda EDO posúe como variable dependente Y e a variable independente y.

Evidentemente, neste último paso apareceran varias constantes de integración arbitrarias que darán lugar a infinitas solucións particulares da EDP. Se a ecuación en derivadas parciais está complementada por condicións inicias e condicións de contorno adecuadas (como xa estudamos nas seccións anteriores) poderíamos fixar o valor destas constantes e calcular así a solución que corresponde a problemas de valor inicial e de contorno que involucran a EDP.

Exercicio. Calcula as solucións particulares das seguintes EDPs aplicando o método de separación de variables:

$$\text{(a) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \text{(b) } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \text{(c) } \frac{\partial u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Posto que en todo este Tema 8 estamos a traballar con EDPs lineais, o principio de superposición que era válido para EDOs lineais (e sistemas de EDOs lineais), tamén se poderá aplicar a EDPs lineais.

Proposición 8.3.1 (Principio de superposición)**.** *Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son solucións particulares dunha EDP lineal homoxénea (con coeficientes constantes ou variables), entón calquera combinación lineal*

$$u(x, y) = c_1u_1(x, y) + c_2u_2(x, y) + \cdots + c_nu_n(x, y),$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, é tamén unha solución particular da EDP.

No que resta deste tema, este principio de superposición tamén o aplicaremos *formalmente*[3] a un conxunto infinito de solucións particulares. Desta forma, se $u_1, u_2, \ldots$ son solucións particulares, a serie infinita

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x,y)$$

tamén será unha solución particular da EDP.

8.3.1 Resolución da ecuación do calor

Vexamos como podemos resolver un problema de valor inicial e contorno involucrando á ecuación do calor. O cálculo de solucións particulares da ecuación do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

tamén se pode realizar mediante separación de variables. Máis precisamente, podemos resolver un problema de valor inicial e contorno asociada á ecuación do calor como o seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ para } (x,t) \in (a,b) \times (0,t_0), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ para } x \in (a,b), \\ u(a,t) = 0, u(b,t) = 0 \text{ para } t \in (0,t_0), \end{cases}$$

onde, por simplicidade, asumiremos que u_0, u_a e u_b son valores constantes.

Se aplicamos o método de separación de variables e supoñemos que a solución u escríbese como un produto de expresións que dependen dunha única variable, $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Polo tanto, as dúas EDOs que deberíamos resolver son

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) - \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Se a primeira EDO onde a incógnita é $X(x)$ lle engadimos as condicións de contorno, obtemos o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \text{ en } (a,b), \\ X(a) = 0,\ X(b) = 0. \end{cases}$$

[3] sen entrar a valorar aspectos da converxencia da serie de funcións que involucra a suma de infinitos termos

Do mesmo xeito, se calculamos a solución do PVI asociado a $T(t)$ cunha condición inicial arbitraria e constante, c_n, obtemos

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 \text{ en } (0, t_0), \\ T(0) = c_n. \end{cases}$$

No problema de valor de contorno que involucra a $X(x)$ (como xa fixemos no exercicio 12(a) do boletín de exercicios do Tema 3), a única solución non nula ven dada por

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (a,b),$$

cando $\lambda = n^2\pi^2/(b-a)^2$ para $n \in \mathbb{N}$. Substituíndo este valor no PVI do que depende a función $T(t)$, o cálculo da solución exacta resulta $T(t) = c_n e^{-\lambda t} = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}t}$. En conclusión, as solucións particulares calculadas co método de separación de variables resulta,

$$u_n(x,t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}t} \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Se aplicamos o principio de superposición a este conxunto de solucións, obtemos que a nova solución particular é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}t} \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

O último paso consiste en impoñer a condición inicial orixinal sobre esta solución particular que se escribe a través dunha serie:

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

O cálculo dos valores das constantes c_n, $n \in \mathbb{N}$ deberá realizarse por medio de técnicas de integración e representación de funcións en termos de series de Fourier, procedemento que queda fora dos contidos deste curso. Sen embargo en casos especiais é posible calcular estes coeficientes mediante unha inspección directa das condicións iniciais.

Exemplo. Consideremos o problema de valor inicial e contorno anteriormente descrito para a ecuación do calor. Calcula a solución exacta no caso particular no que $(a,b) = (0,\pi)$ e a condición inicial ven dada por $u_0(x) = \sin(x) - 4\sin(5x)$. ¿Cal é o valor da temperatura u no punto $x = 1$ e no instante $t = 2$?

8.4 Exercicios

1. Clasifica as seguintes EDPs atendendo a se son elípticas, parabólicas ou hiperbólicas:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ (b) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ (d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$ (f) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

2. Calcula as solucións particulares das seguintes EDPs polo método de separación de variables:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ (b) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

(c) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0,$ (d) $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \dfrac{\partial u}{\partial t},$

(e) $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},$ (f) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

onde k é unha constante estritamente positiva.

3. Resolve os seguintes problemas de valor inicial e contorno que involucran ecuacións en derivadas parciais (aplicando o método de separación de variables e o principio de superposición onde sexa necesario):

(a) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,5), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,5), \\ u(x,0) = \sin(x) - 7\sin(3x) + \sin(5x) \text{ para } x \in (0,\pi). \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ para } (x,y) \in (0,1) \times (0,2), \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ para } t \in (0,2), \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = \sinh(3\pi x) \text{ para } x \in (0,1). \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ para } (x,y) \in (0,1) \times (0,2), \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ para } t \in (0,2), \\ u(x,0) = 6\sin(10\pi x),\ u(x,2) = \sin(3\pi x) \text{ para } y \in (0,1). \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,5), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,5), \\ u(x,0) = 3\sin(x) - \cos(2x) \text{ para } x \in (0,\pi). \end{cases}$