Construcción de una capa PML óptima en acústica

A. Bermúdez [1] L. Hervella-Nieto[2] A. Prieto[1]
R. Rodríguez[3]

Resumen

En este artículo se prueba que existe una capa PML óptima en acústica cuando se elige un coeficiente singular en el cambio de variable utilizado para su construcción. Su optimalidad reside en la recuperación de las soluciones exactas en el dominio no acotado cuando resolvemos el problema en un dominio acotado mediante una PML. También planteamos la formulación variacional del problema acoplado fluido-capa PML utilizando espacios de Sobolev con pesos y presentamos los resultados numéricos de la implementación del método de elementos finitos en el caso unidimensional.

Introducción

La resolución númerica de cualquier problema de acústica en un dominio no acotado mediante diferencias o elementos finitos trae consigo una dificultad inevitable: el dominio de cálculo tiene que ser acotado, debiéndose truncar, por tanto, el dominio de partida. Una forma de afrontar esta dificultad es simular capas absorbentes. Básicamente, lo que se hace con este procedimiento es rodear el dominio computacional con una capa de material artificial que absorbe el campo acústico radiado hacia el exterior del dominio. Sin embargo, en los métodos conocidos hasta hace pocos años, estos materiales absorbentes normalmente generaban reflexiones en la frontera debido a que su impedancia característica y la impedancia del medio acústico sólo podían hacerse coincidir en el caso en que las ondas fuesen de incidencia normal en la interfaz con el dominio de partida.

El uso de materiales absorbentes ha tenido un avance significativo desde que Berenger publicó sus trabajos iniciales (ver [1] y [2]). La técnica de Berenger, conocida como "perfectly matched layer" (PML), emplea un artificio (denominado "splitting") para asegurar que la impedancia en la capa PML sea la misma que en el medio acústico para cualquier frecuencia y cualquier ángulo de incidencia, con lo que se garantiza que no existan reflexiones espúreas en la frontera de acople entre el dominio computacional y la capa de material absorbente. En la práctica, esta capa se trunca a una distancia finita del medio acústico, lo que provoca todavía reflexiones artificiales, pero éstas son pequeñas debido al decaimiento exponencial de las ondas acústicas en el interior de la capa PML.

El método original usado para modelar estas capas absorbentes artificiales puede entenderse como un cambio complejo de coordenadas en el interior de la capa PML, tanto en coordenadas cartesianas como en radiales (ver Collino & Monk [4]).

El objetivo de este trabajo es probar que la elección de un coeficiente singular, asociado al cambio de variable con el se construye la PML, implica la recuperación de la solución exacta del problema planteado en el dominio no acotado. Además analizamos la formulación variacional del problema acoplado fluido-capa PML que esta elección produce y presentamos resultados numéricos sobre un ejemplo unidimensional al aproximar el problema mediante elementos finitos.

Formulación fuerte

En primer lugar, vamos a establecer el problema planteado en el dominio no acotado que más tarde truncaremos mediante la PML, siguiendo un desarrolo análogo al hecho por Collino & Monk en [4] en coordenadas cilíndricas. En el caso bidimensional y en el dominio de la frecuencia, si denotamos a la presión por $P(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} p(\mathbf{x})$ y por δ a la delta de Dirac situada en $(0, 0)$, el sistema de ecuaciones, denominado problema de Helmholtz, que se satisface en todo el plano es

$$k^2 p + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial p}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\right) = i\omega\delta, \text{ en } \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right) = 0, \tag{2}$$

que tiene por solución, $p(x) = \frac{\omega}{4} H_0^{(1)}(kr)$, donde k es el número de onda y $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de orden cero de primera clase.

Consideremos ahora un nuevo problema en el que hemos truncado el domino no acotado mediante una capa PML. Supondremos que el fluido está situado en

$$\Omega_F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |(x_1, x_2)| < R\}, \tag{3}$$

mientras que la capa PML está situada en

$$\Omega_A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R < |(x_1, x_2)| < R + \delta\}. \tag{4}$$

En la nueva frontera donde se trunca la capa PML, que denotamos por $\Gamma_D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |(x_1, x_2)| = R + \delta\}$, imponemos una condición de contorno Dirichlet homogénea.

Si construimos la capa PML mediante el cambio de variable en coordenadas radiales

$$\hat{r} = r + \frac{i}{\omega}\int_R^r \sigma(s)\, ds, \tag{5}$$

donde $\sigma : [R, R + \delta) \to \mathbb{R}^+$ es una función positiva que va jugar un papel fundamental en el comportamiento de la capa, y si denotamos por p_F la presión en el interior del fluido y por p_A la presión en la PML, el nuevo sistema de ecuaciones que se satisface es

$$
\begin{aligned}
k^2 p_F + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial p_F}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 p_F}{\partial \theta^2}\right) &= i\omega\delta, \text{ en } \Omega_F \ (r < R), && (6)\\
k^2\gamma\hat{\gamma} p_A + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\hat{\gamma} r}{\gamma}\frac{\partial p_A}{\partial r}\right] + \frac{\gamma}{\hat{\gamma} r}\frac{\partial^2 p_A}{\partial \theta^2}\right) &= 0, \text{ en } \Omega_A \ (R < r < R+\delta), && (7)\\
p_A &= p_F, \text{ en } \Gamma_I, && (8)\\
\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_A}{\partial r} &= \frac{\partial p_F}{\partial r}, \text{ en } \Gamma_I, && (9)\\
p_A &= 0, \text{ en } \Gamma_D, && (10)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\hat{\gamma}(r) = 1 + \frac{i}{r\omega}\int_R^r \sigma(s)\, ds \text{ y } \gamma(r) = \frac{\omega + i\sigma(r)}{\omega}. \tag{11}
$$

Puesto que el segundo término en (6) sólo depende de la distancia al origen, r, y la frontera Γ_I, donde se imponen las condiciones de contorno, es una circunferencia, las soluciones son de tipo radial, con lo que resultan de la forma

$$
\begin{aligned}
p_F(r) &= a_{0,F} H_0^{(1)}(kr) + b_{0,F} H_0^{(2)}(kr), \ r < R, && (12)\\
p_A(\hat{r}) &= a_{0,A} H_0^{(1)}(k\hat{r}) + b_{0,A} H_0^{(2)}(k\hat{r}), \ R < r < R+\delta, && (13)
\end{aligned}
$$

siendo $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ respectivamente, las funciones de Hankel de orden 0 de primera y segunda clase y donde $\hat{r}$ depende de r de acuerdo a (5). Si suponemos que σ es acotada y denotamos por $\hat{r}_\delta = \hat{r}(R+\delta)$, al tener en cuenta tanto las ecuaciones (12)-(13) como las condiciones de acople en Γ_I y la condición Dirichlet homogénea en Γ_D,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_{0,F} = a_{0,A}, && (14)\\
b_0 &= b_{0,F} = b_{0,A}, && (15)\\
a_0 H_0^{(1)}(k\hat{r}_\delta) &= -b_0 H_0^{(2)}(k\hat{r}_\delta), && (16)
\end{aligned}
$$

la solución del problema (6)-(10) es

$$
\begin{aligned}
p_F(r) &= \frac{\omega}{4}\left(H_0^{(1)}(kr) - \frac{H_0^{(1)}(k\hat{r}_\delta)}{H_0^{(2)}(k\hat{r}_\delta)} H_0^{(2)}(kr)\right), \ r < R, && (17)\\
p_A(r) &= \frac{\omega}{4}\left(H_0^{(1)}(k\hat{r}) - \frac{H_0^{(1)}(k\hat{r}_\delta)}{H_0^{(2)}(k\hat{r}_\delta)} H_0^{(2)}(k\hat{r})\right), \ R < r < R+\delta. && (18)
\end{aligned}
$$

Como consecuencia obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea p la solución exacta del problema en el dominio no acotado (1)-(2) y (p_F, p_A) la solución del problema en el dominio acotado mediante una capa PML (6)-(10). Si σ es una función acotada se satisface la desigualdad:*

$$
\|p - p_F\|_{L^2(B_\epsilon)} \leq C(\omega)\left|\frac{H_0^{(1)}(k\hat{r}_\delta)}{H_0^{(2)}(k\hat{r}_\delta)}\right|, \tag{19}
$$

donde $C(\omega) = \frac{\omega}{4}\|H_0^{(2)}(k\cdot)\|_{L^2(B_\epsilon)}$ *y, para cada* $\epsilon > 0$, $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \epsilon < |x| < R\}$.

Si ahora hacemos que $\text{Im } \hat{r}_\delta = \frac{1}{\omega}\int_R^{R+\delta} \sigma(s)ds$ tienda a infinito, vemos que la solución p_F en Ω_F tiende a la solución exacta del problema original en el dominio no acotado (en este caso $\mathbb{R}^2$) y sin capa PML. Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de las funciones Hankel de primera y segunda clase cuando $|z|$ es suficientemente grande (ver [5]),

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{+i(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\left\{1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right\}, \ |z| \to \infty, \tag{20}$$

$$H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\left\{1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right\}, \ |z| \to \infty, \tag{21}$$

obtenemos que

$$\lim_{\text{Im } \hat{r}_\delta \to +\infty} \left|\frac{H_0^{(1)}(k\hat{r}_\delta)}{H_0^{(2)}(k\hat{r}_\delta)}\right| = \lim_{\text{Im } \hat{r}_\delta \to +\infty} \left|e^{2ik\hat{r}_\delta}\right| = \lim_{\text{Im } \hat{r}_\delta \to +\infty} \left|e^{-2k\text{Im } \hat{r}_\delta}\right| = 0. \tag{22}$$

A la vista del resultado anterior parece razonable plantear el mismo problema pero suponiendo que σ es singular en Γ_D y no es integrable, es decir, tal que $\int_R^{R+\delta} \sigma(s)ds = +\infty$ y $\lim_{r\to R+\delta} \sigma(r) = +\infty$. Haciendo las mismas consideraciones que en el caso anterior, debemos buscar soluciones (p_F, p_A) que satisfagan el sistema de ecuaciones (6)-(10) donde ahora tanto γ como $\hat{\gamma}$ son singulares en Γ_D, es decir, $\lim_{r\to R+\delta} |\gamma(r)| = +\infty$ y $\lim_{r\to R+\delta} |\hat{\gamma}(r)| = +\infty$.

Como en el caso anterior se puede comprobar que las condiciones de acople en Γ_I y la simetría radial del término fuente (en este caso una delta de Dirac) implican que

$$p_F(r) = a_0 H_0^{(1)}(kr) + b_0 H_0^{(2)}(kr), \ r < R, \tag{23}$$

$$p_A(\hat{r}) = a_0 H_0^{(1)}(k\hat{r}) + b_0 H_0^{(2)}(k\hat{r}), \ R < r < R + \delta. \tag{24}$$

Si tenemos en cuenta la condición sobre Γ_D,

$$\lim_{r\to R+\delta} p_A(r) = \lim_{r\to R+\delta} \left(a_0 H_0^{(1)}(\hat{\gamma}kr) + b_0 H_0^{(2)}(\hat{\gamma}kr)\right) \tag{25}$$

$$= a_0 \lim_{r\to R+\delta} H_0^{(1)}(\hat{\gamma}kr) + b_0 \lim_{r\to R+\delta} H_0^{(2)}(\hat{\gamma}kr) = 0, \tag{26}$$

y que, debido a nuestra elección de la función σ, $\lim_{r\to R+\delta} \text{Im } \hat{\gamma} = +\infty$, entonces resulta que $b_0 = 0$ y por lo tanto obtenemos la siguiente

Proposición 2. *Sea* p *la solución exacta del problema en el dominio no acotado (1)-(2) y* p_F *la solución del problema en el dominio acotado mediante una capa PML radial (6)-(10). Si* σ *es una función singular en* Γ_D *y no integrable entonces*

$$p = p_F \ \text{en } \Omega_F. \tag{27}$$

Formulación variacional

Analicemos ahora, la formulación variacional del problema unidimensional modificado con una capa PML, de forma análoga a como se haría en el caso bidimensional en coordenadas radiales. Si denotamos por $\Omega_F = [-a, a]$ el intervalo ocupado por el fluido, $\Omega_A = [-a-\delta, -a] \cup [a, a+\delta]$ el intervalo ocupado por la PML, $\Gamma_I = \{-a, a\}$ la frontera de acople entre el fluido y la capa PML, y por $\Gamma_D = \{-a-\delta, a+\delta\}$ la frontera de la capa PML donde ésta se trunca, el problema que tenemos que resolver, si truncamos la capa PML mediante una condición Dirichlet homogénea, se puede escribir como:

Encontrar $p_F : \Omega_F \to \mathbb{C}$ *y* $p_A : \Omega_A \to \mathbb{C}$ *tales que*

$$-\omega^2 p_F - c^2 \frac{d^2 p_F}{dx^2} = f, \qquad \text{en } \Omega_F, \tag{28}$$

$$-\omega^2 \frac{\omega + i\sigma}{\omega} p_A - c^2 \frac{d}{dx}\left[\frac{\omega}{\omega + i\sigma}\frac{dp_A}{dx}\right] = 0, \qquad \text{en } \Omega_A, \tag{29}$$

$$p_F = p_A, \qquad \text{en } \Gamma_I, \tag{30}$$

$$\frac{dp_F}{dx} = \frac{\omega}{\omega + i\sigma}\frac{dp_A}{dx}, \qquad \text{en } \Gamma_I, \tag{31}$$

$$p_A = 0, \qquad \text{en } \Gamma_D. \tag{32}$$

donde (29) no es más que (7) en el caso unidimensional, c es la velocidad del fluido y f es el término fuente.

Introduzcamos la formulación débil del problema (28-32), para lo que necesitaremos algunas definiciones previas. Sea $\sigma : \Omega_A \to \mathbb{R}^+$ una función medible y no nula salvo en un conjunto de medida cero, denotamos por $L^2(\Omega_A; \sigma)$ al espacio de la clase de funciones medibles p tales que

$$\|p\|_{L^2(\Omega_A; a_0)} = \left(\int_{\Omega_A} \sigma |p|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{33}$$

Por otra parte, si $S = \{\sigma, \sigma^{-1}\}$, denotamos por $H^1(\Omega_A; S)$, el espacio de la clase de funciones medibles p tales que

$$\|p\|_{H^1(\Omega_A; S)} = \left(\int_{\Omega_A} \sigma^{-1}\left|\frac{dp}{dx}\right|^2 + \int_{\Omega_A} \sigma |p|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{34}$$

En el caso que nos interesa, $\sigma : \Omega_A \to \mathbb{R}^+$ es una función continua que sólo depende de la distancia a Γ_D, es dicir, $\sigma(x) = r_0(\mathrm{d}(x, \Gamma_D))$, siendo r_0 una función medible positiva, definida en $(0, \infty)$ y suficientemente regular. Además supondremos que

$$\inf_{x \in \Omega_A} \operatorname{ess} \sigma(x) > 0. \tag{35}$$

Teniendo esto en cuenta, sean los espacios normados $H = L^2(\Omega_F) \times L^2(\Omega_A; \sigma)$ dotado de la norma producto y el espacio

$$V = \left\{(p_F, p_A) \in H^1(\Omega_F) \times H^1(\Omega_A; S) : p_F = p_A, \text{ en } \Gamma_I\right\}, \tag{36}$$

cuya norma es

$$\|(p_F, p_A)\| = \left(\|p_F\|^2_{H^1(\Omega_F)} + \|p_A\|^2_{H^1(\Omega_A;S)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Así definido, V es un espacio de Hilbert que se inyecta continuamente en H. Además hay que hacer notar que debido a que el peso σ es no integrable, la condición de truncamiento $p_A = 0$ en Γ_D se satisface cuando la función p_A es continua en Ω_A.

Definimos las formas sesquilineales $a_\omega : V \times V \to \mathbb{C}$ y $d_\omega : H \times H \to \mathbb{C}$ como

$$d_\omega((p_F, p_A), (q_F, q_A)) := \int_{\Omega_F} p_F \bar{q}_F + \int_{\Omega_A} \left(\frac{\omega + i\sigma}{\omega} \right) p_A \bar{q}_A, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} a_\omega((p_F, p_A), (q_F, q_A)) &:= c^2 \int_{\Omega_F} \frac{dp_F}{dx} \frac{d\bar{q}_F}{dx} + c^2 \int_{\Omega_A} \left(\frac{\omega}{\omega + i\sigma} \right) \frac{dp_A}{dx} \frac{d\bar{q}_A}{dx} \\ &\quad + d_\omega((p_F, p_A), (q_F, q_A)). \end{aligned} \tag{39}$$

La forma sesquilineal $|d_\omega(\cdot, \cdot)|$ es un producto interior en H que induce una norma equivalente a la usual en H. De forma inmediata, se puede probar que $a_\omega(\cdot, \cdot)$ es continua en V y además V-elíptica gracias a la suma del término de masa $d_\omega(\cdot, \cdot)$.

Teniendo todo esto presente, el problema (28)-(32) posee la siguiente formulación variacional:

Dada $\omega > 0$ y $f \in H^{-1}(\Omega_F)$, encontrar $(p_F, p_A) \in V$ tal que

$$a_\omega((p_F, p_A), (q_F, q_A)) - (\omega^2 + 1) d_\omega((p_F, p_A), (q_F, q_A)) = \langle f, q_F \rangle, \ \forall (q_F, q_A) \in V \tag{40}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad en $H^{-1}(\Omega_F) \times H^1(\Omega_F)$.

Resolución numérica

Teniendo en cuenta la estimación de error (19) que proporciona la formulación fuerte del problema con PML, cuando el peso σ es acotado, el error decrece exponencialmente con respecto a este y basta escoger σ constante y suficientemente grande para disminuir el error tanto como se desee. Sin embargo, al discretizar el problema PML la estimación anterior no es válida y la elección de una función σ acotada que minimize el error se asocia a un problema de optimización (véase Collino & Monk [3]) que depende de la frecuencia.

Para solucionar este efecto no deseado en la discretización, suponemos que el peso σ no es acotado y además tampoco es integrable. En lo que sigue escogemos la función $r_0(s) = s^{-1}$ que proporciona un peso no integrable y estudiamos cual es el resultado de esta elección en el caso del problema unidimensional.

Por otro lado, aunque las presiones en el interior del fluido y en la capa PML pertenecen a diferentes espacios, $H^1(\Omega_F)$ y $H^1(\Omega_A; \{\sigma, \frac{1}{\sigma}\})$, respectivamente, vamos a emplear en los dos casos el mismo tipo de elementos finitos para discretizar el problema variacional (40).

Sea $\{\mathcal{T}_h\}$ una familia de particiones regulares de $\Omega_F \cup \Omega_A$ tal que cada elemento de la partición está completamente contenido en Ω_F o en Ω_A.

Tanto para el fluido como para la PML usamos el espacio estándar de elementos finitos lineales a trozos, es dicir, usamos para la presión en el fluido

$$L_h(\Omega_F) := \left\{ q \in H^1(\Omega_F) : q|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, T \subset \Omega_F \right\}, \tag{41}$$

y el espacio análogo para la presión en la PML. El espacio discreto análogo a V es

$$V_h := \{(q_f, q_A) \in L_h(\Omega_F) \times L_h(\Omega_A) : q_A|_{\Gamma_D} = 0\}. \tag{42}$$

Con este espacio de elementos finitos, podemos definir un problema aproximado a (40):

Dada $\omega > 0$ y $f \in H^{-1}(\Omega_F)$, encontrar $(p_F^h, p_A^h) \in V_h$ tal que

$$a_\omega((p_F^h, p_A^h), (q_F, q_A)) - (\omega^2 + 1) d_\omega((p_F^h, p_A^h), (q_F, q_A)) = \langle f, q_F \rangle, \ \forall (q_F, q_A) \in V_h. \tag{43}$$

Teniendo todas estas considereciones en cuenta, mostramos a continuación los resultados numéricos obtenidos al utilizar una implementacion del método de elementos finitos del problema (43) en MATLAB.

En la figura 1 se puede observar la comparación entre la solución exacta y la solución aproximada obtenida con nuestro método (utilizando elementos finitos y PML), cuando trabajamos a una frecuencia de $\omega = 500$ Hz y tomamos como término fuente la delta de Dirac situada en el origen. El fluido posee una velocidad $c = 343$ ms^{-1} y está contenido en $[-0{,}5 \text{ cm}, 0{,}5 \text{ cm}]$, mientras que el espesor de cada una de las capas PML es 1 cm y el paso de la malla es $h = 0{,}05$ cm.

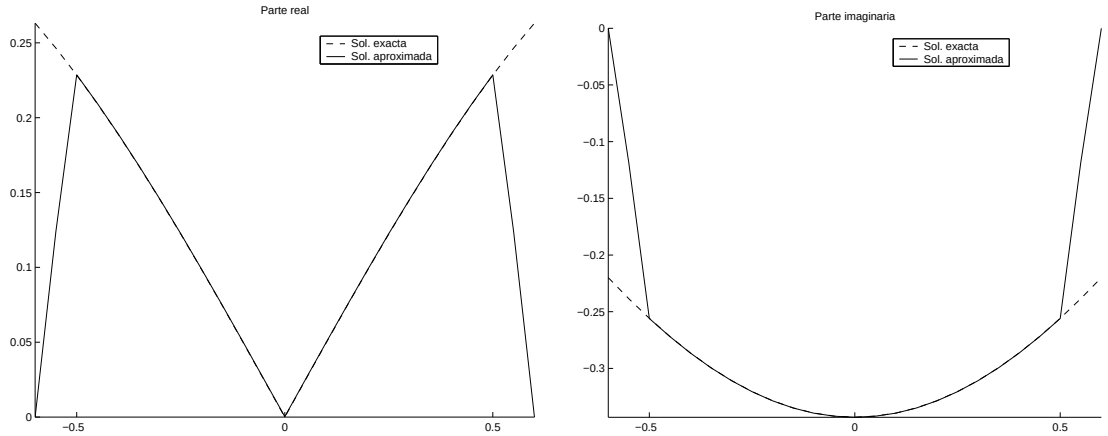

Fig.1. Comparación entre la solución exacta y la solución aproximada.

La figura 2 muestra claramente que el orden de convergencia es cuadrático.

Agradecimientos

Los autores están parcialmente financiados por los proyectos DPI2001-1613-C02-01 del MYCT, 2000/PN005 de la AECI y PGIDIT02PXIC2070IPN de la Xunta de Galicia.

Referencias

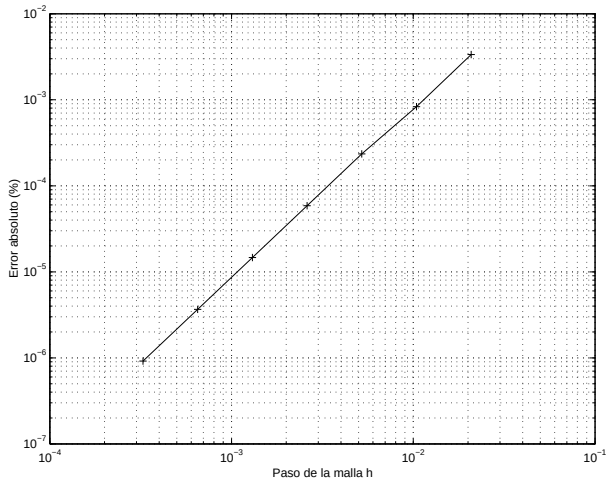

Fig.2. Error absoluto en $L^2(\Omega_F)$ frente al paso de la malla.

[1] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absortion of electromagnetic waves", *J. Comput. Phys.*, **144**, (1994), 185-200.

[2] J. P. Berenger, "Perfectly matched layer for the FDTD solution of Wave-Structure Interaction Problems", *IEEE transactions on Antennas and Propagation*, **44**, (1996), 110-117.

[3] F. Collino, P. Monk, "Optimizing the perfectly matched layer", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **164**, (1998), 157-171.

[4] F. Collino, P. Monk, "The perfectly matched layer in curvilinear coordinates", *SIAM J. Sci. Comput.*, **19**, (1998), 2061-2090.

[5] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, (New York), 1992.

1 Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela. Facultad de Matemáticas. Campus Universitario Sur. 15782, Santiago de Compostela.

2 Departamento de Matemáticas. Universidad de A Coruña. Facultad de Informática. Campus de Elviña. A Coruña.

3 GI^{2}MA, Departamento de Ingeniería Matemática. Universidad de Concepción. Casilla 160-C, Concepción. Chile.