

8. MODELADO MATEMÁTICO E SIMULACIÓN NUMÉRICA

Andrés Prieto Aneiros*
Elena Vázquez Cendón**

1. INTRODUCCIÓN

A sesión de ESTALMAT-Pi dedicada ao modelado matemático e á simulación numérica está principalmente enfocada de forma global coma ponte entre as matemáticas e a realidade cotiá dos rapaces que acoden ás sesións (xa sexa tomando como pretexto aqueles sucesos que poden ver nas novas na televisión ou nos xornais, ou ben empregando aqueloutras experiencias ás queteñen acceso na súa rutina escolar diaria). Con este obxectivo, o traballo realizado na aula divídese en dúas sesións que, á súa vez, se dividen en dúas partes de 90 minutos.

A primeira parte céntrase na análise do que se entende por simulación numérica e abóndanse diferentes modelos cos que exemplificar a pertinencia e relevancia da simulación numérica en problemas reais da enxeñaría e das ciencias aplicadas. Esta primeira parte péchase coa revisión dun caso de estudo no que se involucra o modelado e a simulación numérica dun problema de propagación de ruído e vibracións nun autobús (ambiente moi familiar para gran parte dos rapaces asistentes á sesión). A segunda parte da primeira sesión dedícase á introdución de maneira moi preliminar das leis básicas que rexen a mecánica de fluídos mediante as leis de conservación (tanto da masa como doutras cantidades que poidan ser de interese físico: momento lineal, enerxía, etc.). Como exemplos deste tipo de traballo de modelado e simulación preséntanse o estudo das correntes de auga nunha escada de peixes construída sobre unha presa e o fluxo do sangue a través das arterias.

A segunda sesión divídese tamén en dúas partes de 90 minutos. A primeira parte enfócase na simulación numérica do fluxo do tráfico urbano, botando man das leis de conservación da mecánica de fluídos, coas que xa se traballou na sesión anterior. Isto permite resaltar a capacidade de abstracción do modelado matemático, onde un mesmo tipo de conxunto de ecuacións poden ser usado en contextos físicos completamente diferentes (relacionando o fluxo do sangue co fluxo do tráfico). Na segunda parte desta sesión, séguese a traballar con esta idea da transversalidade dos modelos matemáticos, que poden ser aplicados a diferentes realidades. Neste caso, empréganse as figuras de Lissajous para exemplificar como un obxecto xeométrico coma este (curvas paramétricas no plano) se pode empregar para describir tanto o percorrido dun péndulo de ángulo dobre como os fenómenos ópticos de interferencia ou a descrición dun circuíto eléctrico en serie. No que segue, preséntase unha descrición detallada do pautado dos contidos de cada unha das partes nas que se dividen estas dúas sesións.

* Departamento de Matemáticas. Universidade da Coruña.

** Departamento de Matemática Aplicada. Universidade de Santiago de Compostela

2. QUE É A SIMULACIÓN NUMÉRICA? SIGNIFICADO E EXEMPLOS

Nesta primeira parte, trabállase cos rapaces o concepto de simulación numérica como tal. Posto que para a maior parte deles esta é a primeira vez na que se enfrontan a darlle significado ao que se entende por simulación numérica, analízase en grupo o que se entende por *simulación* nunha conversa informal. Despois de descartar os significados máis negativos (como os de ‘falsear’, ‘faltar á realidade’, etc.), chégase á conclusión de que simular non é máis que reproducir un acontecemento ou un fenómeno que non se está a producir na realidade (tal e como se recolle no Dicionario da Real Academia Galega, *simular* é «facer que [unha cousa] pareza que é real cando non o é ou non existe»). Xustamente a partir desta análise, trátase de recuperar o sentido da simulación ao emparellar este nome co adxectivo *numérico*. O carácter matemático e computacional que lle proporciona este apelido, indicativo de estar relacionado cos números, converte a simulación numérica nunha ferramenta básica e esencial para a reprodución de fenómenos físicos complexos, que ben por perigosos ou por custosos non son posibles de realizar de forma segura e sistemática na vida real.

2.1 ETAPAS DA SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para ter unha visión global de todo o traballo que require unha simulación numérica, emprégase un diagrama de frechas (véxase a Figura 1), onde o proceso da simulación numérica se divide en tres etapas: na primeira etapa extráense do problema real aquelas variables que son relevantes no fenómeno físico a estudar e establécense as leis matemáticas (por medio de ecuacións alxébricas ou involucrando derivadas ordinarias ou parciais) que gobernan as variables de interese. Esta etapa de modelado do problema real dá como froito o enunciado dun problema matemático teórico que habitualmente, debido á complexidade do problema abordado, non é posible resolver de forma analítica.

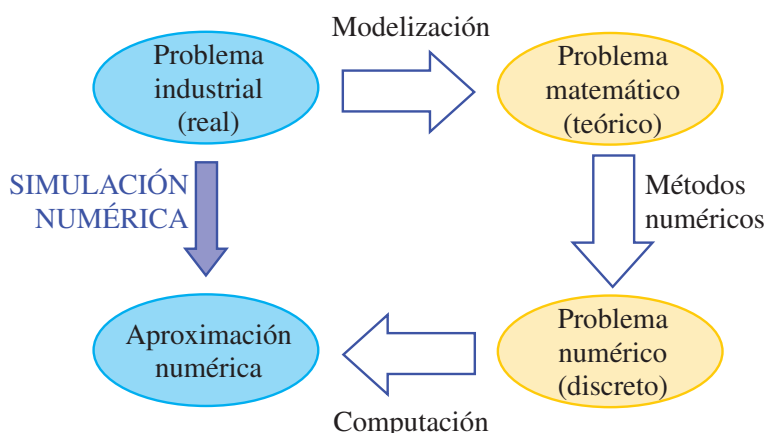


Figura 1. Diagrama de tarefas nas que se divide o traballo a realizar nunha simulación numérica: modelado do problema real para obter o problema teórico, discretización mediante métodos numéricos e cálculo da solución aproximada mediante o uso de computadoras.

Na segunda etapa, este problema teórico discretízase mediante métodos numéricos adecuados, cos que as variables de interese do modelo matemático tratan de aproximarse mediante un conxunto de valores numéricos discretos. Este proceso de aproximación dá lugar á necesidade de resolver grandes sistemas de ecuacións (onde é frecuente que se traten sistemas con millóns de incógnitas). Evidentemente, este problema numérico froito da segunda etapa da simulación numérica non se pode resolver con lapis e papel (tal e como se faría con sistemas lineais de dúas ecuacións e dúas incógnitas). A terceira etapa da simulación numérica enfrontáase xa que logo coa necesidade de implementar sobre computadoras os algoritmos capaces de resolver estes grandes sistemas de ecuacións, xa sexan en pequenos ordenadores de sobremesa ou en grandes servidores de cálculo de altas prestacións, como os que están dispoñibles no Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA). Como resultado final destas tres etapas, obtense unha solución aproximada do modelo matemático usado para reproducir o comportamento das variables físicas de interese do problema real.

2.2 EXEMPLOS

Para ilustrar a relevancia da simulación numérica en diferentes contextos da vida real e ilustrar as dificultades que xa posúe en si mesma a primeira etapa da simulación numérica, na que se deduce o problema matemático teórico que rexe as variables físicas de interese, trabállase cos rapaces a pertinencia da selección correcta de certas variables e parámetros físicos relevantes no estudo de diferentes problemas reais:

- **Tsunamis:** a súa simulación numérica resulta de vital importancia na alerta temperá no caso de terremotos submarinos e no despregamento de plans de evacuación da poboación das zonas costeiras (véxase por exemplo o vídeo dispoñible na rede <https://youtu.be/KUDr4ZruBiw>). Posibles propiedades físicas relevantes poderían ser a velocidade das ondas, a súa elevación, as propiedades físicas da auga (densidade de masa, por exemplo), a batimetría da costa, etc.
- **Aerodinámica dun vehículo:** a optimización de forma das xeometrías que conforman o exterior dun vehículo (dun automóbil, dunha aeronave, etc.) é esencial no seu rendemento enerxético e na eficiencia do consumo de combustible (e de ser o caso de participar en competicións deportivas, terá un impacto nos resultados obtidos). O tipo de simulacións numéricas que se realizan na actualidade mediante técnicas computacionais de mecánica de fluídos pode ilustrarse cunha gran variedade de vídeos dispoñibles na rede (por exemplo <https://youtu.be/S6voYvRtnfc>). As características físicas máis importantes na análise deste tipo de problemas son a densidade de masa e a viscosidade do fluído que rodea o vehículo, a velocidade coa que se propaga o fluxo do fluído arredor do vehículo, as propiedades estruturais do vehículo, etc.
- **Desprendementos de terra:** a predición de posibles eventos adversos, como é o caso de desprendementos de terra nas marxes dun encoro, poden resultar esenciais na prevención de catástrofes e no deseño de plans de emerxencia. Este tipo de si-

mulacións numéricas, nas que se toman como variables fundamentais a altura da columna de auga do encoro e a velocidade do fluxo de auga (véxase por exemplo <https://youtu.be/nSdpJREtY6M>), dependen evidentemente das propiedades físicas da auga (medio fluído contido no encoro), da xeometría (batimetría) do fondo do encoro e das súas marxes.

- **Furacáns:** estoutro tipo de fenómenos meteorolóxicos adversos representa outro exemplo máis da utilidade da simulación numérica na vida cotián, onde se usan modelos matemáticos que se resolven mediante métodos numéricos. Esta combinación permite unha predición precisa do tempo. Por exemplo, no vídeo <https://youtu.be/p-3aB9hJ8Hc> amósase unha comparativa entre a predición numérica calculada e a realidade observada vía satélite do furacán Katrina, cando bateu contra as costas do norte de América en 2015. Esta comparativa permite ilustrar a precisión deste tipo de metodoloxías na simulación numérica. Evidentemente, no caso dos furacáns, as variables máis importantes a calcular son a velocidade do vento, a temperatura, a presión atmosférica ou a cantidade de auga precipitada. Os parámetros físicos dos que depende o modelo son moi variados: tanto a orografía do chan ou as propiedades físicas das distintas capas da atmosfera como as condicións iniciais nas que se orixina o furacán, etc.
- **Voo dun colibrí:** do mesmo xeito no que a simulación numérica serve para reproducir o comportamento físico de problemas enunciados a grande escala, tamén esta pode empregarse en problemas de pequena escala que involucren seres vivos (véxase por exemplo <https://youtu.be/c3-Uspogtrc>, onde unha simulación numérica se emprega para obter información cualitativa das turbulencias arredor das ás dun colibrí en pleno voo). Este tipo de simulacións axudan a comprender mellor os mecanismos biolóxicos que permiten o voo eficiente dos paxaros. As variables físicas a aproximar mediante a simulación numérica son as mesmas que no caso do problema aerodinámico dun vehículo, xa que esencialmente as ecuacións (en derivadas parciais) que gobernan o fluxo dun fluído viscoso arredor dun obxecto son as mesmas nos dous casos.
- **Refrixeración de ordenadores:** o mesmo tipo de modelos matemáticos que se usan na predición dos furacáns tamén poden empregarse para problemas de escala moito máis reducida, neste caso para reproducir os fenómenos térmicos relacionados coa mecánica de fluídos nun sistema de refrixeración arredor dun ventilador (véxase por exemplo <https://youtu.be/XxoenSujLSY>, onde se simula numericamente tanto a temperatura como o campo de velocidades do fluxo de aire que produce o ventilador de refrixeración na unidade de alimentación dun ordenador de sobremesa). Neste problema, os parámetros físicos tanto do fluído (densidade de masa, viscosidade dinámica, etc.) como a xeometría do sistema de refrixeración, a temperatura nominal de traballo do sistema ou a velocidade angular do ventilador son indispensables para calcular a velocidade de fluxo e a temperatura do aire no interior da carcasa do ordenador.

- **Choque de vehículos:** o deseño de calquera vehículo require un estudo da seguridade dos seus ocupantes no caso dun accidente. Este tipo de análises ou ben pódense facer mediante procedementos experimentais custosos (onde se farían chocar dous vehículos entre si ou contra estruturas fixas) ou ben mediante procedementos de simulación numérica moito menos custosos. Por exemplo, no vídeo <https://youtu.be/hrfcROMz2II> pódese apreciar como grazas á simulación numérica é posible estudar en detalle a deformación de cada unha das partes dun automóbil ao longo dun choque frontal. Os parámetros físicos involucrados neste tipo de problemas veñen dados polas propiedades mecánicas do chasis e a carrocería dos vehículos (dependentes tanto da súa xeometría como dos materiais que a forman). As variables físicas de interese neste caso son os desprazamentos que sofre cada parte da estrutura, así como a tensión e o gradiente de deformación producidos no choque.
- **Pontes colgantes:** a mesma clase de cálculos estruturais usados no exemplo anterior (que involucran ecuacións en derivadas parciais semellantes) tamén é empregada no estudo da flexión de estruturas arquitectónicas, como pode ser o caso de pontes, guindastres de carga, torres ou vigas en grandes edificios. Por exemplo, en <https://youtu.be/QELI1e7RbXQ> analízanse as tensións e as deformacións ás que se ve sometido o sistema de cables dunha ponte colgante cando actúan certas cargas sobre a súa plataforma. Este tipo de simulacións numéricas requiren coñecer como parámetros as características elásticas dos materiais cos que se constrúe a ponte e a súa configuración xeométrica. Ao igual que no caso anterior, tanto os desprazamentos como as tensións sufridas pola ponte son as variables incógnita de interese.

2.3 PERSOAS REFERENTES

Nesta primeira parte, despois de introducir conceptos e exemplos da simulación, considérase igualmente valioso compartir persoas referentes no contexto da simulación numérica. É unha oportunidade para proxectar a cara máis descoñecida das persoas comprometidas coas matemáticas aplicadas ao seu contorno, para compen-sar o estereotipo de persoas illadas que só resolven problemas ou fan contas.

Esta parte da sesión comeza achegando a figura de Rózsa Péter (1905-1977), unha doutora en matemáticas húngara, que ademais de facer achegas ás matemáticas moi salientables na súa época e crear escola, tamén asumiu o reto da divulgación. No libro *Xogando co infinito* [1], mencionaba que: «Non se trata de servir unha pílula amarga nun prato doce (xa que para a maioría da xente as matemáticas son unha lembranza amarga). Quero transmitir a sensación das Matemáticas». O obxectivo desta sesión é seguir a mestra e transmitir tamén as sensacións das matemáticas.

Esta científica ten unha dobre conexión con esta sesión e co proxecto ESTALMAT-Galicia. Xa que pola súa condición de muller e xudía non lle permitiron inicialmente

dar clase na Universidade, por iniciativa propia organizou na súa casa unha pasantía para nenos e nenas con talento matemático, un «estalmat á húngara», se a licencia se permite. Entre os seus estudantes estaba Peter Lax (1926), premio Abel no 2005 «polas súas rompedoras contribucións á teoría das ecuacións en derivadas parciais e a computación das súas solucións». Este feito fai que Peter Lax resulte asemade un referente a compartir no contexto desta sesión. As palabras que Peter Lax lle adicou á súa mestra retrátaos conxuntamente: «It was my great good fortune to be one of her students, from age 13 to 15; she introduced me to many topics of mathematical research». En Galicia, tívose a oportunidade de coñecelo de preto grazas ao programa ConCiencia, cando visitou Santiago de Compostela en 2008 (o relatorio pronunciado polo profesor Peter Lax nesa ocasión está dispoñible en <http://tv.usc.es/serial/index/id/114>).

Outra persoa de referencia na temática da sesión é Jacques-Louis Lions (1928-2001), doutor honoris causa pola Universidade de Santiago de Compostela no ano 1989 (o acto de investidura está dispoñible en <http://tv.usc.es/serial/index/id/333>), e autor do libro de divulgación *El planeta Tierra. El papel de las matemáticas y los superordenadores* [2], publicado no ano 1990. Neste libro e en toda a súa obra está presente a súa referenciada *triloxía universal: modelado, análise e control*, que conecta as matemáticas, aplicadas á resolución de problemas de grande interese medioambiental, coas prestacións dos supercomputadores de hai vinte anos.

Aínda que os referentes mencionados son valiosos e permítennos transmitir valores de innovación, cidadanía e igualdade, os tres desenvolveron a súa traxectoria profesional no estranxeiro. Do mesmo xeito, na sesión tamén se pretende aprender a transmitir admiración polas persoas que fixeron apostas científicas emprendedoras na nosa contorna. Con esta motivación, preséntase tamén a Domingo Fontán (1788-1866), matemático e xeógrafo galego. No 2017 conmemóranse os 200 anos do inicio dos estudos que deron lugar á coñecida Carta Xeométrica de Galicia. Fontán investiu case vinte anos da súa vida en facer as medicións que tiñan como finalidade establecer un plan de comunicacións para Galicia. Polo obxectivo desta sesión de ESTALMAT-Pi, Domingo Fontán é unha das persoas referentes. As diferentes efemérides que se están a organizar arredor da súa obra fano protagonista de diferentes libros e documentos recentes. De feito, este relevante persoeiro xa fora mencionado por Cunqueiro en numerosos escritos, e por Castelao en *Sempre en Galiza*. Os seus restos repousan no Panteón de Galegos Ilustres. Débese salientar a biografía feita por Margarita Barral, que figura no Álbum da ciencia do Consello da Cultura Galega, dispoñible en <http://culturagalega.gal/albumdaciencia/detalle.php?id=318> co título «O home que puxo a Galicia no mapa».

2.3 AS MATEMÁTICAS DA AUGA

Nesta parte da sesión de ESTALMAT-Pi, as matemáticas da auga vanse introducir dende a implicación de investigadores galegos resolvendo problemas locais. No

ano 1986 o profesor Alfredo Bermúdez de Castro (que impartiu esta sesión de ESTALMAT-Pi nas cinco primeiras edicións) respondeu positivamente á demanda da Consellería de Ordenación do Territorio e Obras Públicas (COTOP) da Xunta de Galicia para estudar a localización de emisarios submarinos na costa galega, levando á práctica a *triloxía universal* do profesor Lions. O punto de vista matemático do problema era obter os campos de velocidades e os calados resolvendo as ecuacións bidimensionais das augas pouco profundas, para aplicar posteriormente un modelo matemático para calcular a evolución do osíxeno disolvido e a demanda biolóxica de osíxeno, e finalmente formular e resolver problemas de control óptimo con restricións.

A estratexia para achar a solución e acadar a transferencia de coñecemento matemático a este ámbito das ciencias medioambientais veu motivada pola inexistencia, no ano 1986, de paquetes comerciais acreditados para resolver este tipo de problemas, polo que a meta marcada foi desenvolver códigos de ordenados propios. Dende o punto de vista da simulación numérica aplicáronse os métodos de elementos finitos e volumes finitos. Na sesión amósanse algúns dos resultados numéricos obtidos coa metodoloxía de volumes finitos no contexto de varios proxectos levados a cabo en colaboración cos profesores Jerónimo Puertas e Luis Cea da Universidade da Coruña. A materialización da transferencia do coñecemento correspondente concretouse no rexistro do Código TURBILLON no ano 2005, e co desenvolvemento do proxecto Iber, ao que se sumaron colaboradores en Barcelona e Madrid dos ámbitos da enxeñaría e das matemáticas. O código, os manuais e o material de apoio deste programa de ordenador están dispoñibles na Aula IBER <http://www.iberaula.es>.

Na sesión detállanse exemplos de aplicacións das ecuacións das augas pouco profundas na ría de Pontevedra e no esteiro do Crouch no Reino Unido (con colaboradores do ámbito da xeografía pertencentes á *Royal University of London*), como os que se ilustran na Figura 2.

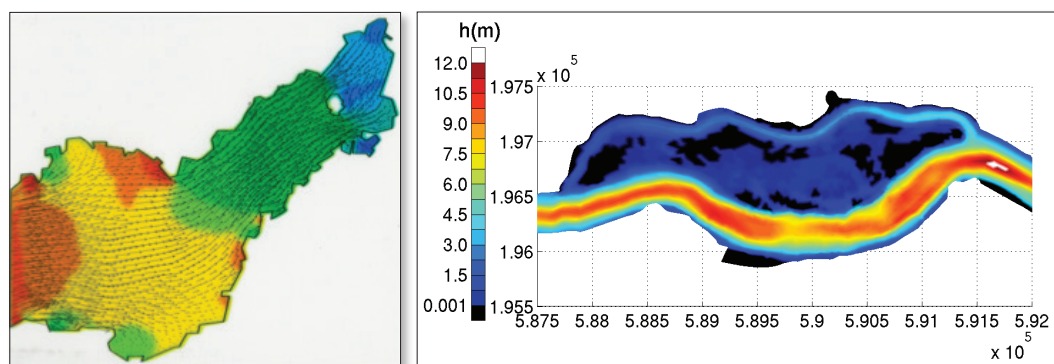


Figura 2. Resultados da propagación da media marea entrante na ría de Pontevedra (esquerda) e calado no esteiro do Crouch (dereita).

Estes resultados tamén se contrastaron cos resultados obtidos a partir de datos experimentais, e tiráronse resultados moi positivos das correspondentes comparacións. Asemade, para amosar o concepto da turbulencia na auga, na sesión preséntanse modelos sobre escalas de peixes (ver Figura 3) coa proxección do vídeo da escala de peixes no lugar de Chelo, no río Mandeo, onde a colaboración coa bioloxía é salientable.

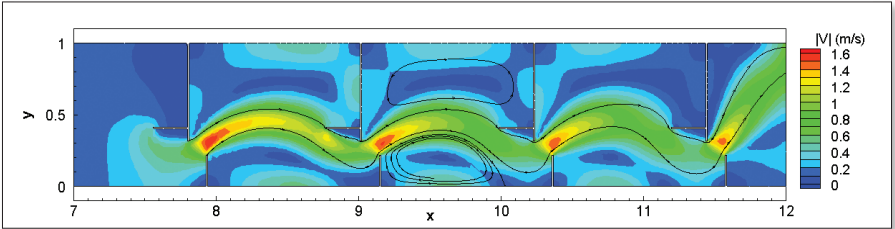


Figura 3. Saída gráfica do módulo das velocidades nunha escala de peixes.

Incidindo na opción que nos brindan as matemáticas de exportar os métodos desenvolvidos a outras rexións, preséntanse estudos de inundacións elaborados con colaboradores de Villahermosa en Tabasco, México [3]. Nas Figuras 4 e 5 amósanse os resultados en diferentes momentos da simulación. O modelo iníciase asumindo que non hai auga, e pode apreciarse como a partir dos datos de caudais nas entradas dos ríos, a auga se canaliza seguindo o trazado dos mesmos. A Figura 4 representa un escenario onde non hai zonas anegadas, e a Figura 5 amosa as zonas anegadas nos escenarios do 30 e 31 de outubro de 2007.

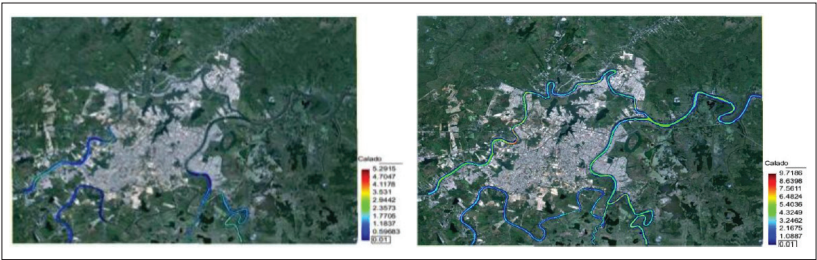


Figura 4. Saída gráfica do Iber da simulación de Villahermosa no escenario do 1 de outubro de 2007, antes das inundacións. Vista global ás 5 horas (esquerda) e ás 48 horas (dereita).

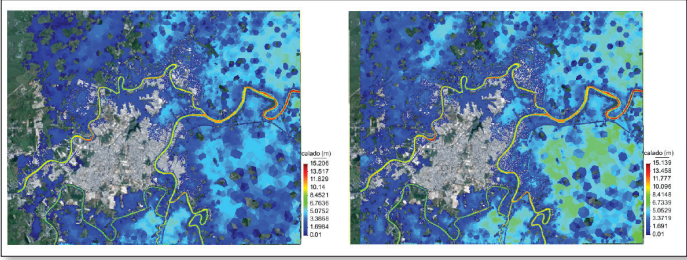


Figura 5. Saída gráfica do Iber da simulación de Villahermosa nos escenario do 30 (esquerda) e do 31 (dereita) de outubro de 2007, coas zoas visiblemente anegadas.

Por outra banda, a interdisciplinariedade deste tipo de proxectos documentouse co estudo realizado polo Instituto de Matemática Industrial (ITMATI, <http://www.itmati.com/>) a proposta de Endesa, para definir o dominio público hidráulico do lago das Pontes. Este estudo está conectado cos traballos fin de mestrado de Pedro Fontán e de Xela García no Mestrado en Matemática Industrial (M2I, <http://www.m2i.es/>).

3. SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ACÚSTICA: AS VIBRACIÓNS DUN AUTOBÚS

É difícil atopar unha realidade tan familiar para os rapaces da sesión de ESTALMAT-Pi como os fenómenos físicos da propagación de ruído e vibracións no interior dun vehículo de transporte colectivo, como é o caso dun autobús de transporte escolar. Este exemplo non soamente é usado para ilustrar cada unha das tres etapas nas que se dividen as tarefas a realizar nunha simulación numérica, senón que tamén serve para realzar as súas vantaxes: a posibilidade de optimizar o deseño estrutural do autobús, a identificación de zonas con maiores amplitudes nos desprazamentos ou aquelas rexións con maior nivel de ruído. Evidentemente, se a simulación numérica se centra na predición do ruído e as vibracións no interior dun autobús, os parámetros físicos dos que depende o problema son a xeometría do autobús, os datos dos materiais usados no chasis e na carrocería do autobús e tamén o espectro en frecuencia das vibracións producidas polo motor do vehículo. Unha vez coñecidos estes parámetros, as incógnitas máis importantes do problema son os desprazamentos das partes estruturais do autobús e a presión acústica no interior do vehículo.

Para entender de forma adecuada que é a presión no ámbito da acústica, revísanse outros tipos de presións en diferentes contextos físicos, como é o caso da presión atmosférica (na predición meteorolóxica) ou a presión manométrica (a presión do interior dun pneumático). No caso da acústica, o campo de presións debe entenderse como a flutuación lagrangiana do campo total de presións (véxase por exemplo, [4]). O aparello de medida habitual para cuantificar o nivel de presión sonora é o sonómetro. Dada a pequena escala que presentan estas flutuacións da presión, a unidade de medida son os decibelios (que é unha escala logarítmica coa que se mide a presión sonora dende un valor de referencia fixado da presión). Estas medidas da presión sonora tamén se poden realizar de tal xeito que se pode separar a contribución de cada frecuencia nun sinal de ruído arbitrario.

Para comprender de forma máis precisa os conceptos de frecuencia, amplitude e medida en escala logarítmica (decibelios) da presión acústica, emprégase un sonómetro dixital implementado en Python (o cal se pode descargar dende a páxina web de ESTALMAT-Galicia), que toma como entrada de datos acústicos o micrófono dun ordenador. O uso desta ferramenta informática, mediante a súa interface gráfica de usuario, permite experimentar en tempo real tanto coa amplitude da presión sonora (xa que se representa graficamente a intensidade acústica medida polo micrófono

nun intervalo de tempo), como coa descomposición en frecuencia do sinal (posto que se calcula en tempo real a transformada de Fourier discreta do sinal medido e así pódese representar graficamente a contribución de cada frecuencia no sinal). Estes dous elementos do programa permiten comprender a dificultade de aumentar ou diminuír os valores dunha escala logarítmica. Toda esta experimentación acústica é posible grazas á colaboración de todos os rapaces na aula facendo diferentes sons (graves, agudos, tratando de permanecer en silencio, facendo moito ruído, etc.), tal como se pode observar na imaxe da Figura 6.



Figura 6. Fotografía dun momento da sesión de ESTALMAT-Pi no curso 2016-2017, no que tres estudantes participan facendo un son agudo mentres o docente analiza os resultados facilitados polo computador.

Unha vez analizados os elementos básicos para poder describir con propiedade os fenómenos físicos da propagación de ruído e vibracións, esta parte da sesión remátase cunha descrición breve dun traballo de investigación levado a cabo recentemente (2008-2012) polos investigadores Alfredo Bermúdez de Castro, Francisco Javier Fernández Diéguez e Andrés Prieto Aneiros dentro dun proxecto realizado polo grupo de investigación de Enxeñaría Matemática (<http://www.usc.es/ingmat/>) da Universidade de Santiago de Compostela. Parte deste proxecto de investigación aparece recollido no traballo fin de mestrado [5].

Para describir todo o traballo realizado nunha simulación numérica deste tipo, en primeiro lugar tómake como partida o problema real que se enuncia sobre os elementos estruturais dun autobús. Unha vez eliminados os elementos que non contribúen nin teñen unha influencia significativa na propagación acústica e as vibracións, defínese o dominio fluído de cálculo (ocupado polo aire) do problema, o cal vén dado por tres tipos de cavidades (véxase a Figura 7): a cavidade de pasaxeiros e as cavidades dos compartimentos das equipaxes e a cavidade onde se atopa emprazado o motor. Adicionalmente, tamén se debe ter en conta a capa de material de illamento (entre a cavidade de pasaxeiros e a do motor). Ademais, posto que existe unha compoñente estrutural no problema, tamén se debe ter en conta a estrutura de barras e placas usadas na construción do autobús.

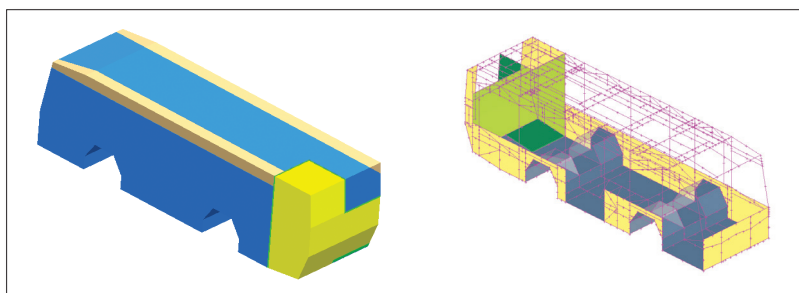


Figura 7. No panel do lado esquerdo, represéntase o dominio computacional formado por catro tipo de cavidades volumétricas: a cavidade de pasaxeiros (azul), as cavidades da equipaxe (marrón claro), a cavidade do motor (amarelo) e o lugar ocupado polo material illante (verde). No panel dereito, represéntanse as vigas que forman a estrutura da carrozaría e algunhas das placas que forman parte dela (laterais, chan e paredes que recobren a cavidade do motor).

Unha vez analizado o dominio de cálculo, cada un dos elementos mecánicos e acústicos é modelado mediante unha ecuación en derivadas parciais. Para o caso dos fluídos compresibles (aire neste caso), emprégase a ecuación de Helmholtz para modelar a presión acústica. No caso das vigas e das placas, empréganse respectivamente os modelos de Timoshenko e Reissner-Mindlin para determinar os valores dos desprazamentos e as rotacións que sofren estes elementos ao moverse excitados polas vibracións do motor.

A segunda tarefa do percorrido a facer pola simulación numérica deste problema acústico-estrutural é a utilización dun método numérico para discretizar este conxunto de ecuacións en derivadas parciais acopladas e pasar a ter como solución un vector de números complexos que representan unha aproximación dos valores da solución exacta do modelo teórico avaliado en certos puntos. Para este problema, seleccionouse un método de elementos finitos baseado nunha partición (mall) de tetraedros das cavidades tridimensionais de fluído, e de mallas de triángulos para os elementos planos da carrozaría (placas). Estas particións teñen a característica de ser compatibles, é dicir, de posuír caras comúns naquelas superficies onde se tocan tetraedros de diferentes cavidades ou onde se atopan as caras de tetraedros dunha cavidade cos triángulos da mall dunha placa. Posto que a resolución destes siste-

mas involucran millóns de incógnitas e de ecuacións, faise necesario o uso dunha ferramenta computacional potente, como poden ser os grandes servidores de cálculo. Isto require dunha implementación eficiente dos métodos numéricos empregados.

Como resultado final, despois de levar a cabo as tarefas de modelado matemático, de discretización do problema matemático e de finalmente implementar o método numérico escollido nun ordenador, ao executar o programa de ordenador creado, obtéñense as aproximacións numéricas desexadas do problema real. Neste caso, a Figura 8 amosa o campo de presións a 50Hz no dominio computacional fluído (panel da dereita) e o módulo do campo de desprazamentos tamén a 50Hz, pero representado sobre os elementos estruturais tipo placa da carrozaría (panel da esquerda).

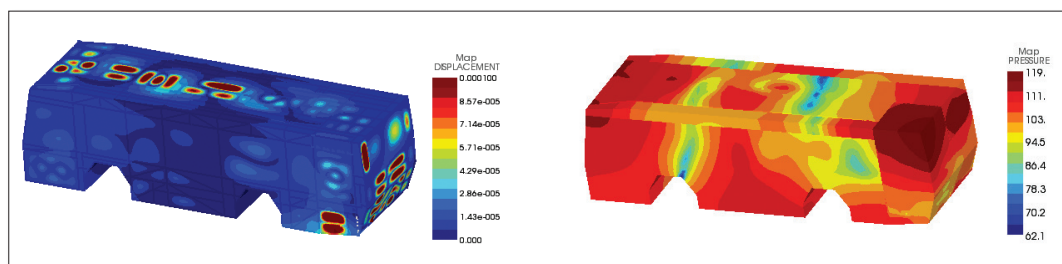


Figura 8. No panel do lado esquerdo, represéntase o módulo do campo vectorial de desprazamentos sobre as placas da carrozaría. No panel da lado dereito, estase a representar a presión acústica sobre as cavidades volumétricas ocupadas por fluído compresible (aire).

Como se pode observar na Figura 8, a presión máxima acádase no interior da cavidade do motor e os desprazamentos de amplitude máxima céntranse na parte inferior da cavidade do motor e inesperadamente no teito sobre o corredor central do autobús. De forma análoga, tamén se pode analizar a gráfica obtida para o campo de presións na que se observa que as máximas presións se localizan no interior da cavidade do motor e na parte superior do frontal do autobús.

4. SIMULACIÓN NUMÉRICA EN MECÁNICA DE FLUÍDOS: O FLUXO DO TRÁFICO E DO SANGUE

O modelo do fluxo do tráfico é un dos exemplos sobre os que os estudantes traballan directamente ao facilitarlles o código desenvolvido inicialmente por Xián López, no seu traballo fin de grao de Matemáticas [7] e que está dispoñible na páxina web de ESTALMAT-Galicia. O modelo considera o fluxo de vehículos ao longo dunha estrada dun só carril, sen entradas nin saídas, aínda que os resultados son xeneralizables ao caso de que haxa máis dun carril. Ademais, o modelo presentado é aplicable tamén ao estudo das «mareas humanas», ou situacións similares, nas que se ten unha gran cantidade de individuos avanzando por unha certa canle, asumindo que a súa velocidade depende, de xeito inverso, da súa densidade.

Para amosar proximidade, este modelo preséntase cos datos do proxecto construtivo do túnel do Hórreo en Santiago de Compostela. A partir do dato do fluxo máximo de

vehículos $f_{max} = 2187$ veh/hora, e tendo en conta a velocidade máxima permitida polas autoridades de tráfico, $u_{max} = 50$ km/h, preséntase a fórmula que relaciona as tres magnitudes, $f_{max} = 1/4 \rho_{max} u_{max}$, e que permite obter a densidade máxima $\rho_{max} = 175$ veh/km. Na sesión tamén se traballa coa Terceira Rolda da Coruña. Para salientar a diferenza dos datos do proxecto construtivo, neste caso $f_{max} = 5445$ veh/hora, $u_{max} = 100$ Km/hora, o que proporciona unha densidade máxima moi superior á calculada para o túnel do Hórreo.

A fórmula que permite expresar a velocidade en termos da densidade máxima é ρ_{max} , e a da velocidade máxima, u_{max} é $u = u_{max} \left(\frac{1 - \rho}{\rho_{max}} \right)$. Analízanse os casos nos que a velocidade é cero, se a densidade de vehículos coincide coa densidade máxima, e o caso no que a velocidade é máxima, cando a densidade é case cero, é dicir, cando un único vehículo se despraza pola estrada. Esta velocidade máxima coincide coa permitida polas autoridades de tráfico. A partir desta expresión introdúcese o concepto de fluxo como o produto da densidade pola velocidade.

A continuación procédese a traballar co computador. Trátase do código desenvolto por Xián López cunha interface de usuario moi básica. O código completo está implementado en Matlab (con cadros de diálogo e texto en inglés). Coa axuda desta ferramenta, simúlase inicialmente un corte de tráfico no túnel, que pode estar motivado por un accidente ou por un simulacro. Para realizar as simulacións é preciso executar o comando *traffic_flow*.

Traballar co código na aula permítenos resaltar a relevancia dos datos de entrada que figuran nos cadros de diálogo. Inicialmente aparecen as variables físicas; neste caso selecciónase $\rho_{max} = 175$ veh/km e $u_{max} = 50$ km/hora. Tamén é necesario dar o tempo final ata o que se calcula, que está medido en minutos. As condicións iniciais do fluxo están definidas en catro arquivos que permiten partir ou ben dun fluxo uniforme tanto para o túnel do Hórreo como para a Terceira Rolda da Coruña, ou ben dunha densidade variable e así recomenzar o tráfico nas dúas situacións. Unha vez indicada a condición inicial ao seleccionar o nome do arquivo que describe a configuración inicial, é preciso indicar no seguinte cadro de diálogo se o tráfico se vai ver interrompido no punto medio do dominio (*yes*) ou se este vai recomenzar (*no*). Esta elección está ligada en parte á selección anterior. Finalmente, trabállase cos datos relacionados cos métodos numéricos empregados, o número de nodos, no que se suxire empregar 100 nodos e facer tamén simulacións con 1000 nodos, co propósito de comparar os resultados obtidos. Se non se fan estas limitacións no uso de nodos, os estudantes tratan de introducir o número máis grande que entra no cadro de diálogo (saben que o uso de máis nodos no cálculo incrementa a precisión), o que é probable que colapse o computador! Finalmente, faise especial fincapé no parámetro CFL, o número de Courant-Friedrich-Levy: valores entre cero e un proporcionan resultados estables (recoméndanse os valores 0.8, 0.9 e 1) e valores superiores a un producen inestabilidades. Saliéntase tamén que os resultados que se observan están asociados a estudos de análise numérica dos métodos que se están a usar.

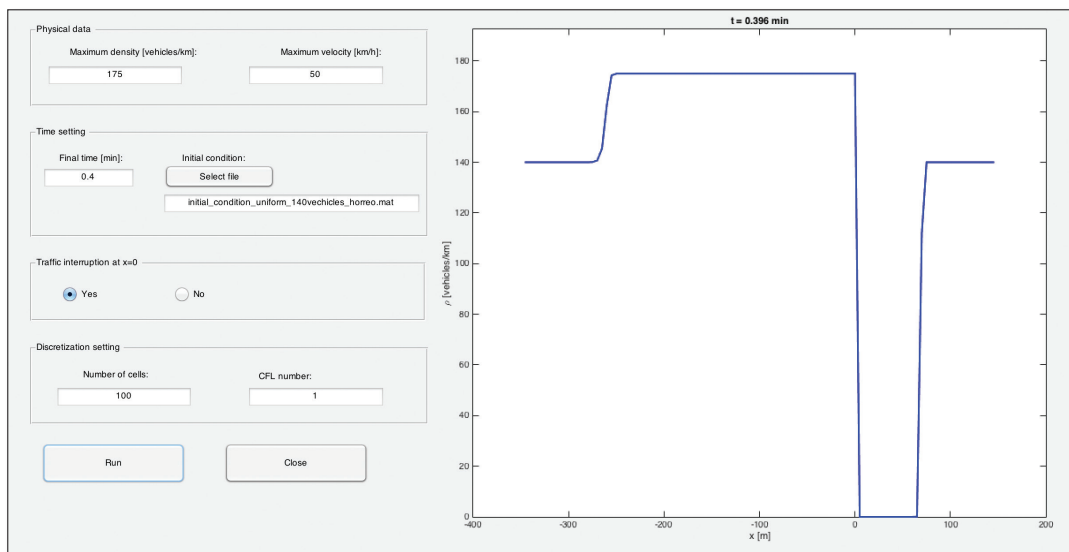


Figura 9. Captura da pantalla do código da simulación do fluxo do tráfico.
Datos e resultados da interrupción do tráfico no túnel do Hórreo.

Os resultados que se amosan na Figura 9 permiten comprobar como a densidade máxima acadada é a facilitada como dato, e como segundo avanza o tempo o atasco móvese cara a esquerda. Asemade, a partir de onde se interrompe o tráfico xérase un espazo con densidade cero. Posteriormente trabállase cos mesmos datos do túnel do Hórreo pero coa opción de recomenzar o tráfico. Finalmente, como xa foi mencionado antes, resólvense as dúas configuracións para a Terceira Rolda da Coruña.

O modelo matemático do sistema do fluxo sanguíneo humano unidimensional xa foi introducido por Euler en *Principia pro motu sanguinis per arterias determinando* [7]. Mencionar esta referencia permítenos introducir na aula a importancia e a relevancia das publicacións científicas, e adicionalmente o feito de que esta publicación sitúa a Euler como o *pai da hemodinámica*. Unha vez feito isto, relaciónase o concepto do fluxo en sangue co do fluxo do tráfico e o fluxo da auga, traballados anteriormente. Compártese así con eles un dos potenciais das matemáticas: tres problemas aparentemente diferentes *teñen o mesmo ADN matemático*. Os tres poden ser formulados con leis de conservacións hiperbólicas e resoltos numericamente coa mesma metodoloxía, neste caso o método de volumes finitos.

Volvendo ao modelo do fluxo en sangue nunha arteria, identifícanse as variables do problema: a velocidade na sección transversal da arteria e a área de cada sección transversal da arteria, cantidades que dependerán da posición e do tempo. Indícase que matematicamente é posible que a área sexa cero, coincidindo coa fisioloxía da arteria. Saliéntase tamén que se o modelo matemático se correspondese co fluxo en veas, a solución de área cero non é factible nin fisioloxicamente nin co modelo mate-

mático considerado [8]. Para traballar cos estudantes na aula a simulación numérica do fluxo en sangue, úsase tamén un código de ordenador, froito dunha colaboración co profesor E. F. Toro, da Universidade de Trento. Este traballo conxunto deu lugar aos traballos fin de grao en Matemáticas de Marcos Loureiro [9] e Pedro Rodríguez [10] da Universidade de Santiago de Compostela e ao traballo fin de mestrado de Chiara Spiller da Universidade de Trento [11]. O código usado nesta parte da sesión e implementado en Matlab (con cadros de diálogo e texto en inglés) está dispoñible na páxina web de ESTALMAT-Galicia, por xentileza do equipo colaborador do profesor Eleuterio Toro. Para realizar as simulacións é preciso executar o comando *blood_flow*.

O problema que se resolve inicialmente co código facilitado representa a liberación dun torniquete. Trátase dun compresor ou banda elástica empregada na medicina para comprimir un vaso por diferentes motivos, ben sexa para deter unha hemorraxia ou para diferenciar os vasos sanguíneos para realizar unha extracción de sangue. Esa compresión do vaso realizará un cambio de presión no sangue deixando presións diferentes a ambos os lados do mesmo. Partindo desta definición, identifícanse as condicións iniciais: considerando á esquerda do torniquete, o valor constante da presión identifícase cun valor constante da área da sección á esquerda do mesmo, $A = 2$, e á dereita, $A = 1$; a condición inicial para a velocidade supoñerase nula en toda a arteria.

Neste caso, a pesar da dificultade que amosa a resolución analítica do modelo, é factible obter solucións exactas (representadas a trazo continuo en vermello na Figura 10) e comparalas coas solucións numéricas (representábase con círculos na Figura 10). Na mencionada figura, representáanse os valores das variables físicas do modelo. Para facilitar a visualización do diámetro da arteria a partir do valor da área, nunha gráfica auxiliar representábase a función que describe o radio e o seu oposto. Os resultados amosan a existencia de funcións continuas e descontinuas, que nun futuro próximo se estudarán nos contidos curriculares de matemáticas. Xa que logo, estas solucións tamén representan exemplos deste tipo de funcións na resolución dun problema real.

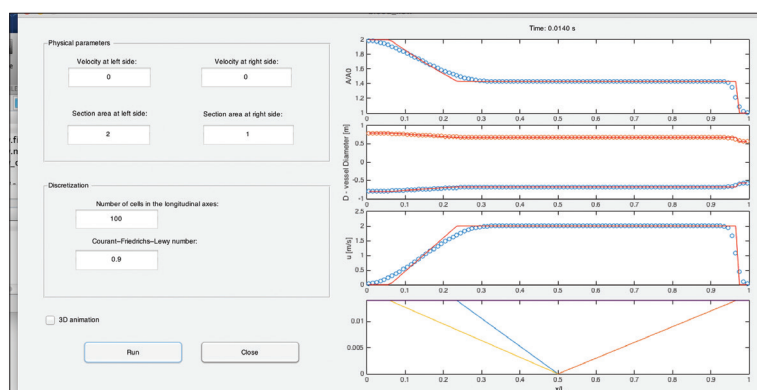


Figura 10. Captura da pantalla do código da simulación do fluxo de sangue en arterias. Datos e resultados da liberación dun torniquete (sen activar a animación 3D).

Entre a batería de exemplos de simulación numérica que se realizan na aula, tamén se traballou o caso no que se introduce sangue tanto pola esquerda como pola dereita dunha arteria (considérase un valor constante da área en toda a arteria e unha velocidade positiva pola esquerda e outra negativa pola dereita). Do mesmo xeito, tamén se considera o caso no que se extrae sangue polos dous lados (considérase de novo un valor constante da área en toda a arteria e unha velocidade negativa pola esquerda e outra positiva pola dereita).

Para axudar a visualizar a solución do modelo matemático, a interface gráfica de usuario do código de simulación numérica posúe a opción de activar a animación tridimensional (3D), como se pode apreciar na Figura 11.

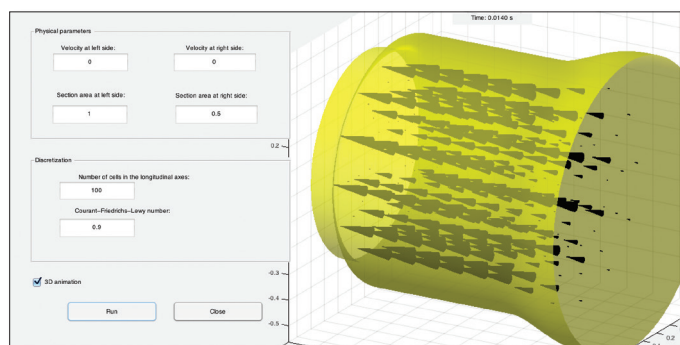


Figura 11. Captura da pantalla do código da simulación do fluxo de sangue en arterias. Datos e resultados da liberación dun torniquete (coa animación 3D activada).

Unha vez feitos estes tres casos, na aula expónse como reto o deseño de novas condicións iniciais, que dean lugar a novas configuracións fisiolóxicas na arteria. Na última edición presentaron na aula tres das configuracións que resolveron, deixando clara a comprensión dos problemas de simulación numérica resolto. A Figura 12 amosa as fotos das presentacións realizadas polos tres estudantes que participaron na sesión no curso 2016-2017.

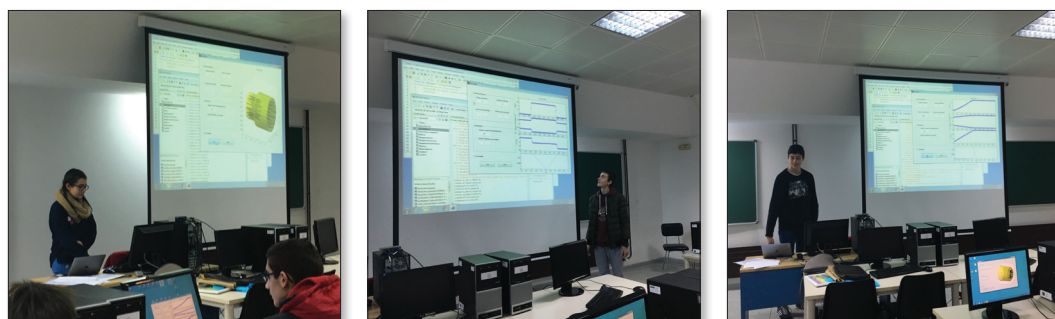


Figura 12. Fotos da sesión do curso 2016-2017. Presentacións feitas por tres dos estudantes de ESTALMAT-Pi explicando as configuracións deseñadas nos problemas de simulación numérica do fluxo en sangue.

5. MODELADO MATEMÁTICO DA TRAXECTORIA DUN PÉNDULO: AS FIGURAS DE LISSAJOUS

Para introducir na sesión a utilidade transversal das figuras de Lissajous aplicadas a diferentes problemas reais, o primeiro paso que se segue é lembrar o obxecto máis parecido ás curvas no plano que teñen estudado nos cursos regrados de matemáticas. Neste caso, bótase man das gráficas de funcións dunha variable real, para introducir o concepto de camiño ou percorrido posible dun punto sobre o plano. Así, dada unha función f con valores reais e definida sobre toda a recta real, a súa gráfica vén dada polos conxuntos de puntos no plano:

$$\text{Gráfica de } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{tal que } y = f(x)\}$$

Unha vez introducida a definición, móstranse varios exemplos de gráficas deste tipo de funcións e analízanse dúas das súas propiedades: a gráfica dunha función nunca se autointersecta e calquera liña vertical sobre o plano soamente pode cortar a gráfica dunha función como moito nun único punto. Deste xeito, como consecuencia destas dúas propiedades dedúcese (como unha actividade en grupo) que non é posible percorrer todo o espazo bidimensional mediante o percorrido ao longo do camiño definido pola gráfica dunha función.

Unha vez chegados a este punto da cadea de razoamentos, resulta natural preguntarse que tipo de obxectos xeométricos serían os adecuados para estender o concepto de gráfica dunha función e como se poderían superar as limitacións que estas posúen. Para motivar a discusión, móstranse varias curvas no plano que non son gráficas de funcións e pregúntaselles aos rapaces sobre se é posible ou non que sexan gráficas de funcións. Deste xeito, introdúcese o concepto de curva no plano informalmente como o conxunto de todos os puntos do plano que se poden unir mediante un trazo unidimensional. A esta definición intuitiva acompáñase a definición formal máis rigorosa de curva parametrizada como segue: ao considerar cada unha das coordenadas espaciais (lonxitude e latitude nun mapa por exemplo) como funcións $x:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $y:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, calquera curva no plano escríbese como:

$$\text{Curva} = \{(x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{onde } t \in [a,b]\}.$$

Nesta definición, o parámetro da curva t pódese interpretar como a variable física tempo, e polo tanto a curva pódese entender como o conxunto de posicións que se seguiu no percorrido dun camiño arbitrario no plano. Unha vez introducidas as curvas e o concepto de parametrización, móstranse algúns exemplos para ver a riqueza da construción xeométrica deste tipo de obxectos e resaltar as diferenzas con respecto ás curvas que proveñen de gráficas de funcións.

Cos elementos matemáticos xa introducidos, estase en posición de analizar as curvas de Lissajous. Para iso, o primeiro que se fai é unha revisión histórica para ser consciente do traballo feito polos investigadores dos séculos XVIII e XIX e como as figuras de Lissajous foron atopadas e estudadas por distintos autores ao longo da historia


moderna. A primeira figura histórica que se revisa é a do profesor Nathaniel Bowditch (EE. UU., 1773-1838), que foi o primeiro investigador en describir certas figuras relacionadas co movemento dun péndulo suspendido por dous puntos en 1815. Os seus traballos aparecen recollidos en [12] e constitúen o primeiro documento onde se debuxan de forma esquemática o que hoxe se coñece como figuras de Lissajous. O segundo personaxe histórico que se menciona é o propio Jules Antoine de Lissajous (Francia, 1822-1880), que estuda en detalle as figuras que levan o seu nome mediante aparellos ópticos. De feito, mediante un experimento que involucra diapasóns e lentes, foi capaz de observar estas figuras a finais do século XIX (tal e como aparece recollido en [13]). Por último, recóllese o traballo do investigador Hugh Blackburn (Escocia, 1823-1909), quen redescobre en 1844 as figuras de Lissajous a través da traxectoria do movemento harmónico do péndulo suspendido en forma de Y (que xa fora estudado anteriormente polo profesor James Dean en 1815 en [14]). Xustamente, foi Blackburn o que fixo a conexión entre a mecánica clásica e as figuras de Lissajous. Este dispositivo pendular recibe o nome de péndulo en forma de Y, péndulo de ángulo dobre, péndulo debuxante, péndulo suspendido en Y ou péndulo de Blackburn.

Para resaltar a complexidade do modelo matemático dos péndulos, e en particular a dos péndulos de ángulo dobre, descríbense os problemas de valor inicial escritos en termos de sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias que modelan o comportamento do ángulo de rotación tanto dun péndulo simple como dobre. No primeiro caso, se $\theta(t)$ é o ángulo que forma o péndulo sobre a liña vertical que pasa polo punto de soporte do péndulo, o seguinte problema de valor inicial goberna o seu movemento ao longo do tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \\ \theta(0) = \theta_0, \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

onde L é a lonxitude do péndulo, g é a aceleración da gravidade e θ_0 , é o ángulo inicial do péndulo. No caso do péndulo de ángulo dobre, se $\theta(t)$ e $\phi(t)$ son os ángulos que forma o péndulo sobre os planos perpendiculares que intersectan sobre a liña vertical central do mecanismo, as ecuacións que gobernan o movemento son solución do seguinte problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} \phi = 0, \\ \theta(0) = \theta_0, \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ \phi(0) = \phi_0, \frac{d\phi}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

onde L e l son respectivamente as lonxitudes total e do tramo inferior do péndulo (entre o nó e o extremo libre), g é a aceleración da gravidade e $\theta(0)$ e $\phi(0)$ son os ángulos iniciais do péndulo. Para ilustrar o movemento do péndulo de ángulo dobre, móstrase un dos vídeos  dispoñibles na Rede, por exemplo en <https://youtube.com/gK4Vl872QEM>, no que se pode comprobar a traxectoria que debuxa (xa sexa con sal, area ou pintura) sobre a superficie plana sobre a que está pendurado.

Ademais dos modelos mecánicos relacionados con fenómenos de interferencia ou co péndulo de ángulo dobre, no século XIX observáronse tamén estas figuras de Lissajous en certos réximes periódicos producidos en circuítos eléctricos en serie, cando se representa con respecto ao tempo a carga eléctrica e a intensidade de corrente como as dúas coordenadas dun punto do plano que determina a parametrización dunha traxectoria do circuítio. Neste contexto eléctrico, o problema de valor inicial a resolver vén dado polo seguinte enunciado: se $Q(t)$ é a carga eléctrica do circuítio en serie e a intensidade de corrente está definida por $I(t) = dQ/dt(t)$, o circuítio eléctrico en serie responde ao modelo

$$\begin{cases} R \frac{d^2 Q}{dt^2} + L \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} = 0, \\ Q(0) = Q_0, \frac{dQ}{dt} = I_0 \end{cases}$$

onde R é a resistencia, L é a indutancia da bobina, C é a capacitancia do condensador e Q_0 e I_0 son a carga eléctrica e a intensidade de corrente inicial, respectivamente. Para ilustrar as figuras que se poden reproducir neste contexto eléctrico amósase tamén un vídeo dispoñible na Rede (por exemplo, en <https://youtu.be/pSyitNgy8hE>), no que se aprecia como ao conectar un osciloscopio a un circuítio e poñer a pantalla en modo XY (de tal xeito que se mostran as traxectorias formadas pola carga eléctrica e a intensidade de corrente), aparecen reproducidas as curvas de Lissajous.

Unha vez introducidos os modelos matemáticos e ilustrada a utilidade transversal das figuras de Lissajous tanto en problemas mecánicos como eléctricos, pásase a traballar coas curvas mediante o uso de diferentes parametrizacións. A modo de reto ou concurso, enúnciaselles aos rapaces o problema de ser capaces de deducir a parametrización de seis curvas de Lissajous (como as que aparecen representadas na Figura 13). A parametrización das figuras vén dada por $x(t) = \cos(at)$ e $y(t) = \sin(bt)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e tendo en conta distintos valores das constantes positivas a e b , que aparecen multiplicando nos argumentos das funcións trigonométricas coseno e seno.

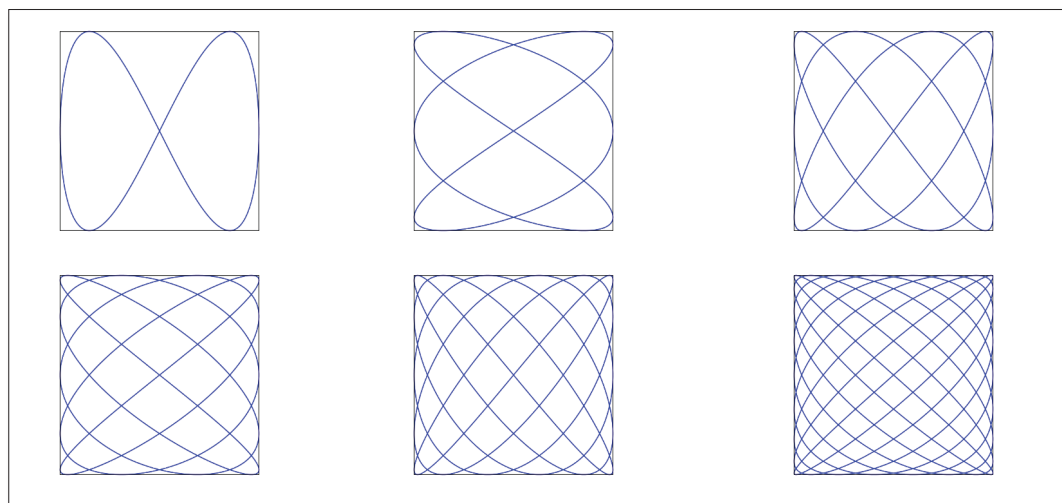


Figura 13. Figuras de Lissajous que se corresponden cos distintos valores constantes de a e b : $a=1, b=2$ (arriba á esquerda), $a=3, b=2$ (arriba no centro), $a=3, b=4$ (arriba á dereita), $a=5, b=4$ (abaixo á esquerda), $a=5, b=6$ (abaixo no centro) e $a=9, b=8$ (abaixo á dereita).

Para realizar esta tarefa dispoñen dun tempo reducido (arredor de 15 min) e empregan un pequeno programa de ordenador cunha interface de usuario moi básica na que poden representar curvas no plano. Esta ferramenta está programada en Matlab (con cadros de diálogo e texto en inglés) e pode descargarse dende a páxina web de ESTALMAT-Galicia. Para facilitar esta tarefa e dado que algúns dos rapaces teñen unha experiencia limitada no uso de funcións trigonométricas, indícaselles que a parametrización da circunferencia de raio unidade vén dada por $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Finalmente, a actividade desta parte da sesión remata cun tempo de lecer e experimentación co programa de ordenador onde os rapaces exploran outras posibles parametrizacións nas que habitualmente ou ben xogan cos valores das constantes a e b incrementando o seu valor ou ben combinan as funcións trigonométricas con outro tipo de funcións, como por exemplo con funcións polinómicas, e ensaian a composición de varias destas funcións para dar lugar a novas curvas no plano.

MATERIAIS

Todos os programas de ordenador usados nesta sesión están dispoñibles na seguinte páxina web de ESTALMAT-Galicia: <http://www.estalmatgalicia.com/enlaces/45-estalmatgalicia-general/158-programas-de-ordenador-da-sesion-de-estalmat-pi-modelizacion-matematica-e-simulacion-numerica>. Nesta páxina aparecen catro ligazóns a cada un dos catro programas de ordenador (o sonómetro dixital, o simulador do fluxo do tráfico, o simulador do fluxo do sangue e o programa usado para representar graficamente as figuras de Lissajous) usados en cada un das partes desta sesión de modelado matemático e simulación numérica.

AGRADECEMENTOS

Os autores do traballo queren facer constar o seu agradecemento a todas as persoas colaboradoras nos proxectos mencionados, nomeadamente a Alfredo Bermúdez de Castro, que foi un dos docentes inicialmente involucrados nesta sesión e quen liderou moitos dos proxectos mencionados neste traballo, a Francisco J. González Diéguez (autor do traballo fin de mestrado [5]), Juan Carlos González Aguirre e Justino Alavez (coautores de [3]), a Chiara Spiller, Eleuterio F. Toro, Chistian Contarino (coautores de [7]), a Marcos Lourenzo (coautor do código do fluxo en sangue) e a Xián López (autor do código do fluxo do tráfico).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] PÉTER, R. (1962). *Playing with infinity: mathematics for everyman*. Nova York: Simon and Schuster.
- [2] LIONS, J. L. (1990). *El planeta Tierra: el papel de la matemáticas y los superordenadores*. Madrid: Espasa Calpe, Serie del Instituto de España, n.º 2.
- [3] GONZÁLEZ-AGUIRRE, J. C.; VÁZQUEZ-CENDÓN, M. E.; ALAVEZ-RAMÍREZ, J. (2016). «Simulación numérica de inundaciones en Villahermosa México usando el código IBER», en *Ingeniería del agua*, 20 (4), pp. 201-216.
- [4] BERMÚDEZ, A. (2006). *Continuum Thermomechanics*. Basel, Suíza: Springer Science & Business Media, vol. 43.
- [5] FERNÁNDEZ DIÉGUEZ, F. J. (2010). *Desenvolvemento e implementación de sistemas NVH para a redución de rúidos e vibracións en autobuses* (Memoria de traballo fin de mestrado en Enxeñaría Matemática). Universidade da Coruña. Disponible en: <http://hdl.handle.net/2183/9888>.
- [6] LÓPEZ, X. (2013). *Modelos matemáticos de tráfico en estradas* (Memoria do traballo fin de grao en Matemáticas). Universidade de Santiago de Compostela.
- [7] EULER, L. (1775). «On the flow of blood in the arteries», en *Opera posthuma mathematica et physica anno 1844 detecta. Ediderunt PH Fuss et N Fuss Petropoli; Apud Eggers et Socios*, vol. 2, pp. 814-823.
- [8] SPILLER, C.; TORO, E. F.; VÁZQUEZ-CENDÓN, M. E.; CONTARINO, C. (2017). «On the exact solution of the Riemann problem for blood flow in human veins, including collapse», en *Applied Mathematics and Computation*, vol. 303, pp. 178-189.
- [9] LOUREIRO, M. (2014). *Simulación numérica de modelos simplificados de fluxo sanguíneo* (Memoria de traballo fin de grao en Matemáticas). Universidade de Santiago de Compostela.

- [10] RODRÍGUEZ, P. (2015). *Simulación numérica de flujo en sangre teniendo en cuenta la confluencia de venas o arterias* (Memoria de trabajo fin de grado en Matemáticas). Universidade de Santiago de Compostela.
- [11] SPILLER, C. (2015). *One Dimensional Model for Blood Flow in Veins: Exact Solution of the Riemann Problem and Numerical Implementation* (Memoria de trabajo fin de masterado en Ciencias Matemáticas). Universidade de Trento.
- [12] BOWDITCH, N. (1815). «On the motion of a pendulum suspended from two points», en *Mem. Am. Acad. Arts Sci.*, 3, pp. 413-436.
- [13] LISSAJOUS, J. A. (1857). «Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires», en *Ann. Chim. Phys.*, 51, pp. 147-231.
- [14] DEAN, J. (1815). «Investigation of the apparent motion of the Earth viewed from the moon, arising from the moon's librations», en *Mem. Am. Acad. Sci.*, 3, pp. 241-245.

