

CURSO AVANZADO DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Universidade de Santiago de Compostela

**INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES INTEGRALES ASOCIADAS A
PROBLEMAS DE CONTORNO**

M.C. MUÑIZ, A. PRIETO

Octubre 2006

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES INTEGRALES ASOCIADAS A PROBLEMAS DE CONTORNO

A presente publicación pertenece a **Profs. M. C Muñiz Castiñeiras e Andrés Prieto Aneiros**, e está suxeita á licencia *Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)* de Creative Commons, e polo tanto está permitido copiar, distribuir, comunicar publicamente, e remezclar; transformar esta obra baixo as seguintes condicións:

 *Recoñecemento*: O contido deste documento pódese reproducir total ou parcialmente por

terceiros, citando a súa procedencia e facendo referencia expresa aos autores. Dito recoñecemento non poderá suxerir en ningún caso que os autores presten apoio a un terceiro ou apoien o uso que se fai da súa obra.

 *Uso non comercial*: O material orixinal e os traballos derivados poden ser distribuídos, copiados y exhibidos mentras o seu uso non teña fins comerciais.

 *Sen obra derivada*: Se se altera ou transforma esta obra, ou se xenera unha obra derivada, non se poderá difundir o material modificado.

Ao reutilizar ou distribuir a obra, é preciso que estes termos da licencia sexan claros. Algunha destas condicións pode non aplicarse se se obtén o permiso dos autores como titulares dos dereitos de autor. Nada nesta licencia menoscaba ou restrinxen os dereitos morais dos autores.

Pode consultar o texto completo da licencia na seguinte dirección (en castelán):

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.es_ES



Índice

Prefacio	v
1. Motivación.	1
2. Clasificación de las ecuaciones integrales.	3
3. Teoría de Riesz-Fredholm.	4
3.1. Operadores acotados.	5
3.2. Operadores compactos.	6
3.3. Operadores integrales débilmente singulares. Propiedades.	8
3.4. Teoría de Riesz, sistemas duales y teoría de Fredholm: introducción.	15
3.5. Teoría de Riesz.	15
3.6. Formas bilineales y sistemas duales.	16
3.7. Teoría de Fredholm.	18
4. Teoría del potencial.	21
4.1. La ecuación de Laplace. Funciones armónicas.	21
4.2. Soluciones fundamentales (o singulares) de la ecuación de Laplace.	22
4.3. Representación integral de una función de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$	28
4.4. Potencial de simple y doble capa.	29
4.5. Propiedades del potencial de simple capa.	30
4.6. Propiedades del potencial de doble capa.	31
4.7. Teoría del potencial aplicada a la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^3	32

Prefacio

Presentamos en estas notas la materia impartida en la asignatura *Curso Avanzado de Ecuaciones en Derivadas Parciales* dentro del apartado *Introducción a las Ecuaciones Integrales Asociadas a Problemas de Contorno*, en el marco del programa de doctorado MÉTODOS MATEMÁTICOS Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, durante los cursos 1998-1999 a 2005-2006, con una duración temporal de once horas de clase aproximadamente. Al elaborar estas notas, nuestra intención ha sido la de ayudar al estudiante a introducirse en el estudio de las ecuaciones integrales desde el punto de vista de su aplicación a la resolución de problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales y la de proporcionar una bibliografía básica a partir de la cual el estudiante interesado puede profundizar en el estudio de los conceptos que en estas notas se indican.

Santiago de Compostela, Octubre de 2006

M.Carmen Muñiz - Andrés Prieto

1. Motivación.

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^m ($m=2$ o 3) cuya frontera se denota por Γ (ver figura 1) —su regularidad se especificará en la sección 3.3. Uno de los problemas en los que centraremos nuestra atención es el siguiente:

Dada u_d una función definida sobre Γ , encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfice

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = u_d & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

Es sabido que la condición de contorno del problema anterior se denomina condición de contorno Dirichlet y $\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ es el laplaciano de la función u . Veremos que la solución u del problema anterior se puede

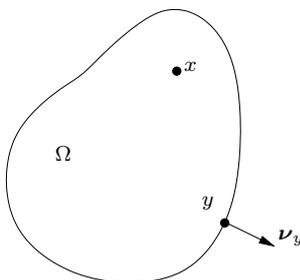


Figura 1: Dominio acotado Ω .

expresar mediante el llamado *potencial de doble capa*, que no es más que una integral sobre la frontera Γ , dada por

$$u(x) = \int_{\Gamma} k(x, y) \sigma(y) dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

donde $k(x, y)$ es una determinada función llamada *kernel* —que depende de la EDP del problema y conocida a priori—, y σ es la función *densidad*, definida sólo sobre la frontera, que, a su vez, es solución de la siguiente ecuación

$$\sigma(x) - 2 \int_{\Gamma} k(x, y) \sigma(y) dS_y = -2u_d(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.3)$$

En las integrales anteriores, la variable de integración es y y dS_y denota el elemento diferencial de superficie. Las expresiones que son del tipo (1.3) se conocen como *ecuaciones integrales* pues la incógnita σ se encuentra bajo el signo de la integral. Nótese que la ecuación integral está planteada sobre la frontera Γ de Ω .

La técnica para resolver el problema de contorno (1.1) inicial es la siguiente: primero, a partir del dato u_d se resuelve la ecuación integral (1.3) y, a continuación, a partir de su solución, la densidad σ , se construye la expresión de u dada por (1.2). Veamos algunos ejemplos físicos:

- **Problema electromagnético.** Esta técnica se utiliza en el estudio de problemas de contorno *exteriores*, esto es, planteados, por ejemplo, en el dominio no acotado $\Omega^c := \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}$: encontrar u definida en Ω^c tal que satisfice

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega^c, \\ u = u_d & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

En los casos de problemas exteriores a estas ecuaciones se les debe añadir una condición asintótica que garantiza cierto comportamiento de la solución cuando $|x| \rightarrow +\infty$ —el número real $|x|$ representa la norma Euclídea del vector posición del punto $x \in \mathbb{R}^m$ —. Por ejemplo, para el laplaciano en dos dimensiones esta condición se escribe como

$$|u(x)| \leq a + b \ln|x| + c \frac{1}{|x|}, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

uniformemente en todas las direcciones $x/|x|$, donde a , b y c son constantes. Un ejemplo de esta situación se produce cuando la función u representa el potencial electromagnético que se deriva de las ecuaciones de Maxwell (ver, por ejemplo, [1]).

Las ventajas de estas técnicas aplicadas a problemas de contorno exteriores son evidentes: permiten construir explícitamente soluciones de problemas de contorno planteados en dominios no acotados previo estudio de una ecuación integral planteada en la frontera de dicho dominio.

- **Problema acústico.** Otro ejemplo de estos problemas exteriores aparece al estudiar la propagación de ondas acústicas en un fluido. En este caso, el laplaciano es substituido por la ecuación de Helmholtz (ver Colton-Kress[3], Nédélec[12]) y el problema resulta ser: encontrar u definida en Ω^c tal que satisfice

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = 0 & \text{en } \Omega^c, \\ u = u_d & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

junto con la llamada condición de radiación de Sommerfeld

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u \right| \leq \frac{C}{r^2}, \quad r = |x| \rightarrow +\infty,$$

siendo κ el número de onda.

- **Problema térmico.** Otro ejemplo de problema de contorno que se modela mediante una ecuación integral es la radiación térmica en un cavidad cerrada. En efecto, supongamos que un cuerpo situado en Ω , conductor de calor, posee en su interior un recinto cerrado cuya frontera denotamos por Σ . En esta frontera se verifica

$$k \frac{\partial T}{\partial \nu} = J - R \text{ sobre } \Sigma,$$

siendo T la temperatura, k la conductividad térmica, J y R la irradiación y la radiosidad de la superficie, respectivamente; el vector unitario normal a Σ y exterior al conductor Ω se denota por ν . Se define la irradiación como la rapidez a la que la radiación incide sobre una superficie desde todas las direcciones por unidad de área, mientras que la radiosidad es la rapidez a la que sale la radiación de la superficie debido a la emisión y reflexión, en todas las direcciones por unidad de área, (ver [7]). Para superficies difusas y grises, la radiación emitida se escribe como

$$R(x) = \varepsilon \sigma T^4(x) + (1 - \varepsilon) J(x).$$

El primer sumando corresponde a la ley de Stefan-Boltzmann y el segundo a la parte reflejada de la radiación, ε representa la emisividad ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) y σ la constante de Stefan Boltzmann. La irradiación, J , sobre un punto de la frontera Σ , depende sólo de la radiosidad emitida por las diferentes partes de dicha frontera, es decir:

$$J(x) = \int_{\Sigma} F(x, y) R(y) dS_y,$$

siendo $F(x, y)$ el factor de vista entre los puntos x e y de Σ . Si la cavidad es convexa, el factor de vista (o de forma) entre los puntos x e y de Σ se define:

$$F(x, y) = \frac{\nu_x \cdot (y - x) \nu_y \cdot (x - y)}{\pi (x - y)^4},$$

donde ν_x y ν_y son los vectores normales en los puntos x e y , respectivamente. Por tanto, la radiosidad queda:

$$R(x) = \varepsilon \sigma T^4(x) + (1 - \varepsilon) \int_{\Sigma} F(x, y) R(y) dS_y, \quad x \in \Sigma.$$

En consecuencia, conocida la temperatura en Σ , la radiosidad $R(x)$ es la solución de la ecuación integral

$$R(x) - (1 - \varepsilon) \int_{\Sigma} F(x, y) R(y) dS_y = \varepsilon \sigma T^4(x), \quad x \in \Sigma.$$

2. Clasificación de las ecuaciones integrales.

Definición 2.1. Una ecuación integral¹ es aquella ecuación cuya incógnita se encuentra bajo el signo integral.

Las ecuaciones integrales surgen de forma natural en Análisis. Por ejemplo, dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & x \geq 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde (x_0, y_0) es un dato del problema, integrando la primera de las ecuaciones y usando la condición inicial, se tiene

$$\int_{x_0}^x y'(\tau) d\tau = \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

por tanto, resulta la expresión

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad (2.1)$$

siendo ésta una ecuación integral ya que la función incógnita y aparece bajo el signo integral. Las ecuaciones integrales pueden clasificarse atendiendo a diferentes criterios:

★ Atendiendo al *dominio de integración*,

- **E.I. de Fredholm.** La integral se plantea sobre un conjunto fijo de \mathbb{R}^m ya sean curvas, superficies, ... Como ejemplo, ver (1.3).
- **E.I. de Volterra.** El dominio de integración depende de la variable independiente, por ejemplo, de la variable espacial ' x ' en (2.1).

★ Atendiendo a la *posición* de la función incógnita,

- **E.I. de primer tipo.** La función incógnita aparece sólo dentro del signo integral. Un ejemplo es

$$u_d(x) = \int_{\Gamma} k(x, y) u(y) dS_y,$$

donde u es la función incógnita y tanto u_d como k son conocidos.

- **E.I. de segundo tipo.** La función incógnita aparece dentro y fuera del signo integral. Por ejemplo, ver (1.3).

★ Atendiendo a la *linealidad* respecto de la función incógnita,

- **E.I. lineal.** La ecuación integral es lineal respecto de la incógnita. Un ejemplo de este caso es (1.3).
- **E.I. no lineal.** La ecuación integral es no lineal respecto de la incógnita. Un ejemplo es

$$u_d(x) = \int_{\Gamma} k(x, y, u) dS_y,$$

con $k(x, y, u) = x^2 + y^2 + u^2$.

★ Atendiendo al *tipo de integral*,

- **E.I. regulares.** La integral existe como integral usual.
- **E.I. débilmente singulares.** La integral existe como integral impropia.
- **E.I. fuertemente singulares.** La integral se define mediante regularizaciones especiales, como el valor principal de Cauchy, (ver capítulo 7 de Hackbusch[6] y de Kress[9]).

¹Este apartado se ha tomado de Hackbusch[6].

Los ejemplos siguientes ilustran la clasificación anterior.

Ejemplo 2.1. La ecuación

$$\sigma(x) = u_d(x) + \int_a^x k(x, y)\sigma(y)dy,$$

es una E.I. de Volterra, de 2º tipo, lineal.

Ejemplo 2.2. La ecuación

$$u_d(x) = \int_a^x k(x, y)\sigma(y)dy,$$

es una E.I. de Volterra, de primer tipo y lineal.

Ejemplo 2.3. La ecuación de Abel,

$$u_d(x) = \int_a^x \frac{\sigma(y)}{\sqrt{x-y}}dy,$$

es una E.I. de Volterra, de primer tipo, lineal y débilmente singular.

Ejemplo 2.4. En el problema (1.1) se llega a la ecuación integral

$$\sigma(x) - 2 \int_{\Gamma} k(x, y) \sigma(y) dS_y = -2 u_d(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.2)$$

Es una E.I. de Fredholm, de segundo tipo, lineal y débilmente singular. Esto último se debe a que, en dimensión 3, la función kernel asociada al laplaciano viene dada por

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|}.$$

3. Teoría de Riesz-Fredholm.

Hasta este momento se han introducido formalmente las ecuaciones integrales, como la ecuación (2.2). A partir de ahora se intenta desarrollar una teoría abstracta² en la que se puedan enmarcar este tipo de ecuaciones. Dados dos espacios funcionales X e Y , se define el operador K como

$$\begin{array}{ccc} K : & X & \rightarrow Y \\ & \sigma & \rightsquigarrow K\sigma \end{array}$$

tal que

$$(K\sigma)(x) = 2 \int_{\Gamma} k(x, y) \sigma(y) dS_y.$$

Por tanto, si se denota $f(x) = -2 u_d(x)$, la ecuación (2.2) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\sigma(x) - (K\sigma)(x) = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

o bien, como la ecuación funcional

$$L\sigma := (I - K)\sigma = f. \quad (3.1)$$

Si el operador K es compacto, la existencia y unicidad de este tipo de problemas se estudia aplicando la teoría de Riesz-Fredholm. Nótese que la existencia y unicidad de solución de la ecuación funcional (3.1) puede estudiarse de forma equivalente mediante la existencia del operador inverso L^{-1} :

- Si para cada $f \in L(X) := \{L\varphi; \varphi \in X\}$, existe un único $\varphi \in X$ con $L\varphi = f$ entonces L se dice *inyectivo* y puede definirse el operador inverso $L^{-1} : L(X) \rightarrow X$ como $L^{-1}f := \varphi$. El operador inverso tiene dominio $L(X)$ y rango X . Verifica además que $L^{-1}L = I$ en X e $LL^{-1} = I$ en $L(X)$.
- $L : X \rightarrow L(X)$ es *sobreyectivo* si $L(X) = Y$.
- Finalmente, el operador se dice *biyectivo* si es *inyectivo* y *sobreyectivo*, es decir, si el operador inverso $L^{-1} : Y \rightarrow X$ existe.

²Este apartado se ha tomado de Kress[9].

3.1. Operadores acotados.

Definición 3.1. Sean X, Y dos espacios vectoriales, un operador $A : X \rightarrow Y$ se dice lineal si

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi,$$

para todo $\varphi, \psi \in X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2. Sean X, Y dos espacios normados, un operador $A : X \rightarrow Y$ se dice continuo en $\phi \in X$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n = A\varphi,$$

para toda sucesión $(\varphi_n) \subset X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi,$$

es decir, se verifica que $\|A\varphi_n - A\varphi\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para toda sucesión $(\varphi_n) \subset X$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definición 3.3. Sean X, Y dos espacios normados, un operador $A : X \rightarrow Y$ se dice continuo si A es continuo para todo $\varphi \in X$.

Proposición 3.1. Sean X, Y dos espacios normados, un operador lineal $A : X \rightarrow Y$ es continuo si y sólo si lo es en un único elemento de X .

Demostración. Supongamos que A es continuo en $\varphi_0 \in X$. Tenemos que probar que A es continuo en φ , para cualquier $\varphi \in X$. Sea una sucesión (φ_n) cuyo límite es φ , entonces

$$A\varphi_n = A(\varphi_n - \varphi + \varphi_0) + A(\varphi - \varphi_0) \rightarrow A\varphi_0 + A(\varphi - \varphi_0) = A\varphi,$$

dado que $(\varphi_n - \varphi + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0$. □

Definición 3.4. Sean X, Y dos espacios normados, un operador lineal $A : X \rightarrow Y$ se dice acotado si existe una constante positiva C tal que

$$\|A\varphi\|_Y \leq C \|\varphi\|_X,$$

para todo $\varphi \in X$. Cada constante C para la que la desigualdad anterior se cumple se dice que es una cota para el operador A . (Nótese que estamos utilizando $\|\cdot\|_X$ para la norma en X y $\|\cdot\|_Y$ para la norma en Y).

Proposición 3.2. Sean X, Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. A es acotado si y sólo si

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \|A\varphi\|_Y < +\infty. \quad (3.2)$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que $\|A\varphi\|_Y \leq C \|\varphi\|_X$ para todo $\varphi \in X$, luego para todo $\varphi \in X$ tal que $\|\varphi\|_X \leq 1$ se verifica que $\|A\varphi\|_Y \leq C$, por tanto

$$\sup\{\|A\varphi\|_Y; \varphi \in X, \|\varphi\|_X \leq 1\} < +\infty.$$

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que $\sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \|A\varphi\|_Y < +\infty$. Sea $\psi \in X$, $\psi \neq 0$ y tomemos $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|_X}$.

Dado que $\|\varphi\|_X = 1$ entonces

$$\|A\varphi\|_Y \leq \|A\|,$$

teniendo en cuenta que A es lineal se deduce

$$\|A\psi\|_Y \leq \|A\| \|\psi\|_X,$$

para todo $\psi \in X$ —para $\psi = 0$ se verifica trivialmente dado que $A0 = 0$. □

Definición 3.5. Se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto de los operadores lineales y acotados del espacio normado X en el espacio normado Y .

Se demuestra que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma (3.2). Además, se verifica que si Y es un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ también es un espacio de Banach.

Proposición 3.3. Sean X, Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. A es acotado si y sólo si aplica conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y .

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que A es acotado, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|A\varphi\|_Y \leq C \|\varphi\|_X,$$

para todo $\varphi \in X$. Tomemos un conjunto arbitrario $U \subset X$ acotado, es decir, existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|u\|_X \leq M$ para todo $u \in U$. Entonces

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X \leq CM, \quad \forall u \in U.$$

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que A aplica conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y . Como $\{\varphi : \|\varphi\|_X \leq 1\} \subset X$ es un conjunto acotado, por hipótesis $\{A\varphi : \|\varphi\|_X \leq 1\} \subset Y$ también lo es, por tanto, $\{\|A\varphi\|_Y : \|\varphi\|_X \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ es acotado y, en consecuencia, admite supremo finito,

$$\sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \|A\varphi\|_Y < +\infty.$$

□

Teorema 3.1. Sean X, Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. A es continuo si y sólo si A es acotado

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que A es acotado y sea una sucesión (φ_n) en X tal que converge a 0. Dado que $\|A\varphi_n\|_Y \leq C \|\varphi_n\|_X$ deducimos que la sucesión $(A\varphi_n) \rightarrow 0$. Por tanto, A es continuo en $\varphi = 0$, y por ser lineal, continuo en todo punto de X .

(\Rightarrow) Por reducción al absurdo. Supongamos que A es continuo y no acotado, por tanto,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varphi_n \in X; \|A\varphi_n\|_Y > n \|\varphi_n\|_X, \quad (3.3)$$

por tanto, la sucesión $(\psi_n) := (\varphi_n / \|\varphi_n\|_X)$ verifica que $\|\psi_n\|_X = 1$ y $\|A\psi_n\|_Y > n$ —nótese que $\varphi_n \neq 0$ para que se verifique la desigualdad de (3.3). Consideramos ahora la sucesión $(\phi_n) := (\psi_n / \|A\psi_n\|_Y)$, es evidente que $(\phi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, y como A es continuo $(A\phi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A0 = 0$, lo que es una contradicción con que $\|A\phi_n\|_Y = 1$, para todo n . En consecuencia, A es acotado. □

Teorema 3.2. Sean X, Y y Z tres espacios normados, $A : X \rightarrow Y$ y $B : Y \rightarrow Z$ dos operadores lineales acotados. Entonces la composición $B \circ A : X \rightarrow Z$ es un operador lineal acotado y $\|BA\| \leq \|A\| \|B\|$.

3.2. Operadores compactos.

Definición 3.6. Sean X, Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal, A se dice compacto si aplica conjuntos acotados de X en conjuntos relativamente compactos de Y .

Recordemos que, por definición, un subconjunto U de un espacio normado Y es relativamente compacto si su clausura es compacta lo que equivale a decir que toda sucesión de elementos de U contiene una subsucesión convergente en Y .

Teorema 3.3. El operador lineal $A : X \rightarrow Y$ es compacto si y sólo si para cada sucesión acotada (φ_n) en X , se verifica que la sucesión $(A\varphi_n)$ posee una subsucesión convergente en Y .

Ejemplo 3.1. Si Ω es un subconjunto abierto acotado de \mathbb{R}^n y $\partial\Omega$ es de clase \mathcal{C}^1 , se verifica que la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^{p^*}(\Omega)$ para $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ es continua, es decir, $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. El teorema de Rellich-Kondrachov establece que la inyección de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta para $1 \leq q < p^*$ (ver Brezis[2], pág. 169, Evans[5], pág. 272). En particular, para $n = 3$, $p = 2$ y $p^* = 6$ se verifica que la inclusión $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta para $1 \leq q < 6$, por tanto, toda sucesión (u_n) acotada de $H^1(\Omega)$ posee una subsucesión (u_{n_k}) convergente en $L^q(\Omega)$.

Dado que los conjuntos relativamente compactos son acotados, se verifica el siguiente resultado

Teorema 3.4. *Los operadores lineales y compactos son acotados.*

Además, es fácil demostrar

Teorema 3.5. *Combinaciones lineales de operadores lineales y compactos son compactos.*

Por tanto, denotando por $\mathcal{K}(X, Y)$ al conjunto de operadores lineales y compactos, se verifica que $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema 3.6. *Sean X, Y, Z tres espacios normados y sean $A : X \rightarrow Y$ y $B : Y \rightarrow Z$ dos operadores lineales y acotados. La composición $B \circ A : X \rightarrow Z$ es compacta si uno de los operadores A o B es compacto.*

Teorema 3.7. *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Sea una sucesión de operadores $A_n : X \rightarrow Y$ lineales y compactos tales*

$$\sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \|A_n \varphi - A \varphi\|_Y = \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.4)$$

siendo $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal, entonces A es compacto.

Por consiguiente, si Y es un espacio de Banach, $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema 3.8. *Sean X, Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado con rango $A(X)$ de dimensión finita, entonces A es compacto.*

La demostración de este teorema está basada en el teorema de Bolzano-Weierstrass que establece que todo subconjunto acotado y de dimensión finita de un espacio normado es relativamente compacto.

Teorema 3.9. *El operador identidad $I : X \rightarrow X$ es compacto si y sólo si X tiene dimensión finita.*

Como consecuencia de los teoremas precedentes, si X es de dimensión no finita, la inclusión $\mathcal{K}(X, X) \subset \mathcal{L}(X, X)$ es estricta. Este resultado justifica el estudio de ecuaciones integrales de primer y segundo tipo puesto que, para un operador compacto A , las propiedades de A y $I - A$ son diferentes. Además, el operador compacto A no puede tener un operador inverso acotado a no ser que X sea de dimensión finita.

Ejercicio 3.1. *Buscar un ejemplo que ilustre el hecho de que el operador $I : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ pertenece a $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ pero no a $\mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.*

Solución: Sea $\Omega = (-1, 1)$ y la sucesión $(\varphi_n)_n$ dada por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n^2 x + n} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ \sqrt{-n^2 x + n} & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica que

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \forall n, \quad (3.5)$$

por tanto, la sucesión está acotada en $L^2(\Omega)$. Veamos que no puede tener una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$. En efecto, si la subsucesión (φ_{n_k}) fuese convergente a φ en $L^2(\Omega)$ existiría una subsucesión de esta, $(\varphi_{n_{k_m}})$, convergente a φ c.p.d. en Ω . De la definición de la sucesión se deduce que $\varphi = 0$ c.p.d. en Ω , lo cual es una contradicción con (3.5).

Ejercicio 3.2. *Probar que el siguiente operador es compacto,*

$$\begin{array}{ccc} A : L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \rightsquigarrow & A(f) = u, \end{array}$$

siendo u la solución del problema:

Hallar $u \in V$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z \, dx = \int_{\Omega} f z \, dx, \quad \forall z \in V, \quad (3.6)$$

siendo $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ (ver figura 2).

Solución: se sabe que la composición de operadores continuos, si uno de ellos es compacto, es compacta. Bastara probar que la aplicación que a cada $f \in L^2(\Omega)$ le asigna la solución del problema anterior, es continua. Debido a que la inclusión $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, entonces el operador A , composición de estas dos aplicaciones, es compacto.

Veamos entonces, que u depende continuamente del dato f . Tomando $z = u$ en (3.6) como función test y aplicando la desigualdad de Poincaré (ya que suponemos que la medida de Γ_1 es positiva) obtenemos

$$\|u\|_V^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_V,$$

donde $C > 0$. Simplificando la expresión obtenemos $\|u\|_V \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

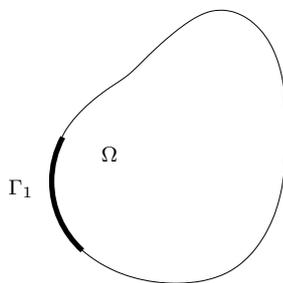


Figura 2: Dominio Ω del ejercicio 3.2.

3.3. Operadores integrales débilmente singulares. Propiedades.

Sea $\Gamma = \partial\Omega$ la frontera de un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto, acotado, conexo y de clase \mathcal{C}^2 . Se considera el espacio

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ continua}\},$$

que dotado de la norma

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|,$$

es un espacio de Banach $(\mathcal{C}(\Gamma), \|\cdot\|_{\infty})$. Se define el operador integral

$$K : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma) \\ \varphi \rightsquigarrow K\varphi$$

tal que

$$(K\varphi)(x) := \int_{\Gamma} k(x, y) \varphi(y) \, dS_y, \quad x \in \Gamma \quad (3.7)$$

siendo dS_y el elemento de superficie en el punto y y k un kernel continuo o débilmente singular.

Definición 3.7. El kernel k se dice débilmente singular si está definido y es continuo para todo $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ con $x \neq y$, y además si existen dos constantes positivas α y M , $\alpha \in (0, m-1]$ tales que

$$|k(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|^{m-1-\alpha}}, \quad (3.8)$$

para todo $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$, $x \neq y$. (Nótese que m es la dimensión del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^m$).

Esta acotación se utiliza para probar la existencia de (3.7) como integral impropia. Nótese que $m - 1 - \alpha > 0$, pues $\alpha \in (0, m - 1]$.

Nota 3.1. Nótese que si k es débilmente singular entonces $\tilde{k}(x, y) = k(y, x)$ es también débilmente singular.

Teorema 3.10. Si el kernel k es continuo, el operador (3.7) es un operador compacto en $(\mathcal{C}(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración. Tenemos que probar que el operador lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Consideremos un conjunto $U \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ acotado en $\mathcal{C}(\Gamma)$ entonces probemos que $K(U)$ es relativamente compacto. Para ello utilizamos el teorema de Ascoli- Arzelà que afirma que un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es acotado y equicontinuo. En efecto, sea $U \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq M$, $\forall \varphi \in U$, veamos primero que $K(U)$ es acotado

$$|(K\varphi)(x)| \leq \int_{\Gamma} |k(x, y)| |\varphi(y)| dS_y \leq C \|\varphi\|_\infty,$$

con $C = |\Gamma| \max_{x, y \in \Gamma} |k(x, y)|$, donde $|\Gamma|$ denota la medida de Γ . Por tanto, el operador K es acotado y, en consecuencia, $K(U)$ está acotado.

Finalmente, probemos que $K(U)$ es equicontinuo: dado que k es uniformemente continuo en $\Gamma \times \Gamma$ —pues k es continuo y $\Gamma \times \Gamma$ compacto—, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces

$$|k(x, y) - k(x', y)| < \frac{\varepsilon}{M|\Gamma|}, \quad \forall y \in \Gamma.$$

Por tanto si $\varphi \in U$,

$$|K\varphi(x) - K\varphi(x')| = \left| \int_{\Gamma} (k(x, y) - k(x', y)) \varphi(y) dS_y \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\Gamma} |k(x, y) - k(x', y)| dS_y \leq \varepsilon,$$

$\forall x, x' \in \Gamma, |x - x'| < \delta, \forall \varphi \in U$, lo que concluye la demostración. \square

Teorema 3.11. Si el kernel k es débilmente singular, el operador (3.7) es un operador acotado en $(\mathcal{C}(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$.

Demostración. Demostramos el teorema para $m = 3$; la condición (3.8) se utiliza para verificar la existencia de la integral impropia que define el operador (3.7) cuando el kernel es débilmente singular. Nótese que si $m = 3$ entonces $\alpha \in (0, 2]$.

Para un $R > 0$ fijo y $x \in \Gamma$, consideramos el conjunto (ver figura 3)

$$S_{x,R} = \{y \in \Gamma, |x - y| < R\}, \quad (3.9)$$

por lo que la integral (3.7) puede calcularse

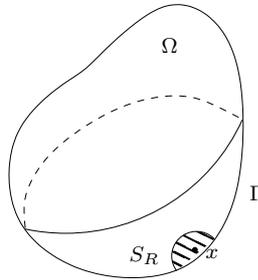


Figura 3: $S_{x,R} \subset \Gamma$.

$$\int_{\Gamma} k(x, y) \varphi(y) dS_y = \int_{S_{x,R}} k(x, y) \varphi(y) dS_y + \int_{\Gamma \setminus S_{x,R}} k(x, y) \varphi(y) dS_y. \quad (3.10)$$

En el conjunto $\Gamma \setminus S_{x,R}$ se tiene $|x - y| \geq R$ entonces

$$\frac{1}{|x - y|^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{R^{2-\alpha}}, \quad (3.11)$$

dado que $2 - \alpha > 0$; por tanto, de la última integral de (3.10) se deduce

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma \setminus S_{x,R}} k(x, y) \varphi(y) dS_y \right| \leq \int_{\Gamma \setminus S_{x,R}} |k(x, y)| |\varphi(y)| dS_y \leq \\ & \leq \|\varphi\|_\infty M \int_{\Gamma \setminus S_{x,R}} \frac{1}{|x - y|^{2-\alpha}} dS_y \leq \|\varphi\|_\infty M \int_{\Gamma \setminus S_{x,R}} \frac{1}{R^{2-\alpha}} dS_y = \\ & = \|\varphi\|_\infty M \frac{1}{R^{2-\alpha}} |\Gamma \setminus S_R| \leq \|\varphi\|_\infty M R^{\alpha-2} |\Gamma|. \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando que la frontera es de clase \mathcal{C}^2 , si denotamos por ν_x y ν_y los vectores unitarios normales a Γ y exteriores a Ω en los puntos x e y , respectivamente, se verifica que existe un número $R \in (0, 1]$ tal que

$$\nu_x \cdot \nu_y \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x, y \in \Gamma \text{ tal que } |x - y| \leq R. \quad (3.12)$$

Esto implica que $S_{x,R}$ puede proyectarse biyectivamente sobre el plano tangente a $S_{x,R}$ en el punto x . Para simplificar los cálculos supondremos que dicho plano tangente es horizontal, por lo que una parametrización de $S_{x,R}$ utilizando coordenadas polares es

$$(\rho, \theta) \in (0, R] \times [0, 2\pi) \longrightarrow y = (x_1 + \rho \cos \theta, x_2 + \rho \sin \theta, x_3 + g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)) \quad (3.13)$$

para una determinada función g dos veces continuamente diferenciable. Los vectores tangentes a la superficie son

$$\begin{aligned} \tau_\rho &= (\cos \theta, \sin \theta, \partial_1 g \cos \theta + \partial_2 g \sin \theta), \\ \tau_\theta &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, -\partial_1 g \rho \sin \theta + \partial_2 g \rho \cos \theta). \end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es

$$\tau_\rho \wedge \tau_\theta = (-\rho \partial_1 g, -\rho \partial_2 g, \rho),$$

de norma

$$|\tau_\rho \wedge \tau_\theta| = \rho \sqrt{1 + (\partial_1 g)^2 + (\partial_2 g)^2}.$$

Nótese que $\nu_x = (0, 0, 1)$ y $\nu_y = (\tau_\rho \wedge \tau_\theta) / |\tau_\rho \wedge \tau_\theta|$ de donde

$$|\tau_\rho \wedge \tau_\theta| = \frac{\nu_x \cdot (\tau_\rho \wedge \tau_\theta)}{\nu_x \cdot \nu_y} = \frac{\rho}{\nu_x \cdot \nu_y},$$

Usando (3.12) se deduce

$$|\tau_\rho \wedge \tau_\theta| \leq 2\rho.$$

Además se verifica

$$|x - y| = \sqrt{(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 + g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^2} = \sqrt{\rho^2 + g^2} \geq \rho,$$

de donde

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_R} k(x, y) \varphi(y) dS_y \right| \leq \int_{S_R} |k(x, y)| |\varphi(y)| dS_y \leq \\ & \leq \|\varphi\|_\infty M \int_{S_R} \frac{1}{|x - y|^{2-\alpha}} dS_y \leq \|\varphi\|_\infty M \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{|\tau_\rho \wedge \tau_\theta|}{(\sqrt{\rho^2 + g^2})^{2-\alpha}} d\theta d\rho \leq \\ & \leq \|\varphi\|_\infty M \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{\rho^{2-\alpha}} d\theta d\rho \leq \|\varphi\|_\infty 2M \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho^{2-\alpha}} d\theta d\rho = \\ & = \|\varphi\|_\infty 4\pi M \int_0^R \rho^{\alpha-1} d\rho = \|\varphi\|_\infty 4\pi M \frac{R^\alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

aplicando que $\alpha > 0$. Por tanto, la integral (3.7) existe como integral impropia y

$$\|K\varphi\|_\infty \leq \tilde{C} \|\varphi\|_\infty$$

con $\tilde{C} = MR^{\alpha-2} |\Gamma| + 4\pi M \frac{R^\alpha}{\alpha}$. □

Teorema 3.12. *Si el kernel k es débilmente singular, el operador (3.7) es un operador compacto en $(\mathcal{C}(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$.*

Demostración. Demostramos el teorema para $m = 3$ y utilizamos el teorema 3.7. Consideramos la función $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (ver figura 4)

$$h(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2, \\ 2t - 1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

y para $n \in \mathbb{N}$ definimos los núcleos continuos $k_n : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por

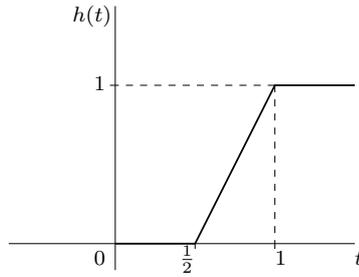


Figura 4: Función h

$$k_n(x, y) := \begin{cases} h(n|x - y|) k(x, y), & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

El correspondiente operador integral $K_n : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ definido por

$$(K_n \varphi)(x) = \int_{\Gamma} k_n(x, y) \varphi(y) dS_y,$$

es compacto por el teorema 3.10 ya que k_n es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que K_n tiende a K en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C}(\Gamma))$. En efecto, nótese que

$$\begin{aligned} h(n|x - y|) = 0 &\Leftrightarrow |x - y| \leq 1/(2n), \\ h(n|x - y|) = 1 &\Leftrightarrow |x - y| \geq 1/n. \end{aligned}$$

Sea $x \in \Gamma$ y el subconjunto de Γ

$$S_{x, \frac{1}{n}} = \left\{ y \in \Gamma : |x - y| < \frac{1}{n} \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
|(K\varphi)(x) - (K_n\varphi)(x)| &= \left| \int_{\Gamma} \varphi(x)k(x,y)dS_y - \int_{\Gamma} \varphi(x)k_n(x,y)dS_y \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma} \varphi(x) (k(x,y) - k_n(x,y)) dS_y \right| \\
&= \left| \int_{S_{x, \frac{1}{n}}} \varphi(x) (k(x,y) - k_n(x,y)) dS_y \right| \\
&= \left| \int_{S_{x, \frac{1}{n}}} \varphi(x)k(x,y) (1 - h(n|x-y|)) dS_y \right| \\
&\leq \int_{S_{x, \frac{1}{n}}} |\varphi(x)| |k(x,y)| |1 - h(n|x-y|)| dS_y \\
&\leq \|\varphi\|_{\infty} M \int_{S_{x, \frac{1}{n}}} \frac{1}{|x-y|^{m-1-\alpha}} dS_y.
\end{aligned}$$

Para $m = 3$ y análogamente a la demostración del teorema anterior

$$\begin{aligned}
|K\varphi(x) - K_n\varphi(x)| &\leq \|\varphi\|_{\infty} M \int_{S_{x, \frac{1}{n}}} \frac{1}{|x-y|^{2-\alpha}} dS_y \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_{\infty} 4\pi M}{\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Luego $\{K_n\varphi\}$ converge a $K\varphi$ de forma uniforme en Γ , es decir,

$$\|K\varphi - K_n\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in \Gamma} |K\varphi(x) - K_n\varphi(x)| \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty} 4\pi M}{\alpha} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

y

$$\|K - K_n\| = \sup_{\|\varphi\|_{\infty} \leq 1} \|K\varphi - K_n\varphi\|_{\infty} \leq \frac{4\pi M}{\alpha} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Por lo tanto $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ y dado que K_n son operadores compactos y K es lineal se concluye que K es compacto. \square

Nota 3.2. Dado que $K_n\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K\varphi$ uniformemente deducimos $K\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Nota 3.3. La propiedad (3.12) se deduce del siguiente lema, demostrado en Colton-Kress[3], pág. 35, y que a menudo se utiliza para probar que un kernel es débilmente singular

Lema 3.1. Si Γ es de clase \mathcal{C}^2 , existe una constante $L > 0$ tal que

$$|\nu_x \cdot (x - y)| \leq L |x - y|^2, \quad (3.14)$$

$$|\nu_x - \nu_y| \leq L |x - y|, \quad (3.15)$$

para todo $x, y \in \Gamma$.

Nótese que (3.14) hace referencia al hecho de que el vector $x - y$ es “casi” ortogonal al vector ν_x cuando x está cerca de y , ver figura 5.

Ejercicio 3.3. Probar que los siguientes kernel son débilmente singulares:

$$1. \text{ Para } m = 2, k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} = \frac{-1}{2\pi} \ln |x - y|.$$

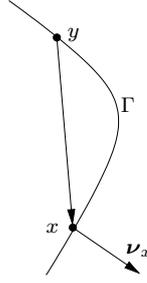


Figura 5: Geometría del lema 3.1.

2. Para $m = 3$, $k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$.
3. Para $m = 2$, $k(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \right)$.
4. Para $m = 2$, $\tilde{k}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \right)$.
5. Para $m = 3$, $k(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \right)$.
6. Para $m = 3$, $\tilde{k}(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \right)$.

Solución:

1. Evidentemente, k es continuo en (x, y) si $x \neq y$; veamos que existen dos constantes $M > 0$ y $\alpha \in (0, 1]$ tales que

$$|k(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|^{1-\alpha}}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma \times \Gamma, \quad x \neq y$$

con lo que se prueba que k es un kernel débilmente singular. En efecto, teniendo en cuenta que la función $f(s) = s^\beta \ln(s)$, con $\beta \in (0, 1)$, es continua y, por tanto, acotada en un intervalo $[a, b]$ con $a > 0$ (ver figura 6) y, además, $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = 0$, se verifica

$$|s^\beta \ln(s)| \leq M, \quad s \in [a, b], \quad a > 0.$$

Luego, tomando $s = |x - y|$ obtenemos

$$|k(x, y)| \leq \frac{M}{|x - y|^\beta}.$$

En este caso $\alpha = 1 - \beta \in (0, 1]$. Nótese que, dado que la frontera Γ está acotada, basta tomar $b = \max_{x, y \in \Gamma} |x - y|$.

2. Evidentemente, k es continuo en (x, y) si $x \neq y$ y la acotación es trivial con $M = 1/4\pi$ y $\alpha = 1$.
3. Nótese que

$$k(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\ln \frac{1}{|x - y|} \right) = \nabla_y \ln \frac{1}{|x - y|} \cdot \nu_y,$$

donde ∇_y denota el gradiente respecto de la variable y . Además

$$\nabla_y \ln \frac{1}{|x - y|} = \frac{x - y}{|x - y|^2},$$

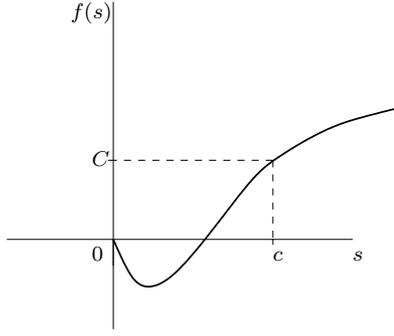


Figura 6: $f(s) = s^{\frac{1}{2}} \ln(s)$.

con lo que

$$k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot \nu_y.$$

Teniendo en cuenta que Γ es de clase \mathcal{C}^2 , por el lema 3.1 obtenemos

$$|k(x, y)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{x-y}{|x-y|^2} \cdot \nu_y \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x-y|^2} |(x-y) \cdot \nu_y| \leq \frac{L}{2\pi},$$

En este caso $M = L/2\pi$ y $\alpha = 1$.

4. Nótese que existe la siguiente relación entre este kernel y el del ejercicio anterior

$$\tilde{k}(x, y) = k(y, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{y-x}{|y-x|^2} \cdot \nu_x.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $|y-x| = |x-y|$, que Γ es de clase \mathcal{C}^2 y el lema 3.1 tenemos

$$|\tilde{k}(x, y)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{y-x}{|x-y|^2} \cdot \nu_x \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|y-x|^2} |(x-y) \cdot \nu_x| \leq \frac{L}{2\pi},$$

En este caso obtenemos de nuevo $M = L/2\pi$ y $\alpha = 1$.

5. En este caso

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \cdot \nu_y.$$

Veamos que existen constantes $M > 0$ y $\alpha \in (0, 2]$ tales que

$$|k(x, y)| \leq \frac{M}{|x-y|^{2-\alpha}},$$

con lo que se prueba que es un kernel débilmente singular. Como

$$\nabla_y \frac{1}{|x-y|} = \frac{x-y}{|x-y|^3},$$

entonces, teniendo en cuenta la regularidad de la frontera y el lema 3.1, obtenemos

$$|k(x, y)| = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{x-y}{|x-y|^3} \cdot \nu_y \right| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|^3} |(x-y) \cdot \nu_y| \leq \frac{L}{4\pi |x-y|},$$

En este caso obtenemos de nuevo $M = L/4\pi$ y $\alpha = 1$.

6. Este ejercicio se resuelve de forma análoga al ejemplo anterior. Dejamos la verificación de la cota como ejercicio inmediato (basta tener en cuenta que $\tilde{k}(x, y) = k(y, x)$).

3.4. Teoría de Riesz, sistemas duales y teoría de Fredholm: introducción.

Dada la ecuación (3.1) donde $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$, nuestro objetivo³ es estudiar si dicha ecuación tiene solución $\sigma \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y si dicha solución es única, suponiendo que el operador K es compacto. Se utiliza para ello la teoría de Riesz-Fredholm que puede considerarse como una extensión de la teoría de las aplicaciones lineales en espacios de dimensión finita. En efecto, supongamos que $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad y $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces la ecuación (3.1) queda

$$L_{n \times n} \sigma := (I_{n \times n} - K_{n \times n})\sigma = \mathbf{f}, \quad (3.16)$$

donde $I_{n \times n}$ es la matriz identidad y $K_{n \times n}$ es la matriz asociada a la aplicación K . Asimismo, el dato \mathbf{f} y la incógnita σ a determinar son vectores de \mathbb{R}^n . Pueden suceder dos casos:

- a) Si el rango de L es n (por tanto, $\dim(\ker(L)) = 0$) entonces el sistema lineal (3.16) tiene solución única y viene dada por

$$\sigma = L^{-1}\mathbf{f}. \quad (3.17)$$

- b) Si el rango de L es menor que n

$$\text{rango}(L) = r < n, \quad (3.18)$$

por tanto $\dim(\ker(L)) = n - r$. En este caso, el sistema puede tener solución o no: tiene solución si y sólo si $\mathbf{f} \in \text{Im}(L)$.

La teoría de Riesz generaliza esta situación al caso de espacios normados y operadores compactos. Nótese que en el primer caso a) la unicidad implica la existencia de solución; en efecto, la solución de la ecuación homogénea $L_{n \times n} \sigma = 0$ se estudia al probar unicidad de la ecuación $L_{n \times n} \sigma = \mathbf{f}$. Si $\sigma = 0$ es la única solución de la ecuación homogénea se habrá probado unicidad de solución no sólo para la ecuación homogénea sino también para la no homogénea.

Además, se habrá probado que el rango de $L_{n \times n}$ es n , siendo de este modo la matriz invertible, y, en consecuencia, existirá la solución de la ecuación no homogénea que viene dada por (3.17).

Sin embargo, la teoría de Riesz no establece condiciones de existencia de solución en el segundo caso b), a lo cual se responde en el teorema de la alternativa de Fredholm. En este segundo caso, si denotamos por $K_{n \times n}^*$ a la matriz traspuesta de $K_{n \times n}$, el teorema de la alternativa establece que el sistema tiene solución si y sólo si

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (3.19)$$

para todo $\mathbf{v} \in \ker(I - K^*)$, es decir, para todo \mathbf{v} tal que $K^*\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Se verá que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota en general una forma bilineal no degenerada que, en este ejemplo particular, es el producto escalar de dos vectores. Asimismo, trabajaremos con el operador adjunto en el marco de un sistema dual, K^* , siendo en este ejemplo la matriz traspuesta.

3.5. Teoría de Riesz.

Estudiamos la ecuación⁴

$$\varphi - K\varphi = f, \quad (3.20)$$

donde $K : X \rightarrow X$ es un operador lineal y compacto, con X un espacio normado. Denotamos por I al operador identidad y $L = I - K$.

Teorema 3.13 (Primer teorema de Riesz). *El núcleo del operador L ,*

$$\ker(L) := \{\varphi \in X : L\varphi = 0\}, \quad (3.21)$$

es un subespacio de X de dimensión finita.

³Este apartado se ha tomado de Pipkin [13] y Kress [9].

⁴Este apartado se ha tomado de Kress [9], donde se encuentran las demostraciones de los teoremas.

Teorema 3.14 (Segundo teorema de Riesz). *El rango del operador L ,*

$$L(X) := \{L\varphi : \varphi \in X\}, \quad (3.22)$$

es un subespacio cerrado de X .

Teorema 3.15. *En las condiciones anteriores, L es inyectivo si y sólo si L es sobreyectivo. Además, si L es inyectivo entonces el operador inverso*

$$L^{-1} = (I - K)^{-1} : X \rightarrow X, \quad (3.23)$$

es un operador acotado.

Nótese que, en este caso, el problema (3.20) tiene solución única dada por $\varphi = (I - K)^{-1} f$.

Corolario 3.1. *Si la ecuación homogénea sólo tiene la solución trivial ($\varphi - K\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$), el operador L es inyectivo lo que equivale a ser sobreyectivo. En este caso, se verifica que para todo $f \in X$, la ecuación no homogénea $\varphi - K\varphi = f$ tiene solución única con $\varphi \in X$.*

Corolario 3.2. *En las condiciones anteriores, si L no es inyectivo entonces el núcleo $\ker(L)$ tiene dimensión finita y el rango $L(X) \subset X$ es un subespacio cerrado.*

Corolario 3.3. *Si la ecuación homogénea tiene una solución no trivial, entonces tiene un número finito de soluciones linealmente independientes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Además, en este caso, la ecuación no homogénea puede tener solución o no. En caso de tenerla, su solución general es de la forma,*

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \quad (3.24)$$

donde α_k , $k = 1, \dots, n$ son escalares, φ_k , $k = 1, \dots, n$ son las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y $\tilde{\varphi}$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

3.6. Formas bilineales y sistemas duales.

Aunque normalmente la teoría de Fredholm se introduce en relación al espacio dual (ver Brezis[2]), aquí se presenta en el marco de sistemas duales asociados a formas bilineales no degeneradas, más apropiada para el estudio de ecuaciones integrales debido a su estructura simétrica.

Definición 3.8. *Sean X y Y dos espacios vectoriales reales⁵. Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina forma bilineal si*

$$\langle \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \psi \rangle = \alpha_1 \langle \varphi_1, \psi \rangle + \alpha_2 \langle \varphi_2, \psi \rangle, \quad (3.25)$$

$$\langle \varphi, \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 \rangle = \beta_1 \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \beta_2 \langle \varphi, \psi_2 \rangle, \quad (3.26)$$

para todo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in X$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in Y$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Definición 3.9. *Se dice que la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada si para cada $\varphi \in X$ con $\varphi \neq 0$ existe $\psi \in Y$ tal que $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$; y para cada $\psi \in Y$, $\psi \neq 0$ existe $\varphi \in X$ tal que $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$.*

Definición 3.10. *Se denomina sistema dual a dos espacios normados X e Y , equipados con una forma bilineal no degenerada. Se denota por $\langle X, Y \rangle$.*

Ejemplo 3.2. *Consideremos los espacios $X = Y = \mathcal{C}(\Gamma)$ y la aplicación*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi(x) \psi(x) dS. \quad (3.27)$$

⁵En Kress[9] se desarrolla esta teoría para espacios vectoriales sobre \mathbb{C}

De forma inmediata se comprueba, empleando la linealidad de la integral, que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal. Trivialmente es no degenerada dado que para cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $\varphi \neq 0$, basta tomar la propia función φ para que se verifique que

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi(x)\varphi(x)dS \neq 0. \quad (3.28)$$

Por tanto $\langle \mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C}(\Gamma) \rangle$ es un sistema dual.

Ejemplo 3.3. Sean $X = Y = \mathbb{R}^n$ y como forma bilineal se define el producto escalar usual,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.29)$$

Es trivial comprobar que $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rangle$ es un sistema dual.

Nota 3.4. Dado un espacio de Hilbert X verifica que $\langle X, X \rangle$ es un sistema dual al tomar como forma bilineal no degenerada el producto interior del espacio de Hilbert.

Definición 3.11. Sea $\langle X, Y \rangle$ un sistema dual. Dos operadores $A : X \rightarrow X$ y $B : Y \rightarrow Y$ se dicen adjuntos si

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle, \quad (3.30)$$

para todo $\varphi \in X$, $\psi \in Y$. Denotaremos por $A^* = B$.

Ejemplo 3.4. Sea el sistema dual $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rangle$ y una matriz $A_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\langle A_{n \times n} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A_{n \times n} \mathbf{x})^t \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A_{n \times n}^t \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, A_{n \times n}^t \mathbf{y} \rangle. \quad (3.31)$$

En este caso, el operador adjunto de $A_{n \times n}$ es su matriz traspuesta.

Teorema 3.16. Sea $\langle X, Y \rangle$ un sistema dual. Si el operador $A : X \rightarrow X$ tiene un operador adjunto $B : Y \rightarrow Y$ entonces B está determinado de forma única y además, A y B son lineales.

Demostración. Supongamos que A tiene dos operadores adjuntos B_1 y B_2 y sea $B = B_1 - B_2$. Para todo $\varphi \in X$ y $\psi \in Y$ se verifica

$$\langle \varphi, B\psi \rangle = \langle \varphi, B_1\psi - B_2\psi \rangle = \langle \varphi, B_1\psi \rangle - \langle \varphi, B_2\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle - \langle A\varphi, \psi \rangle = 0, \quad (3.32)$$

y debido a que la forma bilineal es no degenerada, se tiene que $B\psi = 0$; por tanto, $B_1\psi = B_2\psi$, $\forall \psi \in Y$. Se demuestra a continuación que B es lineal —de forma análoga se demuestra para A ; en efecto, dado que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \beta_1 B\psi_1 + \beta_2 B\psi_2 \rangle &= \langle \varphi, \beta_1 B\psi_1 \rangle + \langle \varphi, \beta_2 B\psi_2 \rangle = \beta_1 \langle \varphi, B\psi_1 \rangle + \beta_2 \langle \varphi, B\psi_2 \rangle = \\ &= \beta_1 \langle A\varphi, \psi_1 \rangle + \beta_2 \langle A\varphi, \psi_2 \rangle = \langle A\varphi, \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 \rangle = \langle \varphi, B(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) \rangle, \end{aligned}$$

se verifica que $\beta_1 B\psi_1 + \beta_2 B\psi_2 = B(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2)$, $\forall \varphi \in X$, $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ y $\forall \psi_1, \psi_2 \in Y$. \square

Teorema 3.17. Sea k un kernel continuo o débilmente singular. Entonces en el sistema dual $\langle \mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C}(\Gamma) \rangle$ los operadores integrales compactos definidos por

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Gamma} k(x, y)\varphi(y)dS_y, \quad (3.33)$$

y

$$(\tilde{K}\psi)(x) = \int_{\Gamma} \tilde{k}(x, y)\psi(y)dS_y = \int_{\Gamma} k(y, x)\psi(y)dS_y, \quad (3.34)$$

son adjuntos (ver nota 3.1).

Demostración. Si el kernel $k(x, y)$ es continuo, se verifica

$$\begin{aligned}
\langle K\varphi, \psi \rangle &= \int_{\Gamma} (K\varphi)(x)\psi(x)dS_x \\
&= \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} k(x, y)\varphi(y)dS_y \right) \psi(x)dS_x \\
&= \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} k(x, y)\psi(x)dS_x \right) \varphi(y)dS_y \\
&= \int_{\Gamma} \varphi(y)(\tilde{K}\psi)(y)dS_y = \langle \varphi, \tilde{K}\psi \rangle,
\end{aligned}$$

aplicando el teorema de Fubini. En caso de un kernel débilmente singular, intercambiar el orden de integración está justificado por el hecho que $K_n\varphi \rightarrow K\varphi$ cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente en Γ , siendo K_n el operador integral con kernel continuo k_n introducido en la demostración del Teorema 3.12. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (K_n\varphi)(x)\psi(x)dS_x &= \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} k_n(x, y)\varphi(y)dS_y \right) \psi(x)dS_x \\
&= \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} k_n(x, y)\psi(x)dS_x \right) \varphi(y)dS_y \\
&= \int_{\Gamma} \varphi(y)(\tilde{K}_n\psi)(y)dS_y.
\end{aligned}$$

Además, se verifica

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma} (K_n\varphi - K\varphi)(x)\psi(x)dS_x \right| &\leq C\|K_n\varphi - K\varphi\|_{\infty}, \\
\left| \int_{\Gamma} (\tilde{K}_n\psi - \tilde{K}\psi)(x)\varphi(x)dS_x \right| &\leq C\|\tilde{K}_n\psi - \tilde{K}\psi\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Por tanto, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (K_n\varphi)(x)\psi(x)dS_x &\rightarrow \int_{\Gamma} (K\varphi)(x)\psi(x)dS_x, \\
\int_{\Gamma} (\tilde{K}_n\psi)(x)\varphi(x)dS_x &\rightarrow \int_{\Gamma} (\tilde{K}\psi)(x)\varphi(x)dS_x.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.5. Aplicando el teorema anterior, el operador adjunto de

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \varphi(y)dS_y$$

es

$$(\tilde{K}\psi)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \psi(y)dS_y.$$

3.7. Teoría de Fredholm.

Teorema 3.18 (Primer teorema de Fredholm⁶). Sean $\langle X, Y \rangle$ un sistema dual y $A : X \rightarrow X$, $B : Y \rightarrow Y$ dos operadores adjuntos y compactos. Entonces los núcleos de los operadores $(I - A)$ e $(I - B)$ tienen la misma dimensión finita,

$$\dim \ker(I - A) = \dim \ker(I - B) < \infty. \quad (3.35)$$

⁶Las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en Kress[9].

Teorema 3.19 (Segundo teorema de Fredholm). Sean $\langle X, Y \rangle$ un sistema dual y $A : X \rightarrow X$, $B : Y \rightarrow Y$ dos operadores adjuntos y compactos. Entonces

$$(I - A)(X) = \{\varphi \in X : \langle \varphi, \psi \rangle = 0, \psi \in \ker(I - B)\}. \quad (3.36)$$

$$(I - B)(Y) = \{\psi \in Y : \langle \varphi, \psi \rangle = 0, \varphi \in \ker(I - A)\}. \quad (3.37)$$

Estos dos resultados se integran en el siguiente teorema.

Teorema 3.20 (de la Alternativa de Fredholm). Sean $\langle X, Y \rangle$ un sistema dual y $A : X \rightarrow X$, $B : Y \rightarrow Y$ dos operadores adjuntos y compactos. Entonces, o bien $I - A$ e $I - B$ son biyectivos o bien $I - A$ e $I - B$ tienen núcleos, no triviales, de dimensión finita; además, sus imágenes verifican

$$(I - A)(X) = \{\varphi \in X : \langle \varphi, \psi \rangle = 0, \psi \in \ker(I - B)\}.$$

$$(I - B)(Y) = \{\psi \in Y : \langle \varphi, \psi \rangle = 0, \varphi \in \ker(I - A)\}.$$

Teniendo en cuenta el sistema dual $\langle \mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C}(\Gamma) \rangle$ del ejemplo 3.2 y los operadores compactos y adjuntos del teorema 3.17, se obtiene como corolario el teorema de la alternativa para ecuaciones integrales.

Corolario 3.4. Sea k un kernel continuo o débilmente singular, entonces

a) o bien, las ecuaciones integrales homogéneas

$$\varphi(x) - \int_{\Gamma} k(x, y)\varphi(y)dS_y = 0, \quad (3.38)$$

$$\psi(x) - \int_{\Gamma} k(y, x)\psi(y)dS_y = 0, \quad (3.39)$$

sólo tienen la solución trivial en cuyo caso las respectivas ecuaciones no homogéneas

$$\varphi(x) - \int_{\Gamma} k(x, y)\varphi(y)dS_y = f(x), \quad (3.40)$$

$$\psi(x) - \int_{\Gamma} k(y, x)\psi(y)dS_y = g(x), \quad (3.41)$$

tienen solución única $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $\psi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ para todo dato $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

b) O bien, las ecuaciones integrales homogéneas tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes. En este caso,

- la ecuación no homogénea (3.40) tiene solución si y sólo si

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{\Gamma} f(x)\psi(x)dS_x = 0, \quad (3.42)$$

para toda solución ψ de la ecuación integral adjunta homogénea (3.39).

- la ecuación no homogénea (3.41) tiene solución si y sólo si

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_{\Gamma} \varphi(x)g(x)dS_x = 0, \quad (3.43)$$

para toda solución φ de la ecuación integral adjunta homogénea (3.38).

Ejemplo 3.6. Se considera la ecuación integral de Fredholm de segundo tipo definida en el intervalo $[a, b]$,

$$\varphi(x) - \int_a^b e^{x-y}\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.44)$$

y se estudia bajo qué condiciones dicha ecuación integral tiene solución. Nótese que la ecuación adjunta homogénea es

$$\psi(x) - \int_a^b e^{y-x} \psi(y) dy = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (3.45)$$

Dado que, en esta ecuación, la integración se realiza respecto de la variable y , se tiene

$$\psi(x) - e^{-x} \int_a^b e^y \psi(y) dy = 0, \quad (3.46)$$

de donde se deduce que toda solución de la ecuación adjunta homogénea debe ser de la forma $\psi(x) = Ce^{-x}$, $x \in [a, b]$. Sustituyendo en la ecuación adjunta homogénea (3.45),

$$Ce^{-x} - e^{-x} \int_a^b Ce^{-y} e^y dy = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.47)$$

lo que equivale a

$$Ce^{-x} - Ce^{-x} \int_a^b dy = 0, \quad (3.48)$$

que simplificando, se reduce a $C(1 - (b - a)) = 0$.

En conclusión,

$\psi(x)$ es solución de la ecuación adjunta homogénea (3.45) si y sólo si $\psi(x) = Ce^{-x}$ con $C(1 - (b - a)) = 0$. Entonces se pueden dar dos casos:

- Si $b - a \neq 1$, luego $C = 0$ por lo que la función nula es la única solución de la ecuación adjunta homogénea. Entonces, utilizando el teorema de la alternativa, la ecuación integral no homogénea (3.44) tiene solución única para todo dato $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

En este caso, es inmediato comprobar que la solución es de la forma $\varphi(x) = f(x) + \tilde{C}e^x$. En efecto, la expresión de \tilde{C} se calcula sustituyendo en la ecuación inicial no homogénea (3.44),

$$f(x) + \tilde{C}e^x - \int_a^b e^{x-y} (f(y) + \tilde{C}e^y) dy = f(x), \quad (3.49)$$

lo que equivale a

$$\tilde{C}e^x - e^x \left[\int_a^b e^{-y} f(y) dy + \tilde{C}(b - a) \right] = 0. \quad (3.50)$$

Si simplificamos las exponenciales resulta

$$\tilde{C}(1 - (b - a)) - \int_a^b e^{-y} f(y) dy = 0. \quad (3.51)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $b - a \neq 1$,

$$\tilde{C} = \frac{\int_a^b e^{-y} f(y) dy}{1 - (b - a)}, \quad (3.52)$$

con lo que tenemos

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\int_a^b e^{-y} f(y) dy}{1 - (b - a)} e^x. \quad (3.53)$$

- Si $b - a = 1$ luego $\psi(x) = Ce^{-x}$ es solución de la ecuación adjunta homogénea para todo valor de C . Entonces, por el teorema de la alternativa, la ecuación no homogénea (3.44) tiene solución si y sólo si

$$\int_a^b e^{-y} f(y) dy = 0. \quad (3.54)$$

Nótese que, si se verifica esta condición, $\varphi(x) = f(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea (3.44), y, en virtud del corolario 3.3, su solución general es de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha e^x,$$

siendo α una constante. Por tanto, en este caso, no hay unicidad de solución.

4. Teoría del potencial.

Una de las principales aplicaciones de las ecuaciones integrales es el estudio de problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales. En este capítulo se presentan resultados básicos relativos a los problemas de contorno de la teoría del potencial, donde la ecuación en derivadas parciales que se estudia es la *ecuación de Laplace*⁷.

4.1. La ecuación de Laplace. Funciones armónicas.

Se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, un conjunto abierto, acotado, conexo y $\Gamma = \partial\Omega$ de clase \mathcal{C}^2 . Denotamos por $\Omega^c = \mathbb{R}^m \setminus \Omega$, (nótese que Ω^c es no acotado). Nuestro propósito será buscar soluciones de la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = 0, \quad (4.1)$$

en Ω o en Ω^c que verifiquen condiciones de contorno Dirichlet o Neumann en la frontera del dominio en cuestión. Recuérdese que el *laplaciano* de u es $\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Definición 4.1. *Se dice que u es una función armónica en Ω si es dos veces continuamente diferenciable y verifica la ecuación de Laplace en Ω .*

Definición 4.2. *Se dice que u es una función armónica en el dominio no acotado Ω^c si es dos veces continuamente diferenciable en Ω^c , verifica la ecuación de Laplace en Ω^c y además*

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{m-2}}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

siendo C una constante positiva y m la dimensión del espacio.

Utilizando los símbolos de Landau, (4.2) se expresa

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

De estas dos definiciones, hay que destacar que no se especifica el valor de la función u en la frontera del dominio acotado o no acotado.

Nota 4.1. *De la definición se deduce que, en dominios no acotados:*

- Si $m = 2$, una función armónica está acotada cuando $|x| \rightarrow \infty$.
- Si $m = 3$, una función armónica verifica, para $|x|$ suficientemente grande,

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (4.4)$$

Ejemplo 4.1. *La función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, es una función armónica en dominios acotados y no acotados. En cambio, la función $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, es una función armónica sólo en dominios acotados.*

Interpretación física. La ecuación de Laplace aparece en una gran variedad de problemas físicos de diferente naturaleza. En efecto, supongamos, por ejemplo, que u denota la densidad de una cierta magnitud en equilibrio de modo que si V es un subconjunto arbitrario de Ω , el flujo neto de u a través de la frontera de V es cero, esto es

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = 0,$$

⁷Este apartado se ha tomado de Kress[9], Mikhlin[11] y Evans[5].

siendo \mathbf{F} la densidad de flujo y $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal unitario exterior a V . Del teorema de Gauss se deduce

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS = 0,$$

y, dado que V es un subconjunto arbitrario, se deduce que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \text{ en } \Omega. \quad (4.5)$$

En muchos casos es físicamente razonable suponer que el flujo es proporcional a gradiente de u en el sentido siguiente

$$\mathbf{F} = -k \nabla u, \quad (k > 0). \quad (4.6)$$

Substituyendo en (4.5), se obtiene la ecuación de Laplace

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0.$$

Si u denota

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{concentración química} \\ \text{temperatura} \\ \text{potencial electrostático,} \end{array} \right.$$

la ecuación (4.6) es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la ley de Fick de la difusión} \\ \text{la ley de Fourier de la conducción de calor} \\ \text{la ley de Ohm de la conducción eléctrica,} \end{array} \right.$$

respectivamente.

Ejercicio 4.1. Probar que la ecuación de Laplace es invariante por rotaciones: si $\Theta_{n \times n}$ es una matriz ortogonal y u una solución de la ecuación de Laplace, definimos

$$v(x) = u(\Theta x),$$

probar que $\Delta v = 0$.

Solución: Denotemos por comodidad la derivada parcial de v respecto a x_i por $v_{,i}$ y adoptemos la convención de Einstein de que los subíndices repetidos suman. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{,ii} = (v_{,i})_{,i} = ((u \circ \Theta)_{,i})_{,i} = (u_{,j} \Theta_{ji})_{,i} = u_{,jk} \Theta_{ki} \Theta_{ji} = u_{,jk} \Theta_{ki} \Theta_{ij}^t \\ &= u_{,jk} (\Theta \Theta^t)_{kj} = u_{,jk} \delta_{kj} = u_{,jj} = \Delta u = 0, \end{aligned}$$

aplicando la ortogonalidad de la matriz Θ , es decir, $\Theta \Theta^t = I_{n \times n}$.

4.2. Soluciones fundamentales (o singulares) de la ecuación de Laplace.

Una estrategia para estudiar ecuaciones en derivadas parciales lineales es identificar ciertas soluciones explícitas para luego extraer conclusiones sobre soluciones más complicadas. Teniendo en cuenta que la ecuación de Laplace es invariante por rotaciones (ver ejercicio 4.1), se trata de encontrar soluciones “radiales”, es decir, que sean función de $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$. Se busca pues una solución u de la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^m de la forma

$$u(x) = v(r),$$

donde v se elige de manera que $\Delta u = 0$. Nótese que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r}, \quad (x \neq 0).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Sumando

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r) \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{m}{r} - \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{r^3} \right),$$

y teniendo en cuenta que $r^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$, se obtiene

$$\Delta u = v''(r) + v'(r) \frac{m-1}{r}.$$

De modo que $\Delta u = 0$ si y sólo si

$$v'' + \frac{m-1}{r} v' = 0.$$

Si $v' \neq 0$ entonces

$$(\ln v')' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-m}{r},$$

e integrando obtenemos

$$\ln v' = \int \frac{1-m}{r} dr + \ln a = (1-m) \ln r + \ln a = \ln a r^{1-m}.$$

Entonces

$$v'(r) = \frac{a}{r^{m-1}}.$$

Por consiguiente, si $r > 0$,

$$v(r) = \int \frac{a}{r^{m-1}} dr + C = \begin{cases} a \ln r + C, & \text{si } m = 2; \\ \frac{a}{r^{m-2}} + C, & \text{si } m > 2; \end{cases}$$

siendo a y C constantes.

Nota 4.2. Nótese que tenemos las estimaciones

$$|v'(r)| \leq \frac{C}{r^{m-1}}, \quad |v''(r)| \leq \frac{C}{r^m},$$

para alguna constante positiva C .

Estas consideraciones motivan la siguiente definición

Definición 4.3. La función

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, & \text{si } m = 2; \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, & \text{si } m = 3; \end{cases} \quad (4.7)$$

se denomina solución fundamental (o singular) de la ecuación de Laplace.

Teorema 4.1. Para $y \in \mathbb{R}^m$ fijo, la solución fundamental de la ecuación de Laplace verifica dicha ecuación en $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$.

Demostración. Para $m = 2$,

$$2\pi \Phi(x, y) = \ln \frac{1}{|x-y|} = \ln \left(\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

Φ es dos veces continuamente diferenciable en cualquier abierto al cual no pertenezca y . Además, como

$$2\pi \nabla_x \Phi = |x - y| \frac{-1}{|x - y|^2} \frac{x - y}{|x - y|} = \frac{-1}{|x - y|^2} (x - y), \quad (4.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2\pi \operatorname{div}(\nabla_x \Phi) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^2} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^2 \frac{|x - y|^2 - (x_i - y_i) 2(x_i - y_i)}{|x - y|^4} \\ &= - \frac{2|x - y|^2 - 2(x_1 - y_1)^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^4} = 0. \end{aligned}$$

Para $m = 3$,

$$4\pi \Phi(x, y) = 4\pi \Phi(|x - y|) = \frac{1}{|x - y|} = \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

Φ es dos veces continuamente diferenciable en cualquier abierto al cual no pertenezca y . Además, como

$$4\pi \nabla_x \Phi = \frac{-1}{|x - y|^2} \frac{x - y}{|x - y|} = \frac{-1}{|x - y|^3} (x - y), \quad (4.9)$$

entonces

$$\begin{aligned} 4\pi \operatorname{div}(\nabla_x \Phi) &= - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^3 \frac{|x - y|^3 - 3(x_i - y_i)^2 |x - y|}{|x - y|^6} \\ &= - \frac{3|x - y|^3 - 3|x - y|^2 |x - y|}{|x - y|^6} = 0. \end{aligned}$$

□

Comportamiento asintótico en dominios no acotados. Tomando $y \in \mathbb{R}^m$ fijo, podemos escoger x de tal forma que $|x - y| > 1$ y $|x| > 2|y|$, por lo que

$$|x - y| \geq |x| - |y| > \frac{|x|}{2},$$

entonces

$$\frac{1}{|x - y|} \leq \frac{2}{|x|}.$$

Teniendo esto en cuenta para $m = 3$ se verifica

$$|\Phi(x, y)| = \left| \frac{1}{|x - y|} \right| = \frac{1}{|x - y|} \leq \frac{2}{|x|},$$

tomando $|x|$ suficientemente grande. Luego Φ es armónica en dominios acotados y no acotados contenidos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$.

Para $m = 2$, dada cualquier constante positiva C , se verifica

$$\left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right| = |\ln |x - y|| = \ln |x - y| > \ln \frac{|x|}{2} > C,$$

tomando $|x|$ suficientemente grande, por ejemplo $|x| > 2e^C$. Luego no se cumple la condición de acotación asintótica dada en la definición 4.2, así Φ es armónica en dominios acotados contenidos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Interpretación física.

- **Potencial generado por una carga estática puntual:** sea una carga eléctrica fija q (C) situada en el punto $y \in \mathbb{R}^3$, el campo electrostático que genera dicha carga en el punto x viene dado por (ver Johnk [8], página 182)

$$\mathbf{E} = (x - y) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x - y|^3} \quad (\text{V/m}), \quad (4.10)$$

siendo ϵ_0 la permitividad del espacio libre o permitividad del vacío. Sabiendo que $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, donde ϕ es el llamado campo potencial escalar, y teniendo en cuenta que con cálculos análogos a (4.9) se obtiene

$$\nabla_x \left(\frac{1}{|x - y|} \right) = -\frac{(x - y)}{|x - y|^3},$$

de (4.10) se deduce que

$$\mathbf{E} = -\nabla_x \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x - y|} \right).$$

Finalmente,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x - y|} \quad (\text{V}).$$

Por tanto, si fijamos $y \in \mathbb{R}^3$, la solución singular de la ecuación de Laplace $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$ representa el potencial electrostático en el punto x generado por una carga $q = \epsilon_0$ situada en el punto y .

- **Potencial generado por una carga estática uniformemente distribuida a lo largo de una recta:** sea una densidad de carga eléctrica q_l (C/m) distribuida uniformemente a lo largo de la recta, que denotamos por l , paralela al eje z que pasa por el punto $y \in \mathbb{R}^3$, el campo electrostático generado en el punto $x \in \mathbb{R}^3$ viene dado por (ver Johnk [8], página 183)

$$\mathbf{E} = \int_l (x - y) \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0 |x - y|^3} dl_y \quad (\text{V/m}). \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta que la expresión del vector $x - y$ en función de los vectores de la base canónica cartesiana $\{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$(x - y) = (x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + (x_3 - y_3)e_3,$$

se denota su proyección en el plano XY por $(x - y)_{1,2}$ de forma que

$$(x - y) = (x - y)_{1,2} + (x_3 - y_3)e_3.$$

Utilizando esta notación y parametrizando la recta en función de la variable y_3 , la expresión (4.11) queda

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q_l (x - y)_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L \frac{dy_3}{(|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}} \\ &+ \frac{q_l e_3}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L \frac{(x_3 - y_3) dy_3}{(|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Con la ayuda de tablas de integración obtenemos las integrales anteriores (ver Johnk [8], página 186)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q_l (x - y)_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{L - x_3}{|(x - y)_{1,2}|^2 (|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 - L)^2)^{1/2}} \\ &+ \frac{q_l (x - y)_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{L - x_3}{|(x - y)_{1,2}|^2 (|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 + L)^2)^{1/2}} \\ &+ \frac{q_l e_3}{4\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 - L)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(|(x - y)_{1,2}|^2 + (x_3 + L)^2)^{1/2}} \right], \end{aligned}$$

y pasando al límite observamos que la tercera componente de E es cero, siendo su expresión completa

$$E = \frac{q_l (x - y)_{1,2}}{2\pi\epsilon_0 |(x - y)_{1,2}|^2}.$$

Con cálculos análogos a (4.8) se obtiene

$$\nabla_x \left(\ln \frac{1}{|(x - y)_{1,2}|} \right) = - \frac{(x - y)_{1,2}}{|(x - y)_{1,2}|^2},$$

de donde

$$E = -\nabla_x \left(\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{|(x - y)_{1,2}|} \right).$$

Finalmente,

$$\phi = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{|(x - y)_{1,2}|}.$$

Por tanto, si fijamos $y \in \mathbb{R}^3$, la solución singular de la ecuación de Laplace en dos dimensiones representa el potencial electrostático en el punto x generado por una carga $q_l = \epsilon_0$ distribuida uniformemente a lo largo de una recta que pasa por y , paralela al eje z .

Teorema 4.2. *Se verifica*

$$-\Delta_x \Phi = \delta_y \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad (4.12)$$

siendo δ_y la distribución delta de Dirac con soporte en el punto y .

Nota 4.3. *Recordamos que $\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, siendo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que su soporte esté contenido en la bola $B(y, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < a\}$, entonces

$$\langle \Delta \Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, \Delta \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B(y, \epsilon, a)} \Phi(x) \Delta \varphi(x) dx, \quad (4.13)$$

siendo $B(y, \epsilon, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon < |x - y| < a\}$, (nótese que la solución fundamental tiene una singularidad en $x = y$). Dado que en esta bola tanto Φ como φ son muy regulares, podemos aplicar la fórmula de Green teniendo en cuenta que $\Delta_x \Phi = 0$ en $B(y, \epsilon, a)$,

$$\int_{B(y, \epsilon, a)} \Phi(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial B(y, \epsilon, a)} \Phi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS - \int_{\partial B(y, \epsilon, a)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \varphi(x) dS,$$

donde ν denota el vector normal unitario exterior a la frontera de $B(y, \epsilon, a)$. Además, tanto φ como su derivada normal se anula en $\partial B(y, a)$, por tanto, la expresión anterior queda

$$\int_{B(y, \epsilon, a)} \Phi(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial B(y, \epsilon)} \Phi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS - \int_{\partial B(y, \epsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \varphi(x) dS. \quad (4.14)$$

La segunda integral de la expresión anterior se puede acotar de la siguiente forma:

- En dimensión 2,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(y, \epsilon)} \Phi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS \right| &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{\partial B(y, \epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS \right| \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial B(y, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right| dS \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\epsilon} \sup_{x \in B(y, a)} |\nabla \varphi(x)| 2\pi \epsilon. \end{aligned}$$

- En dimensión 3,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(y,\epsilon)} \Phi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS \right| &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{\partial B(y,\epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS \right| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial B(y,\epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right| dS \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \sup_{x \in B(y,a)} |\nabla \varphi(x)| 4\pi \epsilon^2. \end{aligned}$$

Es evidente que ambas expresiones tienden a cero cuando ϵ tiende a cero. Con respecto a la tercera integral de (4.14), hay que destacar que $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario interior a la bola $B(y, \epsilon)$ cuya expresión es

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{y-x}{\epsilon}.$$

Utilizando esta expresión, la derivada normal de la solución singular en $\partial B(y, \epsilon)$ queda

- En dimensión 2,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla_x \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2\pi \epsilon^2} (y-x) \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2\pi \epsilon}.$$

- En dimensión 3,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla_x \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{4\pi \epsilon^3} (y-x) \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{4\pi \epsilon^2}.$$

La dos expresiones anteriores se pueden expresar conjuntamente de la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega_m^{-1} \text{ con } \omega_m = \begin{cases} 2\pi \epsilon & \text{si } m = 2, \\ 4\pi \epsilon^2 & \text{si } m = 3. \end{cases}$$

Teniendo esto en cuenta, la tercera integral de (4.14) queda

$$\int_{\partial B(y,\epsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi(x) dS = \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} \varphi(x) dS = \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} (\varphi(x) - \varphi(y)) dS + \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} \varphi(y) dS.$$

Aplicando el teorema del valor medio y teniendo en cuenta que la variable de integración es x , deducimos

$$\int_{\partial B(y,\epsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi(x) dS = \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} \nabla \varphi(\xi) \cdot (x-y) dS + \varphi(y),$$

con ξ perteneciente al segmento que une x e y . Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, la segunda integral de la expresión anterior tiende a cero puesto que

$$\left| \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} \nabla \varphi(\xi) \cdot (x-y) dS \right| \leq \omega_m^{-1} \int_{\partial B(y,\epsilon)} |\nabla \varphi(\xi) \cdot (x-y)| dS \leq \omega_m^{-1} \sup_{x \in B(y,a)} |\nabla \varphi(x)| \epsilon \omega_m.$$

Finalmente, (4.13) queda

$$\langle \Delta \Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, \Delta \varphi \rangle = -\varphi(y),$$

lo que concluye la demostración. \square

Nota 4.4. Nótese que tomando $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y definiendo formalmente $u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y) f(y) dy$ se verifica que

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

En efecto, formalmente tomando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y) f(y) dy \Delta \varphi(x) dx.$$

Debido a la simetría de Φ respecto a las variables x e y , y a la regularidad de f y $\Delta\varphi$, podemos intercambiar el orden de integración y la expresión anterior queda

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, y) \Delta\varphi(x) dx f(y) dy.$$

Por último, utilizando el teorema anterior, tenemos

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f(y) dy.$$

Una demostración rigurosa de esta propiedad se puede ver en Dautray-Lions [4], donde se utilizan las propiedades del producto convolución definido sobre las distribuciones.

4.3. Representación integral de una función de $C^2(\bar{\Omega})$.

Teorema 4.3. Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$, armónica en Ω , entonces u se puede expresar como

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \right) dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (4.15)$$

siendo ν_y el vector normal unitario exterior a la Ω en el punto y .

Nota 4.5. Una expresión similar a la anterior para funciones que son armónicas en dominios no acotados se encuentra, por ejemplo, en Kress[9], pág. 71.

Nota 4.6. Para la demostración del teorema utilizamos la segunda fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - \Delta u v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \right) dS, \quad \text{con } u, v \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (4.16)$$

En consecuencia, si $v = 1$ y u es armónica, deducimos de la expresión anterior

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0. \quad (4.17)$$

Demostración. (Del teorema 4.3). Sea $x \in \Omega$, consideramos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^n

$$B[x, \epsilon] = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \epsilon\}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \setminus B[x, \epsilon]$$

para un ϵ suficientemente pequeño de modo que $B[x, \epsilon] \subset \Omega$. Dado que tanto u como $\Phi(x, \cdot)$ son armónicas en $\tilde{\Omega}$, aplicando la segunda fórmula de Green tenemos

$$0 = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \Phi(x, y) \right) dS_y. \quad (4.18)$$

Utilizando cálculos análogos a los realizados en la demostración anterior, en $\partial B[x, \epsilon]$ se verifica

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) = \omega_m^{-1} \text{ con } \omega_m = \begin{cases} 2\pi \epsilon & \text{si } m = 2, \\ 4\pi \epsilon^2 & \text{si } m = 3, \end{cases}$$

además, la integral $\int_{\partial B[x, \epsilon]} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) dS_y$ tiende a $u(x)$ cuando ϵ tiende a cero. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\Phi(x, y)$ sólo depende de la distancia entre los puntos x e y , tenemos

$$\int_{\partial B[x, \epsilon]} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \Phi(x, y) dS_y = C(\epsilon) \int_{\partial B[x, \epsilon]} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) dS_y,$$

teniendo en cuenta que u es armónica en $B(x, \epsilon)$ y (4.17) la expresión anterior es igual a cero. Por tanto (4.18) queda

$$0 = \int_{\partial B[x, \epsilon]} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) dS_y + \int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \Phi(x, y) \right) dS_y.$$

Haciendo tender ϵ a cero, obtenemos el resultado. \square

4.4. Potencial de simple y doble capa.

La expresión (4.15) de la representación integral de una función de clase $C^2(\overline{\Omega})$ introduce dos operadores integrales con una estructura bien diferenciada, que resultan de sustituir las funciones $u(y)$ e $\partial u/\partial \nu_y$ en (4.15) por otras arbitrarias $\sigma(y)$ y $\mu(y)$, respectivamente. Así obtenemos la siguiente integral dependiente de x ,

$$\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu(y) dS_y, \quad (4.19)$$

denominada *potencial de simple capa* y

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y, \quad (4.20)$$

denominada *potencial de doble capa*. En ambos casos, las funciones μ y σ que tomamos en el espacio $C(\Gamma)$ se denominan densidades. En general, definimos el potencial de simple capa como la función $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu(y) dS_y, \quad (4.21)$$

y el potencial de doble capa como la función $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y. \quad (4.22)$$

Nota 4.7. En ocasiones, en dimensión dos, y por razones evidentes, el potencial de simple y doble capa se llama *potencial logarítmico de simple y doble capa*.

Nota 4.8. El valor de los potenciales de simple y doble capa cuando $x \in \Gamma$ se denomina *valor directo*. Si Γ es de clase C^2 , el valor directo existe como una integral impropia y representa una función continua en Γ , dado que el kernel es débilmente singular (ver sección 1.3.3).

Nota 4.9. En dimensión tres, los potenciales de simple y doble capa son, respectivamente,

$$v(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} \mu(y) dS_y, \quad (4.23)$$

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{(x-y) \cdot \nu_y}{4\pi|x-y|^3} \sigma(y) dS_y. \quad (4.24)$$

Interpretación física. Los nombres de simple y doble capa provienen de las aplicaciones de estos operadores integrales en electromagnetismo. En efecto, (4.23) representa el potencial escalar electrostático que genera una carga superficial de densidad $\epsilon_0 \mu$ distribuida en la superficie Γ (ver Johnk[8], pág. 190). Además el potencial de doble capa puede considerarse como el límite, cuando el parámetro positivo h tiende a cero, de la superposición de dos potenciales de simple capa v_h y v_{-h} , con densidades $\epsilon_0 \sigma/(2h)$ y $-\epsilon_0 \sigma/(2h)$, respectivamente, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} (v_h + v_{-h}) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{1}{8\pi h} \left(\frac{\sigma(y + h\nu_y)}{|x - (y + h\nu_y)|} - \frac{\sigma(y - h\nu_y)}{|x - (y - h\nu_y)|} \right) dS_y = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(1/(|x-y|))}{\partial \nu_y} \sigma(y) dS_y$$

por lo que el potencial de doble capa puede considerarse como el potencial electrostático generado por un dipolo distribuido en Γ , (ver Kress[9], pág. 78, McOwen[10], pág. 114).

Teorema 4.4. En \mathbb{R}^3 si la densidad $\mu \in C(\Gamma)$, entonces el potencial de simple y doble capa son funciones armónicas en dominios acotados y no acotados que no tengan ningún punto en común con la frontera Γ . En \mathbb{R}^2 , el potencial de doble capa verifica lo anterior mientras que el potencial de simple capa sólo es una función armónica en dominios acotados que no tengan ningún punto en común con la frontera Γ .

Demostración. En dominios que no tengan ningún punto en común con la frontera, tanto el potencial de doble capa como el de simple capa verifican la ecuación de Laplace puesto que Φ y $\partial\Phi/\partial\nu_y$ verifican dicha ecuación y, debido a la regularidad de las funciones, podemos pasar las derivadas bajo el signo integral. Para $m = 3$, respecto al comportamiento asintótico del potencial de simple capa cuando $|x| \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta que $|x| > 2|y|$ para $|x|$ suficientemente grande

$$\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{2}{|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

entonces

$$|v(x)| \leq \int_{\Gamma} \Phi(x, y) |\mu(y)| \, dS_y \leq \frac{1}{2\pi|x|} \int_{\Gamma} |\mu(y)| \, dS_y = \frac{C}{|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

donde

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\mu(y)| \, dS_y.$$

Con respecto el potencial de doble capa en dos y tres dimensiones tenemos

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^m} |(x-y) \cdot \nu_y| |\sigma(y)| \, dS_y \leq \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^{m-1}} |\sigma(y)| \, dS_y \\ &= \frac{1}{\pi|x|^{m-1}} \int_{\Gamma} |\sigma(y)| \, dS_y = \frac{C}{|x|^{m-1}}, \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Nota 4.10. Con respecto al comportamiento asintótico del potencial de doble capa en dos y tres dimensiones espaciales, se ha demostrado una condición más fuerte que (4.3): el potencial de doble capa se comporta sintóticamente como

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Nota 4.11. Con respecto al comportamiento asintótico del potencial de simple capa en dos dimensiones espaciales, tenemos

$$|v(x)| \leq \int_{\Gamma} |\Phi(x, y)| |\mu(y)| \, dS_y \leq \frac{1}{2\pi} \left| \ln \frac{2}{|x|} \right| \int_{\Gamma} |\mu(y)| \, dS_y \leq C \ln |x|, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

4.5. Propiedades del potencial de simple capa.

Las demostraciones de las propiedades del potencial de simple y doble capa pueden consultarse, por ejemplo, en Kress[9] y Mikhlin[11].

Teorema 4.5. Sea Γ una frontera de clase \mathcal{C}^2 y $\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$. El potencial de simple capa

$$v(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu(y) \, dS_y \quad (4.27)$$

es una función continua en \mathbb{R}^m .

Si $x \notin \Gamma$ podemos calcular la derivada normal del potencial de simple capa en la dirección ν , simplemente derivando bajo el signo integral

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_x}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y) \mu(y) \, dS_y. \quad (4.28)$$

Cuando $x \in \Gamma$ se verifica la siguiente propiedad de salto que involucra al valor directo del potencial de simple capa.

Teorema 4.6. Sea Γ una frontera de clase \mathcal{C}^2 y $\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$, el potencial de simple capa verifica lo siguiente

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x, y) \mu(y) dS_y \mp \frac{1}{2} \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.29)$$

donde

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \boldsymbol{\nu}_x \cdot \nabla v(x \pm h \boldsymbol{\nu}_x), \quad (4.30)$$

uniformemente en Γ .

Nota 4.12. Como consecuencia inmediata del teorema anterior, se verifica la siguiente relación de salto

$$\frac{\partial v_-}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) - \frac{\partial v_+}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.31)$$

Nótese que en la expresión (4.29) la densidad μ aparece por primera vez fuera del signo integral.

4.6. Propiedades del potencial de doble capa.

Al contrario de lo que sucedía con el potencial de simple capa, el potencial de doble capa no es una función continua en \mathbb{R}^m , sino que verifica una relación de salto en Γ , como establece el siguiente teorema.

Teorema 4.7. Sea Γ una frontera de clase \mathcal{C}^2 y $\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$, el potencial de doble capa puede extenderse con continuidad de Ω^c a $\overline{\Omega^c}$ y de Ω a $\overline{\Omega}$ con los siguientes valores límites

$$w_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) \sigma(y) dS_y \pm \frac{1}{2} \sigma(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.32)$$

donde

$$w_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} w(x \pm h \boldsymbol{\nu}_x). \quad (4.33)$$

uniformemente en Γ . Además, se verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \boldsymbol{\nu}_x \cdot \{ \nabla w(x + h \boldsymbol{\nu}_x) - \nabla w(x - h \boldsymbol{\nu}_x) \} = 0, \quad x \in \Gamma \quad (4.34)$$

uniformemente en Γ .

Nota 4.13. Como consecuencia inmediata del teorema anterior, se verifica la siguiente relación de salto para el potencial de doble capa

$$w_-(x) - w_+(x) = -\sigma(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.35)$$

Ejemplo 4.2. El potencial de doble capa con densidad constante e igual a uno se denomina integral de Gauss. Verifica lo siguiente

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) dS_y = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \Omega, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \in \Gamma, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^c. \end{cases} \quad (4.36)$$

Si $x \in \Omega$, empleando la representación integral de $u(x) = 1$, (ver (4.15)),

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) u(y) dS_y + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(y) dS_y. \quad (4.37)$$

Dado que

$$\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(y) dS_y = 0, \quad (4.38)$$

entonces,

$$-1 = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) dS_y. \quad (4.39)$$

Si $x \in \Omega^c$, $\Phi(x, \cdot)$ es armónica en Ω y utilizando (4.17) tenemos

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) dS_y = 0, \quad (4.40)$$

por tanto, w es cero en Ω^c y, en virtud del teorema anterior, puede extenderse con continuidad a Γ , esto es

$$w_+(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) dS_y + \frac{1}{2} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.41)$$

pues $w_+(x) = 0$ para $x \in \Gamma$.

4.7. Teoría del potencial aplicada a la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^3 .

Nos planteamos en esta sección el estudio de cuatro problemas de contorno asociados a la ecuación de Laplace en dimensión tres; la técnica es análoga para el caso bidimensional, ver Mikhlin[11].

- *Problema Dirichlet interior (Di)*. Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que es armónica en Ω y, además,

$$u(x) = f(x) \text{ sobre } \Gamma, \quad (4.42)$$

siendo f una función continua dada.

- *Problema Dirichlet exterior (De)*. Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^c) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega^c})$ tal que es armónica en Ω^c y, además,

$$u(x) = f(x) \text{ sobre } \Gamma, \quad (4.43)$$

siendo f una función continua dada.

- *Problema Neumann interior (Ni)*. Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que es armónica en Ω y, además,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \text{ sobre } \Gamma, \quad (4.44)$$

en el sentido de

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \nu \cdot \nabla u(x - h\nu) = g(x), \quad (4.45)$$

uniformemente en Γ , siendo g una función continua dada.

- *Problema Neumann exterior (Ne)*. Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^c) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega^c})$ tal que es armónica en Ω^c y además

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \text{ sobre } \Gamma, \quad (4.46)$$

en el sentido de

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \nu \cdot \nabla u(x + h\nu) = g(x), \quad (4.47)$$

uniformemente en Γ , siendo g una función continua dada.

Los problemas anteriores se resuelven buscando una solución en forma de potencial; para los Dirichlet se utiliza el potencial de doble capa,

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \sigma(y) dS_y, \quad (4.48)$$

mientras que para los problemas Neumann el potencial de simple capa,

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu(y) dS_y = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \mu(y) dS_y. \quad (4.49)$$

Construyendo las soluciones de esta manera, como consecuencia de las propiedades de los potenciales de simple y doble capa, obtenemos funciones armónicas en Ω y Ω^c . Solamente falta garantizar que se

verifiquen las condiciones de contorno de cada problema, lo cual se consigue utilizando la función densidad adecuada. La idea es la siguiente:

Si u dada por (4.48) es solución del problema Dirichlet interior (Di) entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = f(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \quad (4.50)$$

Utilizando (4.32) tenemos

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \sigma(y) dS_y - \frac{\sigma(x_0)}{2} = u_-(x_0) = f(x_0). \quad (4.51)$$

Luego, la ecuación integral que debe satisfacer la función densidad σ es

$$\sigma(x_0) - 2 \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \sigma(y) dS_y = -2 f(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \quad (4.52)$$

Si u dada por (4.49) es solución del problema Neumann exterior (Ne) entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = g(x_0), \quad x_0 \in \Gamma.$$

Utilizando (4.29) tenemos

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mu(y) dS_y - \frac{\mu(x_0)}{2} = g(x_0). \quad (4.53)$$

Luego, la ecuación integral que debe satisfacer la función densidad μ es

$$\mu(x_0) - 2 \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mu(y) dS_y = -2 g(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \quad (4.54)$$

De forma análoga obtenemos las ecuaciones integrales para los problemas (De) y (Ni) de modo que las llamadas *cuatro ecuaciones integrales de la teoría del potencial* son:

Problema	Ecuación integral
Dirichlet interior (Di)	$\sigma(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y = -2 f(x), \quad x \in \Gamma.$
Dirichlet exterior (De)	$\sigma(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y = 2 f(x), \quad x \in \Gamma.$
Neumann interior (Ni)	$\mu(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y) \mu(y) dS_y = 2 g(x), \quad x \in \Gamma.$
Neumann exterior (Ne)	$\mu(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y) \mu(y) dS_y = -2 g(x), \quad x \in \Gamma.$

Por otro lado, si definimos los operadores integrales K y \tilde{K} como

$$K\sigma = 2 \int_{\Gamma} k(x, y) \sigma(y) dS_y, \quad (4.55)$$

con

$$k(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y), \quad (4.56)$$

y por otro lado

$$\tilde{K}\sigma = 2 \int_{\Gamma} \tilde{k}(x, y) \sigma(y) dS_y, \quad (4.57)$$

con

$$\tilde{k}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y), \quad (4.58)$$

entonces, dado que los núcleos son débilmente singulares, los operadores son compactos. Como además los operadores son adjuntos (ver sección 1.3.7), las correspondientes ecuaciones integrales (Di)-(Ne) y (De)-(Ni) son adjuntas dos a dos. Utilizando estos operadores las ecuaciones integrales anteriores se escriben

Problema	Ecuación integral
Dirichlet interior (Di)	$\sigma - K\sigma = -2f$, en Γ .
Dirichlet exterior (De)	$\sigma + K\sigma = 2f$, en Γ .
Neumann interior (Ni)	$\mu + \tilde{K}\mu = 2g$, en Γ .
Neumann exterior (Ne)	$\mu - \tilde{K}\mu = -2g$, en Γ .

Nota 4.14. Pueden consultarse en Mikhlin[11] o Kress[9], por ejemplo, los siguientes resultados relativos a la unicidad de los problemas antes señalados:

- a. El problema Dirichlet interior y exterior, en los casos bi y tridimensional, tiene a lo sumo una solución.
- b. Dos soluciones del problema Neumann interior pueden diferenciarse sólo en una constante.
- c. El problema Neumann exterior, en el caso tridimensional, tiene a lo sumo una solución.

Teorema 4.8. Existe solución única en $\mathcal{C}(\Gamma)$ de las ecuaciones integrales asociadas a los problemas (Di) y (Ne) para todo dato $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, respectivamente.

Demostración. Consideramos el primer par de ecuaciones integrales asociadas a los problemas (Di)-(Ne). Supongamos que $\sigma_0(x)$ es solución de la ecuación adjunta homogénea de (Ne) en $\mathcal{C}(\Gamma)$,

$$\sigma_0(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma_0(y) dS_y = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (4.59)$$

Construimos el potencial de doble capa de densidad σ_0 ,

$$w_0(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma_0(y) dS_y. \quad (4.60)$$

Utilizando las propiedades de salto del potencial de doble capa (4.32) obtenemos

$$w_{0,-}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma_0(y) dS_y - \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.61)$$

dado que σ_0 es solución de (4.59). Por consiguiente, w_0 es solución del problema de Dirichlet siguiente

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = 0 & \text{en } \Omega, \\ w_{0,-} = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.62)$$

La unicidad de solución del problema de Dirichlet en Ω permite afirmar que $w_0 = 0$ en Ω , por tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \boldsymbol{\nu}_x \cdot \{\nabla w_0(x - h\boldsymbol{\nu}_x)\} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

De (4.34) se deduce que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \boldsymbol{\nu}_x \cdot \{\nabla w_0(x + h\boldsymbol{\nu}_x)\} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Por lo tanto, w_0 es solución del problema de Neumann,

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = 0 & \text{en } \Omega^c, \\ \frac{\partial w_{0,+}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ w_0 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), & |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.63)$$

por la unicidad de solución del problema de Neumann exterior se concluye que $w_0 = 0$ en Ω^c y, utilizando las propiedades de salto del potencial de doble capa

$$\sigma_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (4.64)$$

Como consecuencia, las ecuaciones integrales adjuntas sólo tienen la solución trivial, esto es,

$$\dim \ker(I - K) = \dim \ker(I - \tilde{K}) = 0. \quad (4.65)$$

Por el teorema de la alternativa de Fredholm, obtenemos el resultado. \square

Corolario 4.1. *El problema (Di) tiene solución única dada por*

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) \sigma(y) dS_y, \quad (4.66)$$

siendo σ la solución única de la ecuación integral

$$\sigma(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) \sigma(y) dS_y = -2f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.67)$$

Corolario 4.2. *El problema (Ne) tiene solución única dada por*

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu(y) dS_y, \quad (4.68)$$

siendo μ la solución única de la ecuación integral

$$\mu(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x, y) \mu(y) dS_y = -2g(x); \quad x \in \Gamma. \quad (4.69)$$

Teorema 4.9. *Se verifica que*

$$\ker(I + K) = \langle \{1\} \rangle, \quad \ker(I + \tilde{K}) = \langle \{\mu_0\} \rangle, \quad (4.70)$$

donde $\mu_0 \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es solución de la ecuación integral homogénea

$$\mu(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x, y) \mu(y) dS_y = 0. \quad (4.71)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la integral de Gauss (4.36),

$$1 + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x, y) dS_y = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.72)$$

por tanto $\sigma = 1$ es solución de la ecuación integral homogénea correspondiente a (De). En consecuencia,

$$\dim \ker(I + K) = \dim \ker(I + \tilde{K}) \geq 1. \quad (4.73)$$

Luego la ecuación integral adjunta homogénea tiene al menos una solución no trivial en $\mathcal{C}(\Gamma)$, que llamamos $\mu_0(x)$. Dicha función satisface la ecuación

$$\mu_0(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x, y) \mu_0(y) dS_y = 0. \quad (4.74)$$

Se demuestra a continuación que $\dim \ker(I + K) = \dim \ker(I + \tilde{K}) = 1$. En efecto, basta demostrar que no hay soluciones de (4.74) independientes de μ_0 . El potencial de simple capa de densidad μ_0

$$v_0(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu_0(y) dS_y, \quad (4.75)$$

verifica

$$\frac{\partial v_{0,-}}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x, y) \mu_0(y) dS_y + \frac{\mu_0(x)}{2} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.76)$$

dado que es solución de (4.74). Por consiguiente v_0 solución del siguiente problema de Neumann en Ω

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial v_{0,-}}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.77)$$

Teniendo en cuenta que la solución del problema de Neumann anterior es única salvo constantes deducimos

$$v_0(x) = C_0, \quad x \in \Omega. \quad (4.78)$$

Vamos a probar que la constante C_0 es distinta de cero procediendo por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que $v_0(x) = 0$ en Ω . Dado que el potencial de simple capa es una función continua en \mathbb{R}^3 , verifica $v_0(x) = 0$ en Γ y, por tanto, es solución del siguiente problema de Dirichlet en Ω^c

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = 0 & \text{en } \Omega^c, \\ v_0(x) = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.79)$$

Debido a la unicidad de solución del problema anterior, deducimos que $v_0(x) = 0$ en Ω^c . En consecuencia $v_0(x) = 0$ en \mathbb{R}^3 y, además,

$$\frac{\partial v_{0,\pm}}{\partial \boldsymbol{\nu}_x}(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (4.80)$$

Teniendo en cuenta la relación de salto de la derivada normal del potencial de simple capa deducimos que $\mu_0(x) = 0$ para todo $x \in \Gamma$, lo que es una contradicción pues $\mu_0(x)$ es distinto de cero. Nótese que hemos demostrado que si $v_0(x) = 0$ en Ω entonces $\mu_0(x) = 0$ sobre Γ .

Análogamente, si $\mu_1(x)$ es otra solución no trivial de la ecuación integral adjunta homogénea (4.74), deducimos que su potencial de simple capa asociado

$$v_1(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \mu_1(y) dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (4.81)$$

es igual a una constante C_1 no nula en Ω ; luego la densidad

$$\mu_2(x) = C_1 \mu_0(x) - C_0 \mu_1(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.82)$$

es otra solución de la ecuación integral (4.74). De nuevo construimos su potencial de simple capa asociado, v_2 , que es igual a la siguiente combinación lineal de los anteriores

$$v_2(x) = C_1 v_0(x) - C_0 v_1(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.83)$$

lo que implica que $\mu_2(x) = 0$ sobre Γ y, por tanto,

$$\mu_1(x) = \frac{C_1}{C_0} \mu_0(x). \quad (4.84)$$

Por consiguiente, cualquier solución $\mu_1(x)$ de la ecuación integral homogénea es una combinación lineal de la solución no trivial $\mu_0(x)$. \square

Corolario 4.3. *La ecuación integral no homogénea correspondiente al problema (Ni)*

$$\mu(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x, y) \mu(y) dS_y = 2g(x), \quad x \in \Gamma,$$

tiene solución si y sólo si

$$\int_{\Gamma} g(x) dS = 0.$$

La ecuación integral no homogénea correspondiente al problema (De)

$$\sigma(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) \sigma(y) dS_y = 2f(x), \quad x \in \Gamma,$$

tiene solución si y sólo si

$$\int_{\Gamma} f(x) \mu_0(x) dS = 0,$$

donde $\mu_0 \in \mathcal{C}(\Gamma)$ es la solución de la ecuación integral homogénea (4.71).

Demostración. Aplicando el teorema de la alternativa, la ecuación integral no homogénea correspondiente al problema (Ni) tiene solución si y sólo si

$$\langle 2g, 1 \rangle = 0,$$

equivalentemente,

$$\int_{\Gamma} g(x) dS = 0.$$

De la misma forma, la ecuación integral no homogénea correspondiente al problema (De) tiene solución si y sólo si

$$\langle 2f, \mu_0 \rangle = 0,$$

equivalentemente,

$$\int_{\Gamma} f(x) \mu_0(x) dS = 0.$$

\square

Nota 4.15. *Si no se verifica la condición*

$$\int_{\Gamma} f(x) \mu_0(x) dS = 0,$$

la ecuación integral correspondiente no tiene solución, lo cual indica que la solución del problema (De) no se puede representar en forma de potencial de doble capa. Para superar esta dificultad, se define el potencial conocido como potencial de doble capa modificado, de modo que la solución del problema Dirichlet exterior se expresa de la forma (ver Kress[9], pág. 84),

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x, y) + \frac{1}{|x|} \right\} \sigma(y) dS_y.$$

Referencias

- [1] O. Besson, J. Bourgeois, P.A. Chevalier, J. Rappaz, and R. Touzani, *Numerical modelling of electromagnetic casting processes*, *Journal of Computational Physics*, **92** (1991) 482–507.
- [2] BRÉZIS, HAÏM. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] COLTON, DAVID ; KRESS, RAINER. *Integral equation methods in scattering theory*. Krieger Publishing Company. Florida, 1992.
- [4] DAUTRAY, ROBERT; LIONS, JACQUES-LOUIS. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Vol. 1. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] EVANS, LAWRENCE CRAIG. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [6] HACKBUSCH, WOLFGANG. *Integral equations. Theory and numerical treatment*. Traducido y revisado por el autor del original alemán de 1989. International Series of Numerical Mathematics, 120. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [7] INCROPERA, F.P. Y DEWITT, D. P. *Fundamentos de transferencia de calor*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1999.
- [8] JOHNK C.T.A. *Engineering electromagnetic Fields and waves*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [9] KRESS, RAINER. *Linear integral equations*. Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] MCOWEN, R.C.. *Partial differential equations. Methods and applications*. Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
- [11] MIKHLIN, SOLOMON G. *Mathematical physics, an advanced course*. Traducido del original ruso. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 11. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1970.
- [12] NÉDÉLEC, J-C. *Acoustic and electromagnetic equations*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [13] PIPKIN, A.C. *A course on integral equations*. Springer-Verlag, New York, 1991.