

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

**ESTIMACIÓN PRESUAVIZADA DE LAS FUNCIONES
DE RIESGO ACUMULATIVA Y NO ACUMULATIVA
CON DATOS CENSURADOS**

IGNACIO LÓPEZ DE ULLIBARRI GALPARSORO
FEBRERO DE 2004

Realizado el acto público de Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 23 de abril de 2004, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, ante el tribunal formado por:

Presidente: Dr. D. Juan Manuel Vilar Fernández

Vocales: Dr. D. Jacobo de Uña Álvarez
Dr. D. Paul Janssen
Dra. Dña. Ingrid Van Keilegom

Secretario: Dr. D. César Andrés Sánchez Sello

obtuvo la máxima calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE, siendo el director de la misma el Dr. D. Ricardo Cao Abad.

*A mi padre, que me enseñó lo más importante,
y a mi madre, que no dejó que lo olvidara.*

Agradecimientos

A Ricardo Cao, director de esta tesis doctoral, que con el tiempo pasó de ser condición suficiente para su realización a convertirse además en condición necesaria.

A Sonia Pértega y Salvador Pita, ex-compañeros de la Unidad de Epidemiología y Bioestadística del Hospital Juan Canalejo de A Coruña, que gentilmente me suministraron los datos de cáncer gástrico; asimismo, a José Luis López Cedrún, del Servicio de Cirugía Maxilofacial del mismo Hospital, quien con idéntica gentileza me proporcionó los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

A los profesores Paul Janssen y Noël Veraverbeke, por su calurosísima acogida durante una visita al Limbugs Universitair Centrum (Diepenbeek, Bélgica) en los tiempos en que se escribía esta tesis.

A Salvador Naya, que siempre estuvo al alcance de la mano, y a Germán Aneiros, que, aunque físicamente más lejos, seguía curiosamente estando al alcance de la mano.

A Araceli Torres, Marcelino Ladra y Vicente Suárez, compañeros de fatigas en la Escuela Universitaria Politécnica de Ferrol, que pusieron todos los días esa parte alícuota de amistad que se necesita para poder seguir adelante.

A Ana, cómplice.

Por fin, debo dejar constancia de mi agradecimiento por la financiación recibida de los Proyectos de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología PB98-0182-C02-01 y BFM2002-00265 y de los Proyectos Incentivo de la Xunta de Galicia PGIDT00PXII10501PN y PGIDIT03PXIC10505PN.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Análisis de supervivencia: conceptos fundamentales	1
1.1.1	Objeto y ámbito del Análisis de Supervivencia	1
1.1.2	Modelo de censura aleatoria	1
1.1.3	Funciones básicas	2
1.1.4	Modelos paramétricos de la distribución del tiempo de fallo	3
1.1.5	Estimación no paramétrica de las funciones básicas	4
1.2	Suavización de las funciones de densidad, riesgo y regresión	6
1.2.1	Suavización de la función de densidad	6
1.2.2	Suavización de la función de riesgo	9
1.2.3	Suavización de la función de regresión	9
2	Estimador de Nelson-Aalen presuavizado	13
2.1	Definición y propiedades del estimador de Nelson-Aalen presuavizado	13
2.2	Selección de la ventana ‘plug-in’	17
2.3	Simulaciones	129
3	Nuevos estimadores de la función de riesgo	141
3.1	Definición de los estimadores	141
3.1.1	Estimadores de tipo producto	141
3.1.2	Estimadores de Tanner-Wong presuavizados	143
3.2	Representaciones asintóticas	144
3.3	Normalidad asintótica	176
3.4	Ventanas asintóticamente óptimas	201
3.5	Simulaciones	207
4	Aplicación a datos reales	225
4.1	Conjuntos de datos	225
4.1.1	Datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe	225
4.1.2	Datos de cáncer gástrico	226
4.2	Resultados	227
4.2.1	Aplicación a los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe	227
4.2.2	Aplicación a los datos de cáncer gástrico	237
	Bibliografía	246

Capítulo 1

Introducción

*Durante el viaje, veían aquí y allá levantarse
murallas parciales terminadas.*

F. KAFKA, De la construcción de la muralla china.

1.1 Análisis de supervivencia: conceptos fundamentales

1.1.1 Objeto y ámbito del Análisis de Supervivencia

Bajo la denominación común de Análisis de Supervivencia se inscribe una serie de métodos estadísticos orientados primordialmente al estudio de la distribución del tiempo hasta la ocurrencia de un suceso puntual. En la literatura específica se suele designar dicho suceso como ‘fallo’ y al tiempo hasta su ocurrencia como ‘tiempo de fallo’, —sin menoscabo de que en ocasiones ambos se refieran a contextos (en principio) más positivos como, por ejemplo, el tiempo desde que un alumno inicia sus estudios de doctorado hasta que lee su tesis doctoral—. La disciplina debe en gran parte su auge a la riqueza e importancia de las aplicaciones en áreas tan diversas como Medicina, Epidemiología, Biología, Sismología o Ingeniería (donde aparece bajo la forma de Análisis de la Fiabilidad), pero simultáneamente ha propiciado ya desde sus inicios el surgimiento de algunos conceptos novedosos desde un punto de vista teórico (*v.g.* la ‘verosimilitud parcial’ de Cox (1975)) y ha servido de fértil campo de aplicación de construcciones teóricas como la teoría de martingalas o la teoría de los procesos de contar.

La presente introducción no es sino una brevísima revisión de algunos elementos del Análisis de Supervivencia directamente relacionados con el contenido de esta memoria. Se puede encontrar una visión del Análisis de Supervivencia en toda su amplitud consultando cualquiera de los múltiples textos sobre el tema. A título de ejemplo, vale citar: Kalbfleish y Prentice (1980), Lawless (1982), Cox y Oakes (1984), Andersen, Borgan, Gill y Keiding (1993) y Klein y Moeschberger (1997).

1.1.2 Modelo de censura aleatoria

Una de las características —más propiamente, una dificultad— de los datos de supervivencia, asociada íntimamente a las condiciones en que son obtenidos, es la frecuencia con la que aparecen *censurados*. Se dice que un dato está censurado cuando sólo se dispone de una cota para el tiempo de fallo. Si se trata de una cota superior se dice que la censura es por la izquierda, mientras que si la cota es inferior se habla de censura por la derecha, el tipo más frecuente en las aplicaciones.

Así, cuando un dato está censurado el tiempo observado no corresponde a un tiempo de fallo, pero la información parcial proporcionada por la observación no puede ser ignorada si se deben obtener inferencias correctas a partir de los datos. En general, cualquier discusión sobre el mecanismo de censura deberá tener en cuenta cómo han sido obtenidos los datos. En muchas aplicaciones, *v.g.* del campo de la Medicina (como las presentadas en el capítulo 4 de esta memoria), la censura por la derecha aparece de modo natural: no es en general factible extender la duración del estudio hasta que todos los pacientes ‘fallen’, máxime teniendo en cuenta que en general los pacientes entran en el estudio escalonadamente a medida que van apareciendo.

El mecanismo de censura que se supondrá en esta memoria constituye el denominado modelo de censura aleatoria por la derecha. De acuerdo con él, asociado al individuo i -ésimo de un total de n , $i = 1, 2, \dots, n$, hay un tiempo de fallo T_i (con función de distribución F continua) y un tiempo de censura C_i (con función de distribución G continua), mutuamente independientes, que no son directamente observables. Los vectores aleatorios (X_i, C_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ se suponen igualmente independientes. Los datos se observan en la forma de n pares (T_i, δ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, donde $T_i = \min(X_i, C_i)$ y $\delta_i = \mathbf{1}(X_i \leq C_i)$. Así, si el i -ésimo individuo falla $\delta_i = 1$ y T_i corresponde al tiempo de fallo, mientras que si está censurado $\delta_i = 0$ y T_i es el tiempo de censura. La distribución (común) de T_i , $i = 1, 2, \dots, n$ se denota por H y es inmediato comprobar que

$$1 - H(t) = (1 - F(t))(1 - G(t)). \quad (1.1)$$

1.1.3 Funciones básicas

Supóngase, como en la subsección anterior, que el tiempo de fallo X es una variable aleatoria absolutamente continua con función de distribución F y función de densidad f . Se define a continuación una serie de funciones que aunque desde un punto de vista matemático dan especificaciones equivalentes de la distribución de X , permiten destacar aspectos diferentes de ella. La función más elemental es la *función de supervivencia*, definida por

$$S_F(t) = P(X > t).$$

En palabras, el valor de la función de supervivencia en el tiempo t es igual a la probabilidad de que el individuo experimente el fallo con posterioridad al tiempo t . Es, por tanto, el complemento a 1 de la función de distribución, esto es,

$$S_F(t) = 1 - F(t).$$

La función de supervivencia proporciona una sencilla descripción de la progresión temporal de un grupo de individuos hacia el fallo o para comparar a este respecto diferentes grupos entre sí.

La *función de riesgo* se define por

$$\lambda_F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t | X \geq t)}{\Delta t}.$$

Más intuitivamente, $\lambda_F(t)\Delta t$ sería una aproximación de la probabilidad de que un individuo que no ha fallado antes del tiempo t lo haga en el siguiente periodo de tiempo de duración Δt .

Es fácil comprobar que

$$\lambda_F(t) = \frac{f(t)}{S_F(t)} = -\frac{d \log S_F(t)}{dt}. \quad (1.2)$$

La función de riesgo es especialmente útil para describir los cambios temporales de la probabilidad de experimentar un fallo. La Figura 1.1 muestra las principales tipologías que pueden presentarse.

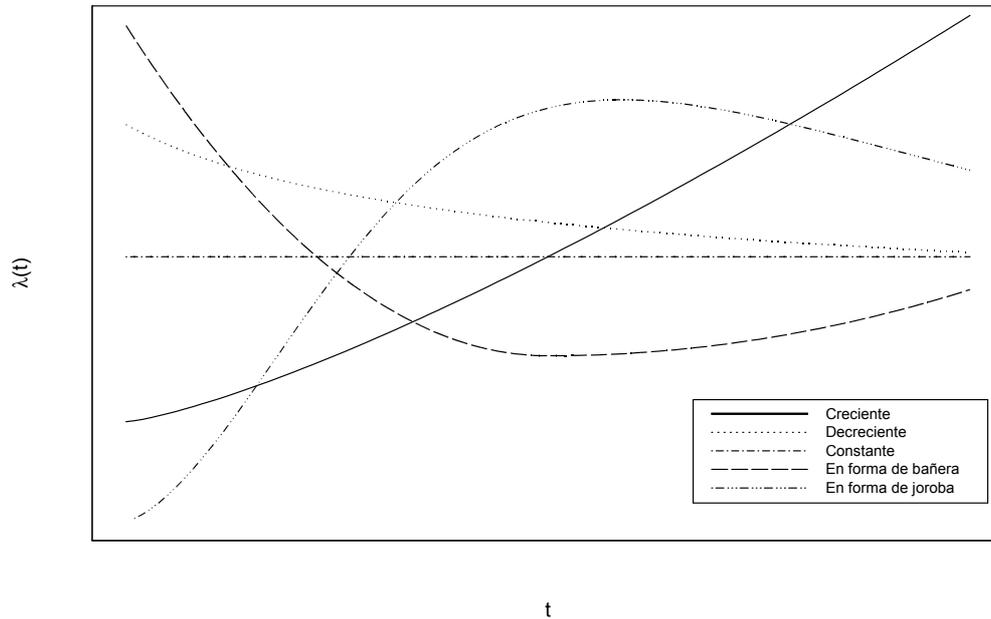


Figura 1.1. Algunas tipologías de la función de riesgo.

Relacionada con la función de riesgo está la *función de riesgo acumulativa*, que se define como

$$\Lambda_F(t) = \int_0^t \lambda_F(u) du. \quad (1.3)$$

Es inmediato obtener de (1.2) la relación

$$S_F(t) = \exp(-\Lambda_F(t)). \quad (1.4)$$

1.1.4 Modelos paramétricos de la distribución del tiempo de fallo

Aunque en esta memoria se trata exclusivamente el problema de la estimación no paramétrica de algunas de las funciones de la subsección anterior, conviene describir algunas de las distribuciones paramétricas más empleadas en la modelización de datos de supervivencia. De hecho, serán algunos de estos modelos los que se utilicen en los estudios de simulación que ilustran los métodos teóricos presentados en los siguientes capítulos.

Para evitar extenderse innecesariamente, la exposición se limita a los modelos exponencial, de Weibull, lognormal y loglogístico, que en algunos aspectos se pueden considerar representativos. Sus principales características se resumen en la Tabla 1.1.

En general, la conveniencia de un modelo es función de su flexibilidad para reproducir las características esenciales de la forma de la función de riesgo, reflejadas en la Figura 1.1. En este sentido, el modelo exponencial tiene un interés muy limitado, pues su función de riesgo es constante. Se cita aquí por su simplicidad, su interés histórico y porque, a pesar de todo, sigue siendo muy empleado en algunas áreas, como *v.g.* la Ingeniería Electrónica, donde se utiliza para modelizar el tiempo de vida de componentes como circuitos integrados de alta calidad o capacitores.

Tabla 1.1. Características de algunos modelos paramétricos del tiempo de fallo (ϕ y Φ denotan las funciones de densidad y de distribución de la normal estándar).

Distribución	Parámetros	$S_F(t)$	$f(t)$	$\lambda_F(t)$
Exponencial	$\beta > 0$	$\exp(-\beta t)$	$\beta \exp(-\beta t)$	β
Weibull	$\alpha > 0, \beta > 0$	$\exp(-\beta t^\alpha)$	$\beta \alpha t^{\alpha-1} \exp(-\beta t^\alpha)$	$\beta \alpha t^{\alpha-1}$
Lognormal	$\mu, \sigma > 0$	$1 - \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma t} \phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)$	$\frac{f(t)}{S_F(t)}$
Loglogística	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{1}{1 + \exp(-\alpha/\beta)t^{1/\beta}}$	$\frac{\exp(-\alpha/\beta)t^{1/\beta-1}}{\beta(1 + \exp(-\alpha/\beta)t^{1/\beta})^2}$	$\frac{\exp(-\alpha/\beta)t^{1/\beta-1}}{\beta(1 + \exp(-\alpha/\beta)t^{1/\beta})}$

En realidad, la distribución exponencial es el caso particular de la distribución de Weibull con parámetro de forma (α , en la Tabla 1.1) igual a 1. La popularidad de este modelo es debida a la capacidad de acomodar razones de fallo crecientes, decrecientes o constantes. Desde que fue propuesta para modelizar la fatiga de materiales (Weibull (1951)) se ha empleado con profusión sobre todo en problemas de fiabilidad, pero incidentalmente también en aplicaciones médicas o epidemiológicas (*v.g.* Vereerstraeten (1994), Matsushita *et al.* (1992)).

Un tiempo de fallo tiene distribución lognormal si el logaritmo del tiempo de fallo se distribuye normalmente. La función de riesgo vale 0 en el origen, aumenta monótonamente hasta alcanzar un máximo y decrece con posterioridad. A medida que aumenta el valor del parámetro σ (ver Tabla 1.1) el máximo se alcanza en tiempos cada vez más próximos al origen (para μ fijo).

Se dice que un tiempo de fallo tiene distribución loglogística si su logaritmo tiene distribución logística. Es una distribución muy similar a la anterior, lo que se refleja en las características semejantes de la función de riesgo.

1.1.5 Estimación no paramétrica de las funciones básicas

Como se mencionó más arriba, en esta monografía se aborda el problema de la estimación de algunas de las funciones definidas en la subsección 1.1.3 —concretamente, la función de riesgo y la función de riesgo acumulativa— empleando métodos no paramétricos. Por tanto, se soslaya la consideración de métodos de estimación paramétricos, desarrollados sobre el supuesto de que la distribución del tiempo de fallo pertenece a alguna familia paramétrica del tipo de las descritas en la subsección anterior. Como es sabido, la mayor eficiencia de estos últimos métodos se consigue al precio de incrementar el riesgo de cometer un error de especificación del modelo, que podría llegar a invalidar las inferencias obtenidas.

Bajo el modelo de censura aleatoria por la derecha, el estimador estándar de la función de supervivencia $S_F(t)$ es el *estimador de Kaplan-Meier* (Kaplan y Meier (1958)), $S_n^{KM}(t)$, definido por

$$S_n^{KM}(t) = \prod_{i: T_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{\delta_{[i]}}{n - i + 1}\right) \quad (1.5)$$

donde $\delta_{[i]}$ denota el concomitante de $T_{(i)}$. Se sobreentiende que para $t < T_{(1)}$ es $S_n^{KM}(t) = 1$. De acuerdo con la definición original, cuando $T_{(n)}$ corresponde a un dato censurado, suele suponerse que $S_n^{KM}(t)$ no está definida para $t > T_{(n)}$ (*cf.* Efron (1967) y Gill (1980) para otras definiciones alternativas).

El estimador de Kaplan-Meier disfruta de cierto número de propiedades convenientes. Es el estimador de máxima verosimilitud no paramétrico de $S_F(t)$ (Kaplan-Meier (1958), Johansen (1978)). En cuanto a sus propiedades asintóticas, bajo condiciones bastante generales $S_n^{KM}(t)$ es un estimador

uniformemente consistente de $S_F(t)$ en intervalos compactos $[0, \tau]$ para los que $S_F(\tau) > 0$. Bajo el modelo de censura aleatoria, Breslow y Crowley (1974) demostraron la convergencia débil del proceso $\sqrt{n}(S_n^{KM}(t) - S_F(t))$, $0 < t < \tau$, a un proceso límite gaussiano.

Se obtiene de modo natural un estimador de la función de riesgo acumulativa a partir de la ecuación (1.4), tomando logaritmos naturales y reemplazando la función de supervivencia por el estimador de Kaplan-Meier,

$$\widehat{\Lambda}_F(t) = -\log S_n^{KM}(t).$$

No obstante, es más utilizado el denominado *estimador de Nelson-Aalen* (Nelson (1972), Aalen (1978)), definido por

$$\Lambda_n^{NA}(t) = \sum_{i:T_{(i)} \leq t}^n \frac{\delta_{[i]}}{n - i + 1}$$

donde $\delta_{[i]}$ denota el concomitante de $T_{(i)}$. Estos dos estimadores son en realidad asintóticamente equivalentes, siendo el estimador de Nelson-Aalen una aproximación de primer orden del primer estimador. En la práctica, con muestras de tamaño pequeño el estimador de Nelson-Aalen parece comportarse mejor. En cualquier caso, las diferencias entre ambas estimaciones sólo suelen hacerse perceptibles para valores grandes de t .

Respecto a sus propiedades asintóticas, el estimador de Nelson-Aalen es un estimador uniformemente consistente de $\Lambda_F(t)$ en intervalos compactos $[0, \tau]$ para los que $\Lambda_F(\tau) < \infty$. Bajo el modelo de censura aleatoria, puede probarse la convergencia débil del proceso $\sqrt{n}(\Lambda_n^{NA}(t) - \Lambda_F(t))$, $0 < t < \tau$, a una martingala gaussiana.

Finalmente, el estimador de Nelson-Aalen tiene también una interpretación en términos de estimador de máxima verosimilitud.

En el capítulo siguiente de esta memoria se dedica al estudio de una versión modificada del estimador de Nelson-Aalen, el denominado estimador de Nelson-Aalen suavizado.

De las distintas aproximaciones a la estimación de la función de riesgo bajo el modelo de censura aleatoria que se pueden encontrar en la literatura, aquí se tomarán en consideración sólo dos estimadores: el propuesto por Blum y Susarla (1980) y el de Tanner y Wong (1983). Tienen en común los dos estimadores el ser de tipo núcleo, con ventana fija. De los métodos restantes, a los que no se volverá a aludir, se pueden destacar: el estimador de tipo histograma de Liu y Van Ryzin (1985); el estimador de núcleo con ventana local de Cheng (1987), basado en la distancia al k -ésimo vecino más próximo; el estimador de núcleo con ventana variable de Müller y Wang (1994) y el estimador de Patil (1997), basado en onditas ('wavelets').

Se define el estimador de Tanner y Wong —al que se designará con el nombre de *estimador de Tanner-Wong*— como

$$\widehat{\lambda}_{TW}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_n}(t - T_i) \delta_i}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} \quad (1.6)$$

donde H_n es la función de distribución empírica del tiempo observado, K_{b_n} es el núcleo reescalado, $K_{b_n} = \frac{1}{b_n} K\left(\frac{x}{b_n}\right)$ y b_n el parámetro de suavización o ventana (para los conceptos de núcleo y ventana, ver la sección siguiente). Un estimador esencialmente idéntico fue propuesto independientemente por Yandell (1983) y Ramlau-Hansen (1983) (basado éste en la teoría de los procesos de contar).

Se define el estimador de Blum y Susarla —al que se aludirá como *estimador de Blum-Susarla*— como

$$\widehat{\lambda}_{BS}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_n}(t - T_i) \delta_i}{1 - H_n(t) + \frac{1}{n}} \quad (1.7)$$

donde H_n y K_{b_n} tienen la misma interpretación que en el estimador de Tanner-Wong. En realidad, para evitar problemas con el denominador, se ha dado una definición del estimador ligeramente modificada respecto a la original de Blum y Susarla, donde no aparece el término $\frac{1}{n}$.

Una cuestión fundamental, inherente a la estimación de tipo núcleo en este u otros contextos, es la de la selección del parámetro de suavización b_n . En el caso del estimador de Tanner-Wong, se ha propuesto un selector de ventana basado en el método de validación cruzada y se ha probado su optimalidad asintótica (Patil (1993)), extendiendo al caso con censura resultados similares para datos no censurados (Sarda y Vieu (1991)). González Manteiga, Cao y Marron (1996) estudian un selector de ventana para el estimador de Tanner-Wong basado en el ‘bootstrap’ que se comporta en las simulaciones favorablemente respecto al anterior.

1.2 Suavización de las funciones de densidad, riesgo y regresión

1.2.1 Suavización de la función de densidad

En varias partes de esta memoria surge la necesidad de estimar la función de densidad correspondiente a una variable completamente observada (es decir, no sujeta a censura). Se empleará entonces un estimador de tipo núcleo, en correspondencia con el enfoque no paramétrico hasta ahora expuesto. Desde los trabajos pioneros de Rosenblatt (1956), Whittle (1958) y Parzen (1962), el estimador de tipo núcleo se ha convertido sin duda en el método más estudiado en relación con este problema. Es también el más empleado en la práctica después del histograma, frente al que presenta claras ventajas: la más evidente, la mayor suavidad de la estimación obtenida, acorde con las hipótesis de regularidad que con frecuencia se está dispuesto a hacer sobre la función de densidad que se trata de estimar. Referencias accesibles sobre el tema son, por ejemplo: Silverman (1986), Wand y Jones (1995) y Simonoff (1996).

El *estimador de Parzen-Rosenblatt* de la función de densidad f se define como

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_n}(x - X_i)$$

donde $K_{b_n}(t) = \frac{1}{b_n} K\left(\frac{x}{b_n}\right)$, K es la función núcleo y $b_n > 0$ el parámetro de suavización o ventana. En su forma más general el núcleo es cualquier función que verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1,$$

pero es usual que se trate de una función de densidad simétrica con momento de segundo orden finito. Por otra parte, como se suele suponer que f goza de cierto grado de suavidad y \widehat{f} hereda todas las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de K , es frecuente que el núcleo satisfaga ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad.

La Figura 1.2 ilustra mediante un ejemplo el funcionamiento del estimador de Parzen-Rosenblatt. Intuitivamente, el estimador se obtiene centrando en cada observación un núcleo reescalado, lo que

gráficamente se manifiesta como una ‘elevación’, y promediando esas ‘elevaciones’. Con más precisión, la estimación en un punto x es la media de las ordenadas de los núcleos reescalados en ese punto. Como se puede ver en la Figura 1.2 el papel del núcleo es controlar la forma de las ‘elevaciones’ y el de la ventana su anchura. Es un hecho bien conocido (*cf.* Silverman (1986), Wand y Jones (1995)) que mientras el núcleo no es un factor decisivo en la estimación, la elección de una ventana adecuada es de suma importancia. Ventanas demasiado pequeñas dan lugar a una estimación con variabilidad excesiva (infrasuavizada), mientras que si son demasiado grandes provocan una estimación sesgada (sobresuavizada).

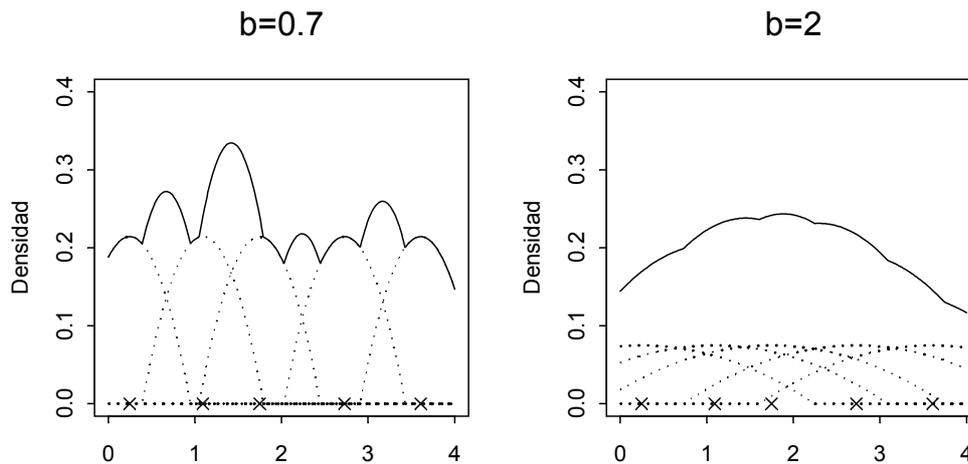


Figura 1.2. Estimación de tipo núcleo de la densidad a partir de 5 observaciones con ventanas $b = 0.7$ y 2 , empleando el núcleo de Epanechnikov, $K(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) \mathbf{1}(|x| < 1)$. La estimación es la línea continua. En la base de la figura se representan (líneas punteadas) las evaluaciones del núcleo reescalado (y dividido por n) centradas en las observaciones.

El problema de la selección de la ventana aparece ligado a la definición de medidas adecuadas del error cometido al estimar la densidad f por un estimador \hat{f} . La más empleada es, seguramente, el error cuadrático medio integrado, definido por

$$MISE(\hat{f}) = E \left[\int (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right].$$

Como el $MISE(\hat{f})$ depende de la ventana de una manera complicada, es más conveniente considerar su aproximación para tamaño muestral grande, el $MISE(\hat{f})$ asintótico o $AMISE(\hat{f})$, pues permite interpretar de modo sencillo la influencia de la ventana en el comportamiento del estimador. Bajo condiciones que no procede detallar aquí (*cf.* Wand y Jones (1995)) sobre K , la velocidad a la que la sucesión de ventanas b_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito y la regularidad de f , y definiendo $\mu_K = \int x^2 K(x) dx$, se tiene

$$MISE(\hat{f}) = AMISE(\hat{f}) + o(n^{-1}b_n^{-1} + b_n^4)$$

donde

$$AMISE(\hat{f}) = \frac{1}{4}b_n^4\mu_K^2 \int f''(x)^2 dx + \frac{1}{nb_n} \int K(x)^2 dx. \quad (1.8)$$

El término $\frac{1}{4}b_n^4\mu_K^2 \int f''(x)^2 dx$ representa el cuadrado del sesgo de \hat{f} integrado y $\frac{1}{nb_n} \int K(x)^2 dx$ su varianza integrada, de modo que la expresión del $AMISE(\hat{f})$ puede interpretarse en términos de un compromiso entre sesgo y varianza que define el papel crucial de la ventana: con ventanas cada vez menores se reduce el sesgo al precio de una variabilidad aumentada; con ventanas cada vez mayores ocurre lo contrario.

De (1.8) es inmediato obtener una expresión explícita para la ventana óptima en el sentido de minimizar el $AMISE$, b_{AMISE} ,

$$\tilde{b}_{AMISE} = \left(\frac{\int K(x)^2 dx}{n\mu_K^2 \int f''(x)^2 dx} \right)^{1/5}, \quad (1.9)$$

a la que se designará como ventana $AMISE$ -óptima.

Obviamente, la expresión (1.9) no puede ser directamente utilizada para elegir una ventana en la práctica, por depender de la cantidad desconocida $\int f''(x)^2 dx$, a su vez dependiente de la densidad que se quiere estimar. No obstante, se dispone actualmente de métodos de selección ‘plug-in’, llamados así porque se basan en reemplazar en (1.9) $\int f''(x)^2 dx$ por una estimación conveniente, que exhiben un comportamiento bastante satisfactorio, tanto teórico como práctico (Sheather y Jones (1991)). Otros selectores con buenas propiedades son los basados en el ‘bootstrap’ suavizado. Por el contrario, los clásicos métodos de validación cruzada parece que deben ser desestimados, tanto por razones teóricas como prácticas (Cao, Cuevas y González Manteiga (1994), Hall y Marron (1987)).

Surgirá en varias ocasiones a lo largo de la memoria la necesidad de estimar la derivada k -ésima de una función de densidad f . Un estimador natural de la derivada k -ésima de $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, es la derivada k -ésima del estimador $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \sum K_{b_n}^{(k)}(x - X_i)$$

donde

$$K_{b_n}^{(k)}(x) = \frac{1}{b_n^{k+1}} K^{(k)}\left(\frac{x}{b_n}\right).$$

En varios lugares de esta memoria se hace uso del siguiente teorema, que versa sobre la convergencia uniforme en probabilidad del estimador de Parzen-Rosenblatt \hat{f} de la densidad f . En él se supondrá que el núcleo K cumple la condición **(C)**, que formulamos aparte:

(C) K es una función uniformemente continua con módulo de continuidad w_K y variación acotada $V(K)$, que verifica $K(u) = K(-u)$, $\int |K(u)| du < \infty$, $\lim_{u \rightarrow 0} K(u) = 0$ y $\int |u \log |u||^{1/2} |d(K(u))| < \infty$.

Teorema 1.2.1 (Silverman (1978)) Si el núcleo K satisface la condición **(C)**, f es uniformemente continua, $b_n \rightarrow 0$ y $n^{1-\varepsilon} b_n \rightarrow \infty$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{f}(x) - E[\hat{f}(x)] \right| = O_P \left(n^{-1/2} b_n^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right).$$

Observación 1.2.1 *En realidad, aunque el resultado original de Silverman (1978) sólo trata de las propiedades de convergencia de \hat{f} , puede ser extendido a sus derivadas sucesivas siguiendo directamente los argumentos empleados en su demostración. Las hipótesis (V.1) y (V.2) sobre la sucesión de ventanas que serán aplicadas en la sección 2.2, imponen que la generalización que a continuación se propone se limite al caso de la primera derivada.*

Así, si bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2) y (H.1) detalladas en la página 15 del capítulo 2, se define $J = [\varepsilon/2, t_0]$, entonces se verifica para $k = 0, 1$,

$$\sup_{t \in J} \left| \hat{f}^{(k)}(t) - f^{(k)}(t) \right| = O_P \left(b_n^2 + n^{-1/2} b_n^{-1/2-k} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right). \quad (1.10)$$

Obsérvese que, a diferencia del teorema 1.2.1, en (1.10) se ha incluido la aportación del término del sesgo, $\sup_{t \in J} \left| E \left[\hat{f}^{(k)}(t) \right] - f^{(k)}(t) \right|$, analizándolo mediante expansiones de Taylor.

1.2.2 Suavización de la función de riesgo

La función de riesgo es fundamental en análisis de supervivencia, motivo por el cual fue ya considerada en la sección anterior bajo el supuesto del modelo de censura aleatoria. La estimación no paramétrica de la función de riesgo ha sido igualmente estudiada en el contexto más simple de datos sin censura. También en este caso, muchos de los estimadores propuestos son de tipo núcleo (ver las revisiones de Singpurwalla y Wong (1983), Hassani *et al.* (1986)). Algunos de los estimadores mejor conocidos de la función de riesgo pueden ser derivados a partir de la ecuación fundamental ya conocida

$$\lambda_F(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

que en todo caso pone de evidencia la conexión existente entre los problemas de estimación de la densidad y la función de riesgo. En esta monografía se emplearán los dos estimadores siguientes: el estimador propuesto por Watson y Leadbetter (1964),

$$\hat{\lambda}_{WL}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_n}(t - T_i)}{1 - F_n(T_i) + \frac{1}{n}} \quad (1.11)$$

y el estimador semejante al propuesto por Rice y Rosenblatt (1976) (muy similar a su vez a otro estudiado anteriormente por Murthy (1965))

$$\hat{\lambda}_{RR}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_n}(t - T_i)}{1 - F_n(t) + \frac{1}{n}} \quad (1.12)$$

donde F_n denota la función de distribución empírica. En lo sucesivo, cuando se aluda a ellos se hará bajo las denominaciones de *estimador de Watson-Leadbetter* y *estimador de Rice-Rosenblatt*, respectivamente.

1.2.3 Suavización de la función de regresión

La función de regresión describe la relación entre una variable explicativa X y una variable respuesta Y . Se supondrá que los datos constituyen una muestra de n pares de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ (es decir, un diseño aleatorio). Los datos se pueden modelizar por la ecuación

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $m(x) = E(Y | X = x)$ es la función de regresión y ε_i el error cometido en la i -ésima observación.

La mayoría de los estimadores no paramétricos de la función de regresión pueden escribirse en la forma

$$\hat{m}(x) = \sum_{i=1}^n W_i(x, X_1, X_2, \dots, X_n) Y_i \quad (1.13)$$

donde $\{W_i(x, X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{i=1}^n$ es una sucesión de pesos. Se reducen por tanto a una media ponderada de las respuestas, en la que los pesos controlan el carácter más o menos local de la estimación. De este tipo son precisamente los dos estimadores no paramétricos de la regresión que se emplearán en diversas partes de esta memoria, el estimador de tipo núcleo de Nadaraya-Watson y el estimador local lineal, que se describen a continuación brevemente. Puede encontrarse un tratamiento más exhaustivo de estos estimadores en los textos de Härdle (1990), Wand y Jones (1995), Simonoff (1996) y Fan y Gijbels (1996).

En lo sucesivo se supondrá que (X, Y) tiene función de densidad conjunta f y que la función de regresión de Y sobre X es $m(x) = \frac{\psi(x)}{h(x)}$, donde h denota la densidad marginal de X y $\psi = mh$.

El *estimador de Nadaraya-Watson* (Nadaraya (1964), Watson (1964)) se define como

$$\hat{m}_{NW}(x) = \frac{\frac{1}{n} \sum K_{b_n}(x - X_i) Y_i}{\frac{1}{n} \sum K_{b_n}(x - X_i)}.$$

Empleando la notación

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \frac{1}{n} \sum K_{b_n}(x - X_i) Y_i, \\ \hat{h}(x) &= \frac{1}{n} \sum K_{b_n}(x - X_i), \end{aligned}$$

puede escribirse

$$\hat{m}_{NW}(x) = \frac{\hat{\psi}(x)}{\hat{h}(x)}.$$

Es posible aplicar la estimación de tipo núcleo igualmente a la obtención de estimadores de la derivada de la función de regresión. Se puede estimar $m'(x)$ mediante la derivada respecto a x de $\hat{m}_{NW}(x)$, obteniéndose así el estimador de la derivada de la función de regresión de tipo núcleo

$$\hat{m}'_{NW}(x) = \frac{\hat{\psi}'(x)\hat{h}(x) - \hat{\psi}(x)\hat{h}'(x)}{\hat{h}(x)^2}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\psi}'(x) &= \frac{1}{n} \sum K'_{b_n}(x - X_i) Y_i, \\ \hat{h}'(x) &= \frac{1}{n} \sum K'_{b_n}(x - X_i), \\ K'_{b_n}(x) &= \frac{1}{b_n^2} K' \left(\frac{x}{b_n} \right), \end{aligned}$$

siendo a su vez $\widehat{h}'(x)$ y $\widehat{\psi}'(x)$ estimadores de $h'(x)$ y $\psi'(x)$, respectivamente. La misma idea puede aplicarse a la estimación de derivadas sucesivas.

En el capítulo siguiente se hará uso de los dos teoremas siguientes, similares al teorema 1.2.1. Para los dos se requiere la condición **(C)**, enunciada en el epígrafe dedicado a la estimación de la densidad. El primero de ellos proporciona la tasa de convergencia uniforme en probabilidad del estimador \widehat{m}_{NW} .

Teorema 1.2.2 (Mack y Silverman (1982)). *Si el núcleo K verifica la condición **(C)**; J es un intervalo acotado en que h está acotada inferiormente por un número estrictamente positivo; para algún $s > 2$, $E[|Y|^s] < \infty$ y $\sup_x \int |y|^s f(x, y) dy < \infty$; f es continua en un intervalo abierto que contiene a J y ψ y h tienen segunda derivada acotada; $n^{2\eta-1}b_n \rightarrow \infty$, para algún $\eta < 1 - s^{-1}$ y $nb_n^5 \left(\log \frac{1}{b_n}\right)^{-1} \rightarrow 0$; entonces*

$$\sup_{x \in J} |\widehat{m}_{NW}(x) - m(x)| = O_P \left(n^{-1/2} b_n^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right).$$

El segundo teorema es un resultado sobre la tasa de convergencia uniforme de $\widehat{\psi}$ similar al teorema 1.2.1 para el estimador de la densidad.

Teorema 1.2.3 (Mack y Silverman (1982)) *Si el núcleo K satisface la condición **(C)**; para algún $s > 0$, $E[|Y|^s] < \infty$ y $\sup_x \int |y|^s f(x, y) dy < \infty$; $b_n \rightarrow 0$ y $n^\eta b_n \rightarrow \infty$, para algún $\eta < 1 - s^{-1}$, entonces*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(x) - E[\widehat{\psi}(x)] \right| = O_P \left(n^{-1/2} b_n^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right).$$

Observación 1.2.2 *Como se señaló en la observación 1.2.1, se considera una extensión de los teoremas 1.2.2-1.2.3 al caso de las derivadas de m, ψ y sus estimadores. La extensión se obtiene siguiendo directamente los argumentos empleados en la demostración por Mack y Silverman (1982) sólo tratan de las propiedades de convergencia de \widehat{m}_{NW} y $\widehat{\psi}$. De acuerdo con las hipótesis **(V.1)** y **(V.2)** sobre la sucesión de ventanas que serán aplicadas en la sección 2.2, la generalización que se propone a continuación se limita a la primera derivada.*

*Así, si bajo las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(P.2)** y **(H.1)** detalladas en la página 15 del capítulo 2, se define $J = [\varepsilon/2, t_0]$, entonces se verifica para $k = 0, 1$,*

$$\sup_{t \in J} \left| \widehat{m}_{NW}^{(k)}(t) - m^{(k)}(t) \right| = O_P \left(n^{-1/2} b_n^{-1/2-k} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right), \quad (1.14)$$

$$\sup_{t \in J} \left| \widehat{\psi}^{(k)}(t) - \psi^{(k)}(t) \right| = O_P \left(b_n^2 + n^{-1/2} b_n^{-1/2-k} \left(\log \frac{1}{b_n} \right)^{1/2} \right). \quad (1.15)$$

Nótese que, a diferencia del teorema 1.2.1, en (1.15) se ha incluido la aportación del término del sesgo, $\sup_{t \in J} \left| E[\widehat{\psi}^{(k)}(t)] - \psi^{(k)}(t) \right|$.

El *estimador local lineal* es un caso particular (como se verá, el estimador de Nadaraya-Watson es en realidad otro) de un estimador más general, el *estimador polinómico local*. El concepto de estimador polinómico local está conectado con la resolución por el método de mínimos cuadrados de un problema de regresión polinómica ponderada. Denotando por $(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_r)$ al vector minimizador de

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - [\beta_0 + \beta_1(x - X_i) + \dots + \beta_r(x - X_i)^r])^2 K_{b_n}(x - X_i),$$

el estimador polinómico local de $m(x)$ se define como

$$\widehat{m}_{PL}(x) = \widehat{\beta}_0.$$

El estimador local lineal corresponde al caso $r = 1$ y el propio estimador de Nadaraya-Watson se obtiene tomando $r = 0$, lo que justificaría la denominación alternativa de estimador local constante.

Más en general, del componente $\widehat{\beta}_k$ se obtiene un estimador de la derivada k -ésima de $m(x)$, para $1 \leq k \leq r$, concretamente,

$$\widehat{m}_{PL}^{(k)}(x) = \widehat{\beta}_k k!.$$

Un problema importante es el de la elección del grado r del polinomio. En teoría, el comportamiento asintótico del estimador $\widehat{m}_{PL}(x)$ mejora al aumentar r , pero, en la práctica, con valores altos de r sólo se consigue con frecuencia ganancias marginales y al precio de un aumento de la variabilidad del estimador. Más clara, pero siempre desde un punto de vista asintótico, es la ventaja de los estimadores polinómicos locales de grado impar frente a los de grado par inmediatamente inferior: el efecto frontera es previsiblemente menor y la expresión del sesgo asintótico condicional es más fácilmente interpretable en los de grado impar.

El razonamiento contenido en el párrafo anterior favorecería por tanto el uso de estimadores polinómicos locales de grado moderado e impar, como los estimadores locales lineal y cúbico.

Para el caso del estimador local lineal, que se denotará por $\widehat{m}_{LL}(x)$, puede darse una expresión explícita relativamente simple de la forma (1.13),

$$\widehat{m}_{LL}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{b_n}(x - X_i) (s_{n,2}(t) - (x - X_i)s_{n,1}(x)) Y_i}{\sum_{i=1}^n K_{b_n}(x - X_i) (s_{n,2}(x) - (x - X_i)s_{n,1}(x))}$$

donde, para $j = 1, 2$, las funciones $s_{n,j}$ están definidas por

$$s_{n,j}(t) = \sum_{i=1}^n K_{b_n}(x - X_i)(x - X_i)^j.$$

Como es típico de los métodos de suavización que emplean una función núcleo, la estimación polinómica local depende fuertemente de la ventana b_n . Prácticamente todos los selectores de ventana propuestos en el caso de la estimación de la densidad pueden ser adaptados al contexto de la regresión. A título de ejemplo y por ser utilizado en el capítulo final de esta memoria, bastará con citar de la multiplicidad de selectores existentes el de Ruppert, Sheather y Wand (1995), que, basado en la metodología ‘plug-in’, reúne propiedades teóricas y prácticas convenientes.

Capítulo 2

Estimador de Nelson-Aalen presuavizado

But, soft! what light through yonder window breaks?

W. SHAKESPEARE, Romeo y Julieta, Acto II, Escena II.

2.1 Definición y propiedades del estimador de Nelson-Aalen presuavizado

Es conveniente motivar el estimador de Nelson-Aalen presuavizado poniéndolo en relación con el propio estimador de Nelson-Aalen, que, como se comentó en el capítulo introductorio, es el estimador clásico de la función de riesgo acumulativa.

Se define la probabilidad condicional de no censura como la función

$$p(t) = P(\delta_i = 1 | T_i = t) = E(\delta_i | T_i = t),$$

que tendrá una relevancia especial a lo largo de la presente memoria.

Si por H^{nc} se denota la función de subdistribución de los datos no censurados, *i.e.*,

$$H^{nc}(t) = P(T_i \leq t, \delta_i = 1),$$

se verifica

$$H^{nc}(t) = \int_0^t (1 - G(x)) dF(x), \quad (2.1)$$

o, equivalentemente, empleando $p(t)$,

$$H^{nc}(t) = \int_0^t p(x) dH(x). \quad (2.2)$$

De este modo, a partir de la siguiente expresión para $\Lambda_F(t)$, que por (1.2) equivale a (1.3),

$$\Lambda_F(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - F(x)} dF(x)$$

y de la relación (1.1), según se considere (2.1) o (2.2) se obtienen las expresiones alternativas para $\Lambda_F(t)$,

$$\Lambda_F(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - H(x)} dH^{nc}(x) \quad (2.3)$$

y

$$\Lambda_F(t) = \int_0^t \frac{p(x)}{1 - H(x)} dH(x). \quad (2.4)$$

El estimador de Nelson-Aalen, $\Lambda_n^{NA}(t)$, se obtiene reemplazando en (2.3) $H(x)$ y $H^{nc}(x)$ por sus respectivas versiones empíricas,

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(T_i \leq x)$$

y

$$H_n^{nc}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(T_i \leq x) \delta_i.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{NA}(t) &= \int_0^t \frac{1}{1 - H_n(x-)} dH_n^{nc}(x) = \sum_{i:T_i \leq t} \frac{\frac{\delta_i}{n}}{1 - \frac{1}{n}(R_i - 1)} = \sum_{i:T_i \leq t} \frac{\delta_i}{n - R_i + 1} \\ &= \sum_{i:T_{(i)} \leq t} \frac{\delta_{[i]}}{n - i + 1} \end{aligned}$$

donde $\delta_{[i]}$ denota el indicador de censura concomitante de $T_{(i)}$.

Si, por el contrario, se reemplaza en (2.4) H por la función de distribución empírica H_n y p por el estimador de Nadaraya-Watson

$$\hat{p}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{b_n}(t - T_i) \delta_i}{\sum_{i=1}^n K_{b_n}(t - T_i)}$$

donde b_n es una sucesión de ventanas convergente a cero y $K_{b_n}(t) = K(t/b_n)/b_n$, se obtiene el estimador

$$\Lambda_n^P(t) = \sum_{i:T_{(i)} \leq t} \frac{\hat{p}(T_{(i)})}{n - i + 1}, \quad (2.5)$$

que se denominará *estimador de Nelson-Aalen presuavizado*. (En adelante, se omitirá el subíndice n de la sucesión de ventanas).

Conviene observar en este lugar que, de la misma manera que el estimador de la función de supervivencia de Kaplan-Meier, definido en (1.5), se obtiene a partir del estimador de Nelson-Aalen reemplazando en la ecuación

$$S_F(t) = \exp(-\Lambda_F(t))$$

$\Lambda_F(t)$ por $\Lambda_n^{NA}(t)$ y aproximando $\exp(-x)$ por $1-x$, cuando se reemplaza $\Lambda_F(t)$ por $\Lambda_n^P(t)$ y se emplea la misma aproximación se obtiene el estimador de la función de supervivencia

$$S_n^P(t) = \prod_{i:T(i) \leq t} \left(1 - \frac{\widehat{p}(T(i))}{n-i+1} \right), \quad (2.6)$$

que se denominará *estimador de Kaplan-Meier presuavizado*.

En Cao y Jácome (2004) se deriva a partir de $S_n^P(t)$ el estimador de la función de densidad de tipo núcleo presuavizado

$$f_n^P(t) = \sum_{i=1}^n K_{b_n}(t - T_i) (F_n^P(T_i) - F_n^P(T_i-))$$

donde

$$F_n^P(t) = 1 - S_n^P(t)$$

es la función de distribución presuavizada y $F_n^P(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} F_n^P(t)$.

Estimadores relacionados con (2.5) y (2.6) son los estudiados por Dikta (1998). Este autor supone que p pertenece a una familia paramétrica indexada por el parámetro θ , *i.e.*, $p(t) = p(t, \theta)$, y propone estimar p mediante $p_n(x) = p(x, \widehat{\theta})$, siendo $\widehat{\theta}$ el estimador de máxima verosimilitud de θ . En su trabajo se prueba la convergencia uniforme fuerte de estos estimadores semiparamétricos.

Igualmente relacionado con (2.5) está el estimador de la función de riesgo acumulativa estudiado por Ziegler (1995),

$$\Lambda_n^Z(t) = \int_0^{b \wedge t} \frac{1}{1 - H_n(x-)} dH_n^{nc}(x) + \int_{b \wedge t}^t \frac{\widehat{p}(x)}{1 - H_n(x-)} dH_n(x)$$

donde $b = b(n)$ es una sucesión de ventanas convergente a cero a una determinada tasa. Se trata, por tanto, de un estimador que coincide con $\Lambda_n^{NA}(t)$ en un entorno del cero y con $\Lambda_n^P(t)$ en el área de integración restante. Como la propia autora reconoce, estas diferencias de $\Lambda_n^Z(t)$ respecto a $\Lambda_n^P(t)$ pretenden soslayar problemas técnicos en la frontera. Su estudio establece la convergencia débil del proceso estocástico $\sqrt{n}(\Lambda_n^Z(t) - \Lambda_F(t))$ y caracteriza su límite.

En el resto del capítulo se aplicarán las siguientes hipótesis:

- sobre la función núcleo, K ,
- (K.1)** K es una función no negativa, simétrica, dos veces derivable con segunda derivada acotada, verifica $\int_{-L}^L K(x)dx = 1$, tiene soporte en el intervalo $[-L, L]$, $L > 0$, y $K(L) = K'(L) = K''(L) = 0$.
- sobre la función de probabilidad condicional de no censura, p ,
- (P.1)** p es cinco veces derivable en $[0, \infty)$, con quinta derivada continua.
- (P.2)** Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon = \sup\{t : p(x) = 1, \forall x \in [0, t]\}$.
- sobre la función de distribución, H ,
- (H.1)** Existe t_0 tal que $0 < \varepsilon < t_0$ y $H(t_0) < 1$, H es cinco veces derivable en $[0, t_0]$, con quinta derivada continua y existe $\delta > 0$ tal que $H'(t) = h(t) > \delta, \forall t \in [\varepsilon/2, t_0]$.
- sobre la función de peso, w ,
- (W.1)** w es no negativa, con soporte en el intervalo $(\varepsilon/2, t_0)$ y derivable dos veces en $[\varepsilon/2, t_0]$, con segunda derivada continua.

Las condiciones **(K.1)**, **(P.1)** y **(H.1)** son condiciones de regularidad estándar. El grado de diferenciabilidad exigido en **(P.1)** y **(H.1)** puede relajarse para los resultados asintóticos que se dan

a continuación en esta misma sección, pero es necesario para los resultados de la siguiente sección, referentes a la selección de la ventana ‘plug-in’. La condición **(P.2)** es de tipo técnico y, en principio, algo sorprendente. Esencialmente afirma que un tiempo de vida no puede estar censurado por un número arbitrariamente pequeño: debe existir alguna cota inferior positiva para el tiempo de censura. Esta no parece ser una condición excesivamente restrictiva para las aplicaciones a datos reales.

Bajo las anteriores condiciones, Cao, López de Ullibarri, Janssen y Veraverbeke (2003) dan la siguiente representación de $\Lambda_n^P(t) - \Lambda_F(t)$ como suma de variables aleatorias i.i.d..

Teorema 2.1.1 *Bajo las condiciones (K.1), (H.1), (P.1) y $b = c_0 n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha})$, para algún α , $1/4 < \alpha < 1/2$, y algún $c_0 > 0$, se tiene*

$$\Lambda_n^P(t) - \Lambda_F(t) = \overline{\Lambda}_n^P(t) - \Lambda_F(t) + o_P(n^{-1/2}) \quad (2.7)$$

donde

$$\overline{\Lambda}_n^P(t) = \Lambda_F(t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_1(T_i) - r_2(T_i) + r_3(T_i, \delta_i)) \quad (2.8)$$

y

$$r_1(T_i) = \frac{p(t)}{1 - H(t)} (\mathbf{1}(T_i \leq t) - H(t)), \quad (2.9)$$

$$r_2(T_i) = \int_0^t \frac{\mathbf{1}(T_i \leq s) - H(s)}{1 - H(s)} p'(s) ds, \quad (2.10)$$

$$r_3(T_i, \delta_i) = \int_0^t \frac{K_b(s - T_i)(\delta_i - p(s))}{1 - H(s)} ds. \quad (2.11)$$

En el mismo trabajo se dan las siguientes representaciones asintóticas para el sesgo y la varianza de $\overline{\Lambda}_n^P(t)$,

$$E[\overline{\Lambda}_n^P(t) - \Lambda_F(t)] = \mu_K \alpha(t) b^2 + o(b^2), \quad (2.12)$$

$$Var[\overline{\Lambda}_n^P(t)] = \frac{1}{n} \left(\int_0^t \frac{1}{(1 - H(s))^2} dH^{nc}(s) - 2e_K b q(t) \right) + O(n^{-1} b^2) \quad (2.13)$$

donde se ha empleado la notación

$$\begin{aligned} \mu_K &= \int_{-L}^L K(x) x^2 dx, \\ e_K &= \int_{-L}^L y K(y) \int_{-L}^y K(x) dx dy, \\ \alpha(t) &= \int_0^t \frac{\frac{1}{2} p''(s) h(s) + p'(s) h'(s)}{1 - H(s)} ds, \\ q(t) &= \frac{p(t)(1 - p(t)) h(t)}{(1 - H(t))^2}. \end{aligned}$$

De (2.12) y (2.13) se obtiene la siguiente expresión para el error cuadrático medio de $\overline{\Lambda}_n^P(t)$

$$MSE(\overline{\Lambda}_n^P(t)) = AMSE(\overline{\Lambda}_n^P(t)) + o(b^4 + n^{-1} b) \quad (2.14)$$

donde

$$AMSE(\overline{\Lambda}_n^P(t)) = \frac{1}{n} \int_0^t \frac{1}{(1 - H(s))^2} dH^{nc}(s) - \frac{2}{n} b e_K q(t) + \mu_K^2 b^4 \alpha^2(t). \quad (2.15)$$

De los anteriores resultados los mismos autores concluyen la eficiencia asintótica de segundo orden de $\overline{\Lambda}_n^P(t)$ respecto a $\Lambda_n^{NA}(t)$.

2.2 Selección de la ventana ‘plug-in’

Integrando con respecto a t la expresión (2.14) para el $MSE(\overline{\Lambda}_n^P(t))$ multiplicada por la función de peso w , se obtiene la siguiente expresión para el error cuadrático medio integrado ponderado, $MISE_w(\overline{\Lambda}_n^P)$,

$$MISE_w(\overline{\Lambda}_n^P) = AMISE_w(\overline{\Lambda}_n^P) + o(b^4 + n^{-1}b) \quad (2.16)$$

donde

$$AMISE_w(\overline{\Lambda}_n^P) = \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{(1-H(s))^2} dH^{nc}(s) w(t) dt - \frac{b}{n} 2e_K Q + b^4 \mu_K^2 A$$

y se ha definido

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty q(t) w(t) dt, \\ A &= \int_0^\infty \alpha^2(t) w(t) dt. \end{aligned}$$

El término despreciable de la representación (2.16) procede de la integración de los términos despreciables de (2.14) multiplicados por w . Se puede probar su despreciableidad respecto a $AMISE_w(\overline{\Lambda}_n^P)$ aplicando el teorema de convergencia acotada si se tiene en cuenta la condición **(W.1)** y que los términos de orden $o(b^4 + n^{-1}b)$ de (2.14) son restos de desarrollos de Taylor en que, como consecuencia de las hipótesis **(K.1)**, **(P.1)** y **(H.1)**, intervienen funciones acotadas.

Por tanto, la ventana óptima en el sentido de minimizar el $AMISE_w(\overline{\Lambda}_n^P)$ es

$$b_{OPT} = \arg \min_{b>0} AMISE_w(\overline{\Lambda}_n^P) = \left(\frac{e_K Q}{2\mu_K^2 n A} \right)^{1/3}. \quad (2.17)$$

Se propone el siguiente selector de tipo ‘plug-in’ de b

$$\hat{b} = \left(\frac{e_k \hat{Q}}{2\mu_k^2 n \hat{A}} \right)^{1/3}$$

donde

$$\hat{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{p}(T_i) (1 - \hat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n})^2}, \quad (2.18)$$

$$\hat{A} = \int_0^\infty \hat{\alpha}^2(t) w(t) dt, \quad (2.19)$$

$$\hat{\alpha}(t) = \int_0^t \frac{\frac{1}{2} \hat{p}'(s) \hat{h}(s) + \hat{p}(s) \hat{h}'(s)}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} ds \quad (2.20)$$

y \hat{p} , \hat{p}' y \hat{p}'' son los estimadores de Nadaraya-Watson de p y de sus derivadas primera y segunda, respectivamente,

$$\hat{p}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_g(t - T_i) \delta_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_g(t - T_i)} = \frac{\hat{\psi}(t)}{\hat{h}(t)}, \quad (2.21)$$

$$\widehat{p}'(t) = \frac{\widehat{\psi}'(t)\widehat{h}(t) - \widehat{\psi}(t)\widehat{h}'(t)}{\widehat{h}(t)^2}, \quad (2.22)$$

$$\widehat{p}''(t) = \frac{\widehat{\psi}''(t)\widehat{h}(t)^2 - \widehat{\psi}'(t)\widehat{h}''(t)\widehat{h}(t) - 2\widehat{\psi}'(t)\widehat{h}'(t)\widehat{h}(t) + 2\widehat{\psi}(t)\widehat{h}'(t)^2}{\widehat{h}(t)^3} \quad (2.23)$$

donde, denotando por $f^{(k)}$ la derivada k -ésima de f ,

$$\widehat{\psi}^{(k)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_g^{(k)}(t - T_i) \delta_i,$$

$$\widehat{h}^{(k)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_g^{(k)}(t - T_i),$$

$$K_g^{(k)}(t) = \frac{1}{g^{k+1}} K^{(k)}\left(\frac{t}{g}\right)$$

y se ha definido el estimador de $\widehat{p}^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, como la derivada k -ésima de $\widehat{p}(t)$, \widehat{h} y \widehat{h}' son los estimadores de Parzen-Rosenblatt de la densidad h y de su primera derivada, respectivamente, y H_n es la función de distribución empírica de los T_i .

Obsérvese que existen relaciones similares a las dadas en (2.21), (2.22) y (2.23) para las cantidades poblacionales. En efecto,

$$p(t) = \frac{\psi(t)}{h(t)}, \quad (2.24)$$

$$p'(t) = \frac{\psi'(t)h(t) - \psi(t)h'(t)}{h(t)^2}, \quad (2.25)$$

$$p''(t) = \frac{\psi''(t)h(t)^2 - \psi(t)h''(t)h(t) - 2\psi'(t)h'(t)h(t) + 2\psi(t)h'(t)^2}{h(t)^3} \quad (2.26)$$

donde h es la función de densidad del tiempo observable y $\psi = ph$.

De modo típico, el cálculo efectivo de \widehat{b} requiere a su vez la elección de sendas ventanas piloto, g_1 y g_2 , para los estimadores \widehat{A} y \widehat{Q} , respectivamente. Como paso preliminar a la elección de las ventanas piloto se hallarán sendas expresiones asintóticas de los errores cuadráticos medios $E[(\widehat{A} - A)^2]$ y $E[(\widehat{Q} - Q)^2]$. El criterio para la elección de las ventanas piloto g_1 y g_2 consiste en la minimización de la parte dominante de la expresión correspondiente.

En el resto del capítulo, además de las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(P.2)**, **(H.1)**, **(W.1)**, **(V.1)** y **(V.2)** enunciadas en la sección anterior se emplearán dos hipótesis adicionales sobre las ventanas piloto, g_1 y g_2 ,

$$\text{(V.1)} \quad ng_1^3 \left(\log \frac{1}{g_1}\right)^{-3} \rightarrow \infty \text{ y } ng_1^5 \left(\log \frac{1}{g_1}\right)^{-1} \rightarrow 0.$$

$$\text{(V.2)} \quad ng_2^{8/3} \rightarrow \infty \text{ y } ng_2^4 \rightarrow 0.$$

La segunda parte de la condición **(V.1)** es necesaria para poder aplicar los teoremas 1.2.1-1.2.3.

La hipótesis **(P.2)** garantiza que para t en el intervalo $[0, \varepsilon/2]$ existe un valor de la ventana (común) de los estimadores $\widehat{p}''(s)$ y $\widehat{p}'(s)$ de $\widehat{\alpha}(t)$ tal que para ventanas menores que él se verifica con probabilidad 1 que $\widehat{\alpha}(t) = 0$. Por esta razón al estudiar el comportamiento asintótico de \widehat{A} se considera en su lugar el término equivalente

$$\widehat{A}_{\varepsilon/2} = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t \frac{\frac{1}{2}\widehat{p}''(s)\widehat{h}(s) + \widehat{p}'(s)\widehat{h}'(s)}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} ds \right)^2 w(t) dt$$

donde se ha definido $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$.

Lema 2.2.1 *Bajo las condiciones (K.1), (H.1), (W.1) y (V.1), se tiene*

$$\widehat{A}_{\varepsilon/2} = \widehat{A}_1 + o_P(\widehat{A}_1)$$

donde

$$\widehat{A}_1 = \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r)}{1 - H(r)} \frac{\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s)}{1 - H(s)} w(t) dr ds dt. \quad (2.27)$$

Demostración. Empleando (2.22) y (2.23)

$$\widehat{A}_{\varepsilon/2} = \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r)}{1 - H_n(r) + \frac{1}{n}} \frac{\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s)}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} w(t) dr ds dt.$$

La naturaleza aleatoria del denominador sugiere representar $\widehat{A}_{\varepsilon/2}$ como suma de dos términos, el primero de los cuales reemplaza la función de distribución empírica por la función de distribución poblacional. Así

$$\widehat{A}_{\varepsilon/2} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$$

donde \widehat{A}_1 es el término definido en (2.27) y

$$\begin{aligned} \widehat{A}_2 &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \left(\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r) \right) \left(\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(1 - H_n(r) + \frac{1}{n})(1 - H_n(s) + \frac{1}{n})} - \frac{1}{(1 - H(r))(1 - H(s))} \right) w(t) dr ds dt. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Este último término puede igualmente expresarse como

$$\begin{aligned} \widehat{A}_2 &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\left(\int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r)}{1 - H_n(r) + \frac{1}{n}} dr \right)^2 - \left(\int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r)}{1 - H(r)} dr \right)^2 \right) w(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r) \right) \left(\frac{1}{1 - H(r)} - \frac{1}{1 - H_n(r) + \frac{1}{n}} \right) dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t \left(\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s) \right) \left(\frac{1}{1 - H(s)} + \frac{1}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} \right) ds w(t) dt. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\widehat{A}_2| &\leq \frac{1}{4} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t \left(\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r) \right) \left(\frac{1}{1 - H(r)} - \frac{1}{1 - H_n(r) + \frac{1}{n}} \right) dr \right)^2 w(t) dt \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^u \left(\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s) \right) \left(\frac{1}{1 - H(s)} + \frac{1}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} \right) ds \right)^2 w(u) du \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Evidentemente,

$$\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^u \left(\widehat{\psi}''(s) - \widehat{p}(s)\widehat{h}''(s) \right) \left(\frac{1}{1-H(s)} + \frac{1}{1-H_n(s) + \frac{1}{n}} \right) ds \right)^2 w(u)du = O_P \left(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_{\varepsilon/2} \right).$$

Por otra parte, haciendo operaciones y aplicando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t \left(\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r) \right) \left(\frac{1}{1-H(r)} - \frac{1}{1-H_n(r) + \frac{1}{n}} \right) dr \right)^2 w(t)dt \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{\psi}''(r) - \widehat{p}(r)\widehat{h}''(r)}{1-H(r)} \frac{H_n(r) - H(r) - \frac{1}{n}}{1-H_n(r) + \frac{1}{n}} dr \right)^2 w(t)dt \\ &\leq \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{\widehat{\psi}''(r_1) - \widehat{p}(r_1)\widehat{h}''(r_1)}{1-H(r_1)} \right)^2 dr_1 \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{H_n(r_2) - H(r_2) - \frac{1}{n}}{1-H_n(r_2) + \frac{1}{n}} \right)^2 dr_2 w(t)dt. \end{aligned}$$

Como cualquiera que sea r_2

$$1 - H_n(r_2) + \frac{1}{n} = 1 - H(r_2) - (H_n(r_2) - H(r_2)) + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} - H(r_2)$$

y bajo la hipótesis **(H.1)** existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que para todo $n \geq n_0$ y $r_2 > \varepsilon'$ se verifica $|\frac{1}{n} - H(r_2)| > \delta$, es inmediato comprobar que debido a la hipótesis **(W.1)**

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{\widehat{\psi}''(r_1) - \widehat{p}(r_1)\widehat{h}''(r_1)}{1-H(r_1)} \right)^2 dr_1 \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{H_n(r_2) - H(r_2) - \frac{1}{n}}{1-H_n(r_2) + \frac{1}{n}} \right)^2 dr_2 w(t)dt \\ &\leq \frac{2t_0}{\delta^2} \left(\sup_{\varepsilon' < r_2 < t_0} (H_n(r_2) - H(r_2))^2 + \frac{1}{n^2} \right) \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{\widehat{\psi}''(r_1) - \widehat{p}(r_1)\widehat{h}''(r_1)}{1-H(r_1)} \right)^2 dr_1 w(t)dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sup_{\varepsilon' < r_2 < t_0} |H_n(r_2) - H(r_2)| = O_P \left(n^{-1/2} \right)$$

y la hipótesis **(V.1)** se concluye que

$$\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{\widehat{\psi}''(r_1) - \widehat{p}(r_1)\widehat{h}''(r_1)}{1-H(r_1)} \right)^2 dr_1 \int_{\varepsilon'}^t \left(\frac{H_n(r_2) - H(r_2) - \frac{1}{n}}{1-H_n(r_2) + \frac{1}{n}} \right)^2 dr_2 w(t)dt = O_P \left(n^{-1} \right)$$

y, volviendo a (2.29),

$$\widehat{A}_2 = O_P \left(\left(\left(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_{\varepsilon/2} \right) n^{-1} \right)^{1/2} \right). \quad (2.30)$$

Si, como se hará evidente más adelante, se tiene en cuenta que $\frac{1}{n\widehat{A}_1} = o_P(1)$ es inmediato comprobar que

$$\widehat{A}_2 = o_P \left(\widehat{A}_1 \right).$$

■

Observación 2.2.1 Más adelante se hará uso de la acotación $\widehat{A}_2 = O_P(n^{-1/2})$, que se deduce inmediatamente de (2.30).

El término \widehat{A}_1 de (2.27) sigue sin estar linealizado, ya que el estimador \widehat{p} conlleva la presencia de un nuevo denominador aleatorio. Se consigue su linealización factorizando primeramente la expresión $\widehat{\psi}'' - \widehat{p}\widehat{h}''$ de la manera siguiente (para mayor concisión, se omite la variable)

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}'' - \widehat{p}\widehat{h}'' &= \psi'' - ph'' + \widehat{\psi}'' - \psi'' - p(\widehat{h}'' - h'') - \frac{(\widehat{\psi} - \psi)h''}{h} + \frac{p(\widehat{h} - h)h''}{h} \\ &\quad + (\widehat{p} - p) \left(\frac{(\widehat{h} - h)h''}{h} - (\widehat{h}'' - h'') \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\widehat{p} - p = \frac{\widehat{\psi} - \psi}{h} - \frac{p(\widehat{h} - h)}{h} - \frac{(\widehat{p} - p)(\widehat{h} - h)}{h}. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.31) en la expresión (2.27) se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1 - H(r)} \left(\psi''(r) - p(r)h''(r) + \widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(r) - \psi(r))h''(r)}{h(r)} + \frac{p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{p}(r) - p(r)) \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - H(s))} \left(\psi''(s) - p(s)h''(s) + \widehat{\psi}''(s) - \psi''(s) - p(s)(\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(s) - \psi(s))h''(s)}{h(s)} + \frac{p(s)(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{p}(s) - p(s)) \left(\frac{(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} - (\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right) \right) w(t) dr ds dt \end{aligned}$$

y como, teniendo en cuenta (2.25) y (2.26),

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\frac{1}{2}p''(s)h(s) + p'(s)h'(s)}{1 - H(s)} ds \right)^2 w(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\psi''(s) - p(s)h''(s)}{1 - H(s)} ds \right)^2 w(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^t \int_0^t \frac{\psi''(r) - p(r)h''(r)}{1 - H(r)} \frac{\psi''(s) - p(s)h''(s)}{1 - H(s)} w(t) dr ds dt, \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 &= A + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1 - H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(r) - \psi(r))h''(r)}{h(r)} + \frac{p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} \right) \alpha(t) w(t) dr dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(r) - \psi(r))h''(r)}{h(r)} + \frac{p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} \right) \\
& \times \frac{1}{1-H(s)} \left(\widehat{\psi}''(s) - \psi''(s) - p(s)(\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(s) - \psi(s))h''(s)}{h(s)} + \frac{p(s)(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} \right) w(t) dr ds dt \\
& + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{p}(r) - p(r)}{1-H(r)} \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\widehat{\psi}(r) - \psi(r))h''(r)}{h(r)} + \frac{p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} \right) \\
& \times \frac{1}{1-H(s)} (\widehat{p}(s) - p(s)) \left(\frac{(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} - (\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right) w(t) dr ds dt \\
& + \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} (\widehat{p}(r) - p(r)) \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \\
& \times \frac{1}{1-H(s)} (\widehat{p}(s) - p(s)) \left(\frac{(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} - (\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right) w(t) dr ds dt.
\end{aligned}$$

Repitiendo la linealización con el antepenúltimo de los anteriores sumandos,

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{p}(r) - p(r)}{1-H(r)} \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt \\
= & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\frac{\widehat{\psi}(r) - \psi(r)}{h(r)} - \frac{p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))}{h(r)} \right) \\
& \times \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt \\
& - \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} (\widehat{p}(r) - p(r)) (\widehat{h}(r) - h(r)) \\
& \times \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt.
\end{aligned}$$

Definiendo ahora

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{11} = & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\
& \left. - \frac{h''(r)}{h(r)} (\widehat{\psi}(r) - \psi(r) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r))) \right) \alpha(t) w(t) dr dt, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{12} &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{h''(r)}{h(r)} \left(\widehat{\psi}(r) - \psi(r) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r)) \right) \right) \\
&\quad \times \frac{1}{1-H(s)} \left(\widehat{\psi}''(s) - \psi''(s) - p(s)(\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{h''(s)}{h(s)} \left(\widehat{\psi}(s) - \psi(s) - p(s)(\widehat{h}(s) - h(s)) \right) \right) w(t) dr ds dt, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{13} &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{(1-H(r))} \frac{1}{h(r)} \left(\widehat{\psi}(r) - \psi(r) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r)) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{14} &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{h''(r)}{h(r)} \left(\widehat{\psi}(r) - \psi(r) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r)) \right) \right) \\
&\quad \times \frac{\widehat{p}(s) - p(s)}{1-H(s)} \left(\frac{(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} - (\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right) w(t) dr ds dt \\
&\quad - \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{1-H(r)} (\widehat{p}(r) - p(r)) (\widehat{h}(r) - h(r)) \\
&\quad \times \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \alpha(t) w(t) dr dt \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t \frac{\widehat{p}(r) - p(r)}{1-H(r)} \left(\frac{(\widehat{h}(r) - h(r))h''(r)}{h(r)} - (\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \\
&\quad \times \frac{\widehat{p}(s) - p(s)}{1-H(s)} \left(\frac{(\widehat{h}(s) - h(s))h''(s)}{h(s)} - (\widehat{h}''(s) - h''(s)) \right) w(t) dr ds dt, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

se obtiene la representación

$$\widehat{A}_1 - A = \widehat{A}_{11} + \widehat{A}_{12} + \widehat{A}_{13} + \widehat{A}_{14},$$

o, de modo más compacto, definiendo $\widetilde{A}_1 = \widehat{A}_1 - \widehat{A}_{14}$, la representación alternativa

$$\widehat{A}_1 - A = \widetilde{A}_1 - A + \widehat{A}_{14}, \tag{2.37}$$

cuyos términos se estudian a continuación. Es conveniente observar que excepción hecha de \widehat{A}_{14} , que reúne el resto no linealizado de \widehat{A}_1 , los términos \widehat{A}_{11} , \widehat{A}_{12} y \widehat{A}_{13} se distinguen entre sí por el número de veces que aparecen en ellos los factores $(\widehat{\psi} - \psi)$, $(\widehat{h} - h)$, $(\widehat{\psi}'' - \psi'')$ y $(\widehat{h}'' - h'')$. Así, \widehat{A}_{11} es el único término en que aparecen una sola vez. Aparecen dos veces tanto en \widehat{A}_{12} como en \widehat{A}_{13} , pero mientras en éste los dos factores dependen de la misma variable, en aquél dependen cada uno de una variable distinta.

Para simplificar las expresiones que en adelante irán apareciendo se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
c_K &= \int_{-L}^L K(x)^2 dx, & \text{y, en general,} & & c_{K^{(r)}} &= \int_{-L}^L K^{(r)}(x)^2 dx, \text{ para } r = 1, 2, \dots, \\
\alpha_w &= \alpha w, & A_w(x) &= \int_x^\infty \alpha_w(t) dt, \\
z_1 &= (1 - H)^{-1}, & z_{11} &= z_1(1 - p), & z_{12} &= z_1 p, \\
z_{111} &= z_{11} \alpha_w, & z_{112} &= z'_{11} \alpha_w, \\
z_{121} &= z_{12} \alpha_w, & z_{122} &= z'_{12} \alpha_w, \\
z_2 &= -(1 - H)^{-1} h'' h^{-1}, & z_{21} &= z_2(1 - p), & z_{22} &= z_2 p, \\
z_3 &= -(1 - H)^{-1} h^{-2}, & z_{31} &= z_3(1 - p), & z_{32} &= z_3 p, \\
\phi &= (1 - p)h, & \zeta &= \psi'' - ph''.
\end{aligned}$$

Lema 2.2.2 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.1) se tiene*

$$\begin{aligned}
E \left[\widehat{A}_{11} \right] &= \frac{1}{2} g_1^2 \mu_K \int_\varepsilon^\infty \int_\varepsilon^t \frac{1}{1 - H(r)} \left(p^{(4)}(r)h(r) + 4p^{(3)}(r)h'(r) + 5p''(r)h''(r) \right. \\
&\quad \left. + 4p'(r)h^{(3)}(r) - \frac{2p'(r)h'(r)h''(r)}{h(r)} \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
Var \left[\widehat{A}_{11} \right] &= \frac{1}{n} \left(\int_\varepsilon^\infty (2z'_{11}(x)\alpha_w(x) + z_{11}(x)\alpha'_w(x) - A_w(x)z''_{11}(x))^2 \psi(x) dx \right. \\
&\quad + \int_\varepsilon^\infty (2z'_{12}(x)\alpha_w(x) + z_{12}(x)\alpha'_w(x) - A_w(x)z''_{12}(x))^2 \phi(x) dx \\
&\quad - 4 \left(\int_\varepsilon^\infty \alpha(t)^2 w(t) dt \right)^2 + \int_\varepsilon^\infty z_2(x)^2 A_w(x)^2 (1 - p(x))p(x)h(x) dx \\
&\quad + 2 \int_\varepsilon^\infty (A_w(x)(z''_{11}(x) + z''_{12}(x)) - z'_{111}(x) - z'_{121}(x) - z_{112}(x) - z_{122}(x)) \\
&\quad \left. \times A_w(x)z_2(x)(1 - p(x))p(x)h(x) dx \right) + o(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Demostración. Se tiene

$$\widehat{A}_{11} = \widehat{A}_{111} + \widehat{A}_{112}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{111} &= \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\widehat{\psi}''(r) - p(r)\widehat{h}''(r) - \zeta(r) \right) \alpha(t)w(t) dr dt, \\
\widehat{A}_{112} &= \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) \alpha(t)w(t) dr dt.
\end{aligned}$$

La tesis del lema es una consecuencia inmediata de los lemas 2.2.3-2.2.7, que se enuncian y demuestran a continuación. ■

Lema 2.2.3 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\begin{aligned}
E \left[\widehat{A}_{111} \right] &= \frac{1}{2} g_1^2 \mu_K \int_\varepsilon^\infty \int_\varepsilon^t z_1(r) \left(p^{(4)}(r)h(r) + 4p^{(3)}(r)h'(r) \right. \\
&\quad \left. + 6p''(r)h''(r) + 4p'(r)h^{(3)}(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2). \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
E \left[\widehat{A}_{111} \right] &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}''(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\
&\quad - \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \zeta(r) \alpha_w(t) dr dt \\
&= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] - 2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \quad (2.39)
\end{aligned}$$

y definiendo

$$I_{111}(g_1) = E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right],$$

se tiene

$$\begin{aligned}
I_{111}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - x) (p(x) - p(r)) \alpha_w(t) h(x) dr dt dx \\
&= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_0^{\infty} z_1(r) K_{g_1}''(r - x) (p(x) - p(r)) \alpha_w(t) h(x) dx dr dt \\
&= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} z_1(r) K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt \\
&= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^{\frac{r}{g_1} \wedge L} z_1(r) K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado el teorema de Fubini, el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$ y se ha tenido en cuenta que K'' se anula fuera del intervalo $[-L, L]$. Es evidente que para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$ es $\frac{r}{g_1} \wedge L = L$, de modo que en estas condiciones

$$I_{111}(g_1) = \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^L z_1(r) K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt.$$

Considerando los desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r

$$p(r - g_1 x_1) - p(r) = \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i p^{(i)}(r) - \frac{1}{5!} g_1^5 x_1^5 p^{(5)}(\theta_1),$$

$$h(r - g_1 x_1) = \sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i h^{(i)}(r) + \frac{1}{4!} g_1^4 x_1^4 h^{(4)}(\theta_2)$$

donde θ_1 y θ_2 son puntos intermedios entre $r - g_1 x_1$ y r , se obtiene

$$\begin{aligned}
I_{111}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^L z_1(r) K''(x_1) \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i p^{(i)}(r) \\
&\quad \times \sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i h^{(i)}(r) \alpha_w(t) dx_1 dr dt + o(g_1^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{g_1} \int_{-L}^L K''(x_1)x_1 dx_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t p'(r)z_1(r)h(r)\alpha_w(t) dr dt \\
&+ \int_{-L}^L K''(x_1)x_1^2 dx_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2}p''(r)h(r) + h'(r)p'(r) \right) \alpha_w(t) dr dt \\
&- g_1 \int_{-L}^L K''(x_1)x_1^3 dx_1 \\
&\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2}p'(r)h''(r) + \frac{1}{2}p''(r)h'(r) + \frac{1}{3!}p^{(3)}(r)h(r) \right) \alpha_w(t) dr dt \\
&+ g_1^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^L z_1(r)K''(x_1)x_1^4 \\
&\times \left(\frac{1}{3!}p'(r)h^{(3)}(r) + \frac{1}{4}p''(r)h''(r) + \frac{1}{3!}p^{(3)}(r)h'(r) + \frac{1}{4!}p^{(4)}(r)h(r) \right) \alpha_w(t) dx_1 dr dt \\
&+ o(g_1^2).
\end{aligned}$$

Bajo la condición **(K.1)** es fácil comprobar integrando por partes que

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L K''(x_1)x_1 dx_1 &= 0, & \int_{-L}^L K''(x_1)x_1^2 dx_1 &= 2, \\
\int_{-L}^L K''(x_1)x_1^3 dx_1 &= 0, & \int_{-L}^L K''(x_1)x_1^4 dx_1 &= 12\mu_K,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
I_{111}(g_1) &= 2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt + \frac{1}{2}g_1^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(p^{(4)}(r)h(r) + 4p^{(3)}(r)h'(r) \right. \\
&\quad \left. + 6p''(r)h''(r) + 4p'(r)h^{(3)}(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E \left[\widehat{A}_{111} \right] &= \frac{1}{2}g_1^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(p^{(4)}(r)h(r) + 4p^{(3)}(r)h'(r) \right. \\
&\quad \left. + 6p''(r)h''(r) + 4p'(r)h^{(3)}(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2).
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado (2.38) se obtiene como consecuencia de **(P.2)**. ■

Lema 2.2.4 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$E \left[\widehat{A}_{112} \right] = g_1^2 \mu_K \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^t z_2(r) \left(\frac{1}{2}p''(r)h(r) + p'(r)h'(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2). \tag{2.42}$$

Demostración. La demostración es similar a la del lema previo. Así, se tiene

$$\begin{aligned}
E \left[\widehat{A}_{112} \right] &= E \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right) \\
&= E \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right) \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) \alpha_w(t) dr dt dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^{\frac{r-x}{g_1} \wedge L} z_2(r) K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt$$

donde se ha aplicado el teorema de Fubini y el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$. Razonando como se hizo en el caso de \widehat{A}_{111} , para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$ es $\frac{r-x}{g_1} \wedge L = L$, luego, bajo estas condiciones,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{A}_{112} \right] &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-L}^L z_2(r) K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt \\ &= -g_1 \int_{-L}^L K(x_1) x_1 dx_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) p'(r) h(r) \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad + g_1^2 \int_{-L}^L K(x_1) x_1^2 dx_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\frac{1}{2} p''(r) h(r) + p'(r) h'(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2) \\ &= g_1^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\frac{1}{2} p''(r) h(r) + p'(r) h'(r) \right) \alpha_w(t) dr dt + o(g_1^2) \end{aligned}$$

donde, análogamente a como se hizo al estudiar \widehat{A}_{111} , se han realizado sendos desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r . Para llegar al resultado (2.42) basta una vez más con tener en cuenta la condición (P.2). ■

Lema 2.2.5 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\begin{aligned} Var \left[\widehat{A}_{111} \right] &= \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} (2z'_{11}(x) \alpha_w(x) + z_{11}(x) \alpha'_w(x) - A_w(x) z''_{11}(x))^2 \psi(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} (2z'_{12}(x) \alpha_w(x) + z_{12}(x) \alpha'_w(x) - A_w(x) z''_{12}(x))^2 \phi(x) dx \\ &\quad - \frac{4}{n} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \right)^2 + o(n^{-1}). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} Var \left[\widehat{A}_{111} \right] &= Var \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\widehat{\psi}''(r) - p(r) \widehat{h}''(r) - \zeta(r) \right) \alpha(t) w(t) dr dt \right] \\ &= Var \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\widehat{\psi}''(r) - p(r) \widehat{h}''(r) \right) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= Var \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K''_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= \frac{1}{n} Var \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K''_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= \frac{1}{n} E \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K''_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \right] - \frac{1}{n} I_{111}(g_1)^2 \end{aligned}$$

donde $I_{111}(g_1)$ se definió en la demostración del lema 2.2.3. Definiendo

$$J^{1,1}(g_1) = E \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K''_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \right],$$

se tiene

$$J^{1,1}(g_1) = J_1^{1,1}(g_1) + J_2^{1,1}(g_1) \quad (2.44)$$

donde, a su vez, se ha definido

$$\begin{aligned} J_1^{1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^\infty \int_\varepsilon^t z_{11}(r) K''_{g_1}(r-x) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ J_2^{1,1}(g_1) &= \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K''_{g_1}(r-x) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Nótese que al determinar los límites de integración en las expresiones anteriores se ha tenido expresamente en cuenta que las funciones z_{11} y ϕ son nulas en el intervalo $[0, \varepsilon]$. Se estudia a continuación cada uno de los dos términos de la descomposición (2.44). Haciendo en $J_1^{1,1}(g_1)$ el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$,

$$J_1^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \psi(x) dx$$

y como, integrando por partes y teniendo en cuenta que $z_{11}(\varepsilon) = z'_{11}(\varepsilon) = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \\ = & K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) - K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) z_{11}(\varepsilon) - g_1 \left(K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) - K \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) z'_{11}(\varepsilon) \right) \\ & + g_1^2 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 \\ = & K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) - g_1 K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) + g_1^2 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

se tiene

$$\begin{aligned} J_1^{1,1}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\ & - \frac{2}{g_1^3} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) \alpha_w(t) dt \int_\varepsilon^\infty K \left(\frac{m-x}{g_1} \right) z'_{11}(m) \alpha_w(m) dm \psi(x) dx \\ & + \frac{1}{g_1^2} \int_0^\infty \left(\int_\varepsilon^\infty K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\ & + \frac{2}{g_1^2} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) \alpha_w(t) dt \\ & \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx \\ & - \frac{2}{g_1} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) \alpha_w(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx \\
& + \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \psi(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Haciendo según convenga los cambios de variable $\frac{t-x}{g_1} = t_1$ o $\frac{t-x}{g_1} = t_1, \frac{m-x}{g_1} = m_1$ en los anteriores sumandos, se tiene

$$J_1^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^2} J_{11}^{1,1}(g_1) - \frac{2}{g_1} J_{12}^{1,1}(g_1) + J_{13}^{1,1}(g_1) + \frac{2}{g_1} J_{14}^{1,1}(g_1) - 2J_{15}^{1,1}(g_1) + J_{16}^{1,1}(g_1) \tag{2.47}$$

donde

$$\begin{aligned}
J_{11}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \right)^2 \psi(x) dx, \\
J_{12}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) z_{112}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx, \\
J_{13}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(t_1) z_{112}(x + g_1 t_1) dt_1 \right)^2 \psi(x) dx, \\
J_{14}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx, \\
J_{15}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(t_1) z_{112}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx, \\
J_{16}^{1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Respecto a $J_{11}^{1,1}(g_1)$,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{11}^{1,1}(g_1) = \left(\int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \right)^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{111}(x)^2 \psi(x) dx = 0.$$

Sus dos primeras derivadas son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dg_1} J_{11}^{1,1}(g_1) &= 2 \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \left(K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z_{111}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1 z'_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \right) \psi(x) dx \\
&= 2 \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1 z'_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx
\end{aligned}$$

y

$$\frac{d^2}{dg_1^2} J_{11}^{1,1}(g_1) = 2 \int_0^{\infty} \left(K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z_{111}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1 z'_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx \\
& + 2 \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
& \times \left(K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{(\varepsilon-x)^2}{g_1^3} z'_{111}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1^2 z''_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx \right) \\
= & 2 \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1 z'_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx \\
& + 2 \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(m_1) m_1^2 z''_{111}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $z_{111}(\varepsilon) = z'_{111}(\varepsilon) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{d}{dg_1} J_{11}^{1,1}(g_1) &= 2 \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K'(m_1) m_1 dm_1 \int_\varepsilon^\infty z_{111}(x) z'_{111}(x) \psi(x) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{d^2}{dg_1^2} J_{11}^{1,1}(g_1) &= 2 \left(\int_{-L}^L K'(t_1) t_1 dt_1 \right)^2 \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x)^2 \psi(x) dx \\
&+ 2 \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K'(m_1) m_1^2 dm_1 \int_\varepsilon^\infty z_{111}(x) z''_{111}(x) \psi(x) dx \\
&= 2 \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x)^2 \psi(x) dx,
\end{aligned}$$

ya que $\int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 = 0$ y $\int_{-L}^L K'(t_1) t_1 dt_1 = -1$. Se obtiene así el siguiente desarrollo de Taylor de $J_{11}^{1,1}(g_1)$ en 0

$$J_{11}^{1,1}(g_1) = g_1^2 \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x)^2 \psi(x) dx + o(g_1^2). \quad (2.48)$$

La derivada de $J_{12}^{1,1}(g_1)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dg_1} J_{12}^{1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \left(K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z_{111}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \right) \\
&\times \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) z_{112}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx \\
&+ \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\times \left(K \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z_{112}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) m_1 z'_{112}(x + g_1 m_1) dm_1 \right) \psi(x) dx \\
= & \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) z_{112}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) m_1 z'_{112}(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx$$

donde se ha tenido en cuenta que $z_{111}(\varepsilon) = z_{112}(\varepsilon) = 0$. Como

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{12}^{1,1}(g_1) = \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) dm_1 \int_\varepsilon^\infty z_{111}(x) z_{112}(x) \psi(x) dx = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{d}{dg_1} J_{12}^{1,1}(g_1) &= \int_{-L}^L K'(t_1) t_1 dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) dm_1 \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x) z_{112}(x) \psi(x) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) m_1 dm_1 \int_\varepsilon^\infty z_{111}(x) z'_{112}(x) \psi(x) dx \\ &= - \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x) z_{112}(x) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

se tiene el siguiente desarrollo de Taylor de $J_{12}^{1,1}(g_1)$ en 0

$$J_{12}^{1,1}(g_1) = -g_1 \int_\varepsilon^\infty z'_{111}(x) z_{112}(x) \psi(x) dx + o(g_1). \quad (2.49)$$

Para $J_{13}^{1,1}(g_1)$ se verifica que

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{13}^{1,1}(g_1) = \left(\int_{-L}^L K(t_1) dt_1 \right)^2 \int_\varepsilon^\infty z_{112}(x)^2 \psi(x) dx,$$

por tanto,

$$J_{13}^{1,1}(g_1) = \int_\varepsilon^\infty z_{112}(x)^2 \psi(x) dx + o(1). \quad (2.50)$$

En lo relativo a $J_{14}^{1,1}(g_1)$,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{14}^{1,1}(g_1) = \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(u_1) du_1 \int_\varepsilon^\infty A_w(x) z_{111}(x) z''_{11}(x) \psi(x) dx = 0$$

y su derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dg_1} J_{14}^{1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \left(K' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z_{111}(\varepsilon) + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \right) \\ &\quad \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_\varepsilon^\infty \left(-K \left(\frac{m-x}{g_1} \right) \frac{m-x}{g_1^2} z''_{11}(m) + K \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} z''_{11}(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) u_1 z_{11}^{(3)}(x + g_1 u_1) du_1 \right) \alpha_w(m) dm \psi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \int_\varepsilon^\infty \left(K\left(\frac{m-x}{g_1}\right) \frac{m-x}{g_1^2} z''_{11}(m) \right. \\
&\quad \left. - \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) u_1 z_{11}^{(3)}(x + g_1 u_1) du_1 \right) \alpha_w(m) dm \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $\frac{m-x}{g_1} = m_1$ y teniendo en cuenta que $z_{111}(\varepsilon) = z''_{11}(\varepsilon) = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dg_1} J_{14}^{1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) t_1 z'_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{11}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(m_1) m_1 z''_{11}(x + g_1 m_1) \alpha_w(x + g_1 m_1) dm_1 \psi(x) dx \\
&\quad + \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{111}(x + g_1 t_1) dt_1 \\
&\quad \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) u_1 z_{11}^{(3)}(x + g_1 u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{d}{dg_1} J_{14}^{1,1}(g_1) &= \int_{-L}^L K'(t_1) t_1 dt_1 \int_{-L}^L K(u_1) du_1 \int_\varepsilon^\infty A_w(x) z'_{111}(x) z''_{11}(x) \psi(x) dx \\
&\quad - \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) m_1 dm_1 \int_\varepsilon^\infty \alpha_w(x) z_{111}(x) z''_{11}(x) \psi(x) dx \\
&\quad + \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(u_1) u_1 du_1 \int_\varepsilon^\infty A_w(x) z_{111}(x) z_{11}^{(3)}(x) \psi(x) dx \\
&= - \int_\varepsilon^\infty A_w(x) z'_{111}(x) z''_{11}(x) \psi(x) dx
\end{aligned}$$

y se obtiene el siguiente desarrollo de Taylor de $J_{14}^{1,1}(g_1)$ en 0

$$J_{14}^{1,1}(g_1) = -g_1 \int_\varepsilon^\infty A_w(x) z'_{111}(x) z''_{11}(x) \psi(x) dx + o(g_1). \quad (2.51)$$

Para los dos últimos términos de (2.47), $J_{15}^{1,1}(g_1)$ y $J_{16}^{1,1}(g_1)$, se verifica que,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{15}^{1,1}(g_1) = \left(\int_{-L}^L K(t_1) dt_1 \right)^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{112}(x) z_{11}''(x) \psi(x) dx$$

y

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} J_{16}^{1,1}(g_1) = \left(\int_{-L}^L K(r_1) dr_1 \right)^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z_{11}''(x)^2 \psi(x) dx,$$

de modo que

$$J_{15}^{1,1}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{112}(x) z_{11}''(x) \psi(x) dx + o(1) \quad (2.52)$$

y

$$J_{16}^{1,1}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z_{11}''(x)^2 \psi(x) dx + o(1). \quad (2.53)$$

Reuniendo las expresiones (2.48)-(2.53) se tiene por tanto el siguiente resultado

$$\begin{aligned} J_1^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} (z_{111}'(x)^2 + 2z_{111}'(x)z_{112}(x) + z_{112}(x)^2 - 2A_w(x)z_{111}'(x)z_{11}''(x) \\ &\quad - 2A_w(x)z_{112}(x)z_{11}''(x) + A_w(x)^2 z_{11}''(x)^2) \psi(x) dx + o(1) \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} (2z_{11}'(x)\alpha_w(x) + z_{11}(x)\alpha_w'(x) - A_w(x)z_{11}''(x))^2 \psi(x) dx + o(1). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Se estudia a continuación el segundo término de (2.44), $J_2^{1,1}(g_1)$, de manera análoga al anterior. Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$,

$$J_2^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{x}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \phi(x) dx.$$

Teniendo en cuenta que para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$ se verifica que $\frac{\varepsilon'-x}{g_1} < -L$ y suponiendo que g_1 cumple esa restricción, se tiene

$$J_2^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{x}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \phi(x) dx$$

y como integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 &= K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) - g_1 K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}'(t) \\ &\quad + g_1^2 \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z_{12}''(x + g_1 r_1) dr_1, \end{aligned} \quad (2.55)$$

se tiene

$$J_2^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{g_1^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \alpha_w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} K \left(\frac{m-x}{g_1} \right) z'_{12}(m) \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \\
& + \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx \\
& + \frac{2}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \alpha_w(t) dt \\
& \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx \\
& - \frac{2}{g_1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) \alpha_w(t) dt \\
& \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx \\
& + \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \phi(x) dx. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Haciendo según convenga los cambios de variable $\frac{t-x}{g_1} = t_1$ o $\frac{t-x}{g_1} = t_1$, $\frac{m-x}{g_1} = m_1$ en los anteriores términos, se tiene

$$J_2^{1,1}(g_1) = \frac{1}{g_1^2} J_{21}^{1,1}(g_1) - \frac{2}{g_1} J_{22}^{1,1}(g_1) + J_{23}^{1,1}(g_1) + \frac{2}{g_1} J_{24}^{1,1}(g_1) - 2J_{25}^{1,1}(g_1) + J_{26}^{1,1}(g_1) \tag{2.57}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
J_{21}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \right)^2 \phi(x) dx, \\
J_{22}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) z_{122}(x + g_1 m_1) dm_1 \phi(x) dx, \\
J_{23}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{-L}^L K(t_1) z_{122}(x + g_1 t_1) dt_1 \right)^2 \phi(x) dx, \\
J_{24}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx, \\
J_{25}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K(t_1) z_{122}(x + g_1 t_1) dt_1 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx, \\
J_{26}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \phi(x) dx.
\end{aligned}$$

En relación con $J_{21}^{1,1}(g_1)$, mediante un desarrollo de Taylor de orden 1 de $z_{121}(x + g_1 t_1)$ en x es inmediato comprobar que

$$J_{21}^{1,1}(g_1) = g_1^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x)^2 \phi(x) dx + o(g_1^2). \tag{2.58}$$

Respecto al término $J_{22}^{1,1}(g_1)$, sendos desarrollos de Taylor de $z_{121}(x + g_1 t_1)$ y $z_{122}(x + g_1 t_1)$ en x permiten obtener

$$J_{22}^{1,1}(g_1) = -g_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x) z_{122}(x) \phi(x) dx + o(g_1). \tag{2.59}$$

Es inmediato observar que

$$J_{23}^{1,1}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{122}(x)^2 \phi(x) dx + o(1). \quad (2.60)$$

Respecto a $J_{24}^{1,1}(g_1)$, obsérvese en primer lugar que su límite al tender g_1 a 0 es 0. Su derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dg_1} J_{24}^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) t_1 z'_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} K\left(\frac{m-x}{g_1}\right) \frac{m-x}{g_1^2} z''_{12}(m) \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) u_1 z_{12}^{(3)}(x + g_1 u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) t_1 z'_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z''_{12}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{-L}^L K(m_1) m_1 z''_{12}(x + g_1 m_1) \alpha_w(x + g_1 m_1) dm_1 \phi(x) dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{121}(x + g_1 t_1) dt_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) u_1 z_{12}^{(3)}(x + g_1 u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \end{aligned}$$

donde, en el segundo sumando de la segunda igualdad, se ha efectuado el cambio de variable $\frac{m-x}{g_1} = m_1$ y se ha tenido en cuenta nuevamente que $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{d}{dg_1} J_{24}^{1,1}(g_1) &= \int_{-L}^L K'(t_1) t_1 dt_1 \int_{-L}^L K(u_1) du_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x) z''_{12}(x) A_w(x) \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(m_1) m_1 dm_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{121}(x) z''_{12}(x) \alpha_w(x) \phi(x) dx \\ &\quad + \int_{-L}^L K'(t_1) dt_1 \int_{-L}^L K(u_1) u_1 du_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{121}(x) z_{12}^{(3)}(x) A_w(x) \phi(x) dx \\ &= - \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x) z''_{12}(x) A_w(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

se obtiene el desarrollo de Taylor siguiente

$$J_{24}^{1,1}(g_1) = -g_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x) z''_{12}(x) A_w(x) \phi(x) dx + o(g_1). \quad (2.61)$$

En relación con $J_{25}^{1,1}(g_1)$, es inmediato observar que

$$J_{25}^{1,1}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{122}(x) z''_{12}(x) \phi(x) dx + o(1). \quad (2.62)$$

Análogamente, para $J_{26}^{1,1}(g_1)$,

$$J_{26}^{1,1}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z''_{12}(x)^2 \phi(x) dx + o(1). \quad (2.63)$$

Reuniendo los resultados (2.58)-(2.63),

$$\begin{aligned} J_2^{1,1}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x)^2 \phi(x) dx + 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} z'_{121}(x) z_{122}(x) \phi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{122}(x)^2 \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{\varepsilon}^{\infty} 2A_w(x) z'_{121}(x) z''_{12}(x) \phi(x) dx - 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{122}(x) z''_{12}(x) \phi(x) dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z''_{12}(x)^2 \phi(x) dx + o(1) \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} (2z'_{12}(x) \alpha_w(x) + z_{12}(x) \alpha'_w(x) - A_w(x) z''_{12}(x))^2 \phi(x) dx + o(1). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Por fin, recordando que

$$\text{Var} [\widehat{A}_{111}] = \frac{1}{n} \left(J_1^{1,1}(g_1) + J_2^{1,1}(g_1) - I_{111}(g)^2 \right),$$

sumando (2.54) y (2.64) y teniendo en cuenta el resultado (2.41) se obtiene (2.43). ■

Lema 2.2.6 *Dadas las condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\begin{aligned} \text{Var} [\widehat{A}_{112}] &= \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 (z_{21}(x)^2 \psi(x) + z_{22}(x)^2 \phi(x)) dx + o(n^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_2(x)^2 A_w(x)^2 (1 - p(x)) p(x) h(x) dx + o(n^{-1}). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Demostración. Procediendo de manera análoga a como se hizo en la demostración del lema anterior y denotando por $I_{112}(g_1)$ a la esperanza de \widehat{A}_{112} ,

$$\begin{aligned} \text{Var} [\widehat{A}_{112}] &= \text{Var} \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= \frac{1}{n} \text{Var} \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= \frac{1}{n} E \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \right] - \frac{1}{n} I_{112}(g_1)^2. \end{aligned}$$

Definiendo

$$J^{2,2}(g_1) = E \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \right]$$

se tiene

$$J^{2,2}(g_1) = J_1^{2,2}(g_1) + J_2^{2,2}(g_1)$$

donde

$$\begin{aligned} J_1^{2,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ J_2^{2,2}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Nótese cómo al escribir los límites de integración se ha tenido en cuenta que las funciones z_{21} y ϕ son nulas en el intervalo $[0, \varepsilon]$. Mediante el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$,

$$J_1^{2,2}(g_1) = \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \psi(x) dx$$

y es inmediato comprobar que

$$J_1^{2,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{21}(x)^2 A_w(x)^2 \psi(x) dx + o(1). \quad (2.66)$$

Con el mismo cambio de variable,

$$J_2^{2,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 r_1) K(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \phi(x) dx$$

y

$$J_2^{2,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{22}(x)^2 A_w(x)^2 \phi(x) dx + o(1). \quad (2.67)$$

Por tanto, recordando que

$$Var \left[\widehat{A}_{112} \right] = \frac{1}{n} \left(J_1^{2,2}(g_1) + J_2^{2,2}(g_1) - I_{112}(g_1)^2 \right)$$

y teniendo en cuenta los resultados (2.66), (2.67) y (2.42) se obtiene (2.65). ■

Lema 2.2.7 *Bajo las condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\begin{aligned} Cov \left[\widehat{A}_{111}, \widehat{A}_{112} \right] &= \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(A_w(x) (z''_{11}(x) + z''_{12}(x)) - z'_{111}(x) - z'_{121}(x) - z_{112}(x) - z_{122}(x) \right) \\ &\quad \times A_w(x) z_2(x) (1 - p(x)) p(x) h(x) dx + o(n^{-1}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
Cov [\widehat{A}_{111}, \widehat{A}_{112}] &= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (\widehat{\psi}''(r) - p(r)\widehat{h}''(r) - \zeta(r)) \alpha_w(t) dr dt, \right. \\
&\quad \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) (\widehat{\psi}(u) - p(u)\widehat{h}(u)) \alpha_w(m) dudm \right] \\
&= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (\widehat{\psi}''(r) - p(r)\widehat{h}''(r)) \alpha_w(t) dr dt, \right. \\
&\quad \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) (\widehat{\psi}(u) - p(u)\widehat{h}(u)) \alpha_w(m) dudm \right] \\
&= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}''(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt, \right. \\
&\quad \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{g_1}(u - T_j) (\delta_j - p(r)) \alpha_w(m) dudm \right] \\
&= \frac{1}{n} Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(t) dr dt, \right. \\
&\quad \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_i) (\delta_i - p(r)) \alpha_w(m) dudm \right] \\
&= \frac{1}{n} E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(m) dudm \right] - \frac{1}{n} I_{111}(g_1) I_{112}(g_1).
\end{aligned}$$

Defínase

$$\begin{aligned}
J^{1,2}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(t) dr dt \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(r)) \alpha_w(m) dudm \right].
\end{aligned}$$

A continuación se estudia $J^{1,2}(g_1)$ mediante el mismo procedimiento seguido en los lemas previos. Se tiene

$$J^{1,2}(g_1) = J_1^{1,2}(g_1) + J_2^{1,2}(g_1)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
J_1^{1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) \alpha_w(t) dr dt \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) \alpha_w(m) dudm \psi(x) dx, \\
J_2^{1,2}(g_1) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) \alpha_w(t) dr dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u - x) \alpha_w(m) dudm \phi(x) dx.
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$,

$$J_1^{1,2}(g_1) = \frac{1}{g_1^2} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt$$

$$\times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{x}} z_{21}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx$$

e integrando por partes $\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1$ como se hizo en (2.45) se tiene

$$J_1^{1,2}(g_1) = J_{11}^{1,2}(g_1) + J_{12}^{1,2}(g_1) + J_{13}^{1,2}(g_1)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} J_{11}^{1,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) \alpha_w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{x}} z_{21}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx, \\ J_{12}^{1,2}(g_1) &= -\frac{1}{g_1} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) \alpha_w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{x}} z_{21}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx, \\ J_{13}^{1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z''_{11}(x + g_1 r_1) K(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{x}} z_{21}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \psi(x) dx. \end{aligned}$$

La similitud de estos tres términos con los tres últimos términos de (2.46), respectivamente, de los que se obtienen los primeros reemplazando la función z''_{11} por z_{21} , permite obtener directamente las siguientes expresiones

$$J_{11}^{1,2}(g_1) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z'_{111}(x) z_{21}(x) \psi(x) dx + o(1),$$

$$J_{12}^{1,2}(g_1) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{112}(x) z_{21}(x) \psi(x) dx + o(1),$$

$$J_{13}^{1,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z''_{11}(x) z_{21}(x) \psi(x) dx + o(1)$$

y, como consecuencia,

$$J_1^{1,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} (A_w(x) z''_{11}(x) - z'_{111}(x) - z_{112}(x)) A_w(x) z_{21}(x) \psi(x) dx + o(1). \quad (2.69)$$

Se aborda a continuación el estudio de $J_2^{1,2}(g_1)$, que con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$ es

$$J_2^{1,2}(g_1) = \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{x}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt$$

$$\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx$$

y suponiendo una vez más $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} J_2^{1,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 u_1) K(u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes como en (2.55) se tiene

$$J_2^{1,2}(g_1) = J_{21}^{1,2}(g_1) + J_{22}^{1,2}(g_1) + J_{23}^{1,2}(g_1)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} J_{21}^{1,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \alpha_w(t) dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z_{22}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx, \\ J_{22}^{1,2}(g_1) &= -\frac{1}{g_1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) \alpha_w(t) dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z_{22}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx, \\ J_{23}^{1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{m-x}{g_1}} K(u_1) z_{22}(x + g_1 u_1) \alpha_w(m) du_1 dm \phi(x) dx. \end{aligned}$$

La comparación de estos tres términos con los tres últimos términos de (2.56), respectivamente, revela que, salvo constantes, se pueden utilizar los resultados obtenidos para éstos con sólo cambiar z''_{12} por z_{22} (una sola vez). De este modo,

$$J_{21}^{1,2}(g_1) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z'_{121}(x) z_{22}(x) \phi(x) dx + o(1),$$

$$J_{22}^{1,2}(g_1) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x) z_{122}(x) z_{22}(x) \phi(x) dx + o(1),$$

$$J_{23}^{1,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} A_w(x)^2 z''_{12}(x) z_{22}(x) \phi(x) dx + o(1)$$

y, como consecuencia,

$$J_2^{1,2}(g_1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} (A_w(x) z''_{12}(x) - z'_{121}(x) - z_{122}(x)) A_w(x) z_{22}(x) \phi(x) dx + o(1). \quad (2.70)$$

El resultado (2.68) se obtiene con sólo tener en cuenta que

$$\text{Cov} \left[\widehat{A}_{111}, \widehat{A}_{112} \right] = \frac{1}{n} \left(J_1^{1,2}(g_1) + J_2^{1,2}(g_1) - I_{111}(g_1)I_{112}(g_1) \right)$$

y los resultados (2.69), (2.70), (2.41) y (2.42). ■

Los lemas siguientes se dedican al estudio del término \widehat{A}_{12} .

Lema 2.2.8 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.1), se tiene*

$$E \left[\widehat{A}_{12} \right] = \frac{1}{4} \frac{1}{ng_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} (1 - H(x))^{-2} (1 - p(x)) p(x) h(x) w(x) dx + o(n^{-1}g_1^{-3}) + O(g_1^4)$$

y

$$\text{Var} \left[\widehat{A}_{12} \right] = o(n^{-2}g_1^{-6}).$$

Demostración. Se empleará la siguiente representación de \widehat{A}_{12} ,

$$\widehat{A}_{12} = \widehat{A}_{121} + \widehat{A}_{122} + \widehat{A}_{123} \quad (2.71)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{121} &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) z_2(s) \left(\widehat{\psi}(s) - p(s)\widehat{h}(s) \right) w(t) dr ds dt, \\ \widehat{A}_{122} &= \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\widehat{\psi}''(r) - p(r)\widehat{h}''(r) - \zeta(r) \right) z_1(s) \left(\widehat{\psi}''(s) - p(s)\widehat{h}''(s) - \zeta(s) \right) w(t) dr ds dt, \\ \widehat{A}_{123} &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) z_1(s) \left(\widehat{\psi}''(s) - p(s)\widehat{h}''(s) - \zeta(s) \right) w(t) dr ds dt. \end{aligned}$$

La tesis del lema es consecuencia inmediata de los lemas 2.2.9-2.2.12, 2.2.17, 2.2.19 y 2.2.20, que se enuncian y demuestran a continuación. ■

Lema 2.2.9 *Supuestas las condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$E \left[\widehat{A}_{122} \right] = \frac{1}{4} \frac{1}{ng_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} (1 - H(x))^{-2} (1 - p(x)) p(x) h(x) w(x) dx + o(n^{-1}g_1^{-3}) + O(g_1^4). \quad (2.72)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{A}_{122} \right] &= E \left[\frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\widehat{\psi}''(r) - p(r)\widehat{h}''(r) - \zeta(r) \right) \right. \\ &\quad \left. \times z_1(s) \left(\widehat{\psi}''(s) - p(s)\widehat{h}''(s) - \zeta(s) \right) w(t) dr ds dt \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{4n^2} I_{1221}(g_1) + \frac{1}{4n} I_{1222}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$I_{1221}(g_1) = E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) \right]$$

$$I_{1222}(g_1) = E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) \right. \\ \left. \times z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) dr ds w(t) dt \right], \\ \times z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s)) dr ds w(t) dt \Big].$$

$I_{1221}(g_1)$ puede expresarse como

$$I_{1221}(g_1) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx - \zeta(r) \right) dr \right)^2 w(t) dt.$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$ y para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$I_{1221}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_{-L}^L K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) \right. \right. \\ \left. \left. \times h(r - g_1 x_1) dx_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \right)^2 w(t) dt. \quad (2.73)$$

Mediante sendos desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r se obtiene

$$I_{1221}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_{-L}^L K''(x_1) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i p^{(i)}(r) - \frac{1}{5!} g_1^5 x_1^5 p^{(5)}(\theta_1) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i h^{(i)}(r) + \frac{1}{4!} g_1^4 x_1^4 h^{(4)}(\theta_2) \right) dx_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \right)^2 w(t) dt$$

donde θ_1 y θ_2 son puntos intermedios entre $r - g_1 x_1$ y r . Unos cuantos cálculos elementales en los que se emplean las relaciones (2.40) permiten obtener

$$I_{1221}(g_1) = g_1^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(4)}(r) + 2h'(r) p^{(3)}(r) \right. \right. \\ \left. \left. + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr \right)^2 w(t) dt + O(g_1^6). \quad (2.74)$$

En lo relativo a $I_{1222}(g_1)$, después de algunos cálculos y teniendo en cuenta que z_{11} y ϕ son nulas en $[0, \varepsilon]$ se llega a la siguiente expresión

$$I_{1222}(g_1) = \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\ + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\ - 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - x) (p(x) - p(r)) \alpha_w(t) h(x) dr dt dx \\ + 4 \int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt.$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$,

$$\begin{aligned}
I_{1222}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\
&+ \frac{1}{g_1^4} \int_\varepsilon^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\
&- \frac{4}{g_1^2} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_1(x + g_1 r_1) K''_{g_1}(r_1) (p(x) - p(x + g_1 r_1)) \alpha_w(t) h(x) dr_1 dt dx \\
&+ 4 \int_\varepsilon^\infty \alpha(t)^2 w(t) dt \\
&= I_{12221}(g_1) + I_{12222}(g_1) + I_{12223}(g_1) + I_{12224}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

y, haciendo uso de (2.45),

$$\begin{aligned}
I_{12221}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right)^2 z_{11}(t)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\
&- \frac{2}{g_1^3} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) w(t) \psi(x) dt dx \\
&+ \frac{1}{g_1^2} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K \left(\frac{t-x}{g_1} \right)^2 z'_{11}(t)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\
&+ \frac{2}{g_1^2} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{11}(t) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 w(t) \psi(x) dt dx \\
&- \frac{2}{g_1} \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{11}(t) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 w(t) \psi(x) dt dx \\
&+ \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx.
\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $\frac{t-x}{g_1} = t_1$ en los cinco primeros términos

$$\begin{aligned}
I_{12221}(g_1) &= \frac{1}{g_1^3} \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1)^2 z_{11}(x + g_1 t_1)^2 w(x + g_1 t_1) \psi(x) dt_1 dx \\
&- \frac{2}{g_1^2} \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{11}(x + g_1 t_1) K(t_1) z'_{11}(x + g_1 t_1) w(x + g_1 t_1) \psi(x) dt_1 dx \\
&+ \frac{1}{g_1} \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(t_1)^2 z'_{11}(x + g_1 t_1)^2 w(x + g_1 t_1) \psi(x) dt_1 dx \\
&+ \frac{2}{g_1} \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K'(t_1) z_{11}(x + g_1 t_1) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{t_1} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 w(x + g_1 t_1) \psi(x) dt_1 dx \\
&- 2 \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^L K(t_1) z'_{11}(x + g_1 t_1) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{t_1} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 w(x + g_1 t_1) \psi(x) dt_1 dx \\
&+ \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{11}(x + g_1 r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^6 I_{12221i}(g_1). \quad (2.76)$$

Como se verifica que

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^3 I_{122211}(g_1) = c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{11}(x)^2 w(x) \psi(x) dx,$$

se obtiene

$$I_{122211}(g_1) = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{11}(x)^2 w(x) \psi(x) dx + o(g_1^{-3}).$$

Mediante una acotación directa es inmediato comprobar que los restantes términos de la representación (2.76) son de orden $O(g_1^{-2})$ y, por lo tanto, se verifica el siguiente resultado asintótico

$$I_{12221}(g_1) = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{11}(x)^2 w(x) \psi(x) dx + o(g_1^{-3}).$$

En cuanto a $I_{12222}(g_1)$, si se supone $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$I_{12222}(g_1) = \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx$$

y, teniendo en cuenta (2.55),

$$\begin{aligned} I_{12222}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\ &\quad - \frac{2}{g_1^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) w(t) \phi(x) dt dx \\ &\quad + \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\ &\quad + \frac{2}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z_{12}(t) \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 w(t) \phi(x) dt dx \\ &\quad - \frac{2}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K \left(\frac{t-x}{g_1} \right) z'_{12}(t) \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 w(t) \phi(x) dt dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{t-x}{g_1} = t_1$, efectuado en todos menos el último término,

$$\begin{aligned} I_{12222}(g_1) &= \frac{1}{g_1^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1)^2 z_{12}(x + g_1 t_1)^2 w(x + g_1 t_1) \phi(x) dt_1 dx \\ &\quad - \frac{2}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{12}(x + g_1 t_1) K(t_1) z'_{12}(x + g_1 t_1) w(x + g_1 t_1) \phi(x) dt_1 dx \\ &\quad + \frac{1}{g_1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K(t_1)^2 z'_{12}(x + g_1 t_1)^2 w(x + g_1 t_1) \phi(x) dt_1 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{g_1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K'(t_1) z_{12}(x + g_1 t_1) \int_{-L}^{t_1} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 w(x + g_1 t_1) \phi(x) dt_1 dx \\
 & - \frac{2}{g_1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^L K(t_1) z'_{12}(x + g_1 t_1) \int_{-L}^{t_1} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 w(x + g_1 t_1) \phi(x) dt_1 dx \\
 & + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} K(r_1) z''_{12}(x + g_1 r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\
 & = \sum_{i=1}^6 I_{12222i}(g_1). \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^3 I_{122221}(g_1) = c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{12}(x)^2 w(x) \phi(x) dx,$$

resulta ser

$$I_{122221}(g_1) = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{12}(x)^2 w(x) \phi(x) dx + o(g_1^{-3}).$$

Los restantes términos de (2.77) pueden ser acotados directamente, obteniéndose para todos ellos un orden $O(g_1^{-2})$.

En conclusión,

$$I_{12222}(g_1) = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{12}(x)^2 w(x) \phi(x) dx + o(g_1^{-3}).$$

Por otra parte, es igualmente inmediato concluir que el siguiente término de (2.75) verifica

$$I_{12223}(g_1) = O(g_1^{-2}),$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
 I_{1222}(g_1) & = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{11}(x)^2 w(x) \psi(x) dx + \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_{12}(x)^2 w(x) \phi(x) dx + o(g_1^{-3}) \\
 & = \frac{1}{g_1^3} c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} z_1(x)^2 (1 - p(x)) p(x) h(x) w(x) dx + o(g_1^{-3}). \tag{2.78}
 \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados (2.74), (2.78) y recordando que

$$E \left[\widehat{A}_{122} \right] = \frac{n(n-1)}{4n^2} I_{1221}(g_1) + \frac{1}{4n} I_{1222}(g_1)$$

se obtiene el resultado (2.72). ■

Lema 2.2.10 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$E \left[\widehat{A}_{121} \right] = O(g_1^4) + O(n^{-1}). \tag{2.79}$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{A}_{121} \right] &= E \left[\frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) z_2(s) \left(\widehat{\psi}(s) - p(s)\widehat{h}(s) \right) w(t) dr ds dt \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{4n^2} I_{1211}(g_1) + \frac{1}{4n} I_{1212}(g_1) \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} I_{1211}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) dr ds w(t) dt \right], \\ I_{1212}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) z_2(s) K_{g_1}(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) dr ds w(t) dt \right]. \end{aligned}$$

$I_{1211}(g_1)$ puede representarse como

$$I_{1211}(g_1) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx dr \right)^2 w(t) dt.$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$ y para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$I_{1211}(g_1) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-L}^L K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 dr \right)^2 w(t) dt.$$

Mediante sendos desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r , se tiene

$$\begin{aligned} I_{1211}(g_1) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-L}^L K(x_1) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i p^{(i)}(r) - \frac{1}{3!} g_1^3 x_1^3 p^{(3)}(\theta_1) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i h^{(i)}(r) + \frac{1}{2!} g_1^2 x_1^2 h^{(2)}(\theta_2) \right) dx_1 dr \right)^2 w(t) dt \\ &= g_1^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(p'(r) h'(r) + \frac{1}{2} p''(r) h(r) \right) dr \right)^2 w(t) dt + o(g_1^4) \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde θ_1 y θ_2 son puntos intermedios entre $r - g_1 x_1$ y r y se ha tenido en cuenta que se verifica $\int_{-L}^L K(x_1) x_1 dx_1 = 0$.

Respecto a $I_{1212}(g_1)$, dicho término se puede representar como

$$\begin{aligned} I_{1212}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \psi(x) dt dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\frac{\varepsilon/2-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) \phi(x) dt dx \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$. Por tanto, es evidente que

$$I_{1212}(g_1) = O(1). \quad (2.82)$$

El resultado (2.79) se obtiene llevando los resultados (2.81) y (2.82) a (2.80). ■

Lema 2.2.11 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$E \left[\widehat{A}_{123} \right] = O(g_1^4) + O(n^{-1}g_1^{-2}). \quad (2.83)$$

Demostración. La esperanza de \widehat{A}_{123} es

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{A}_{123} \right] &= E \left[\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) \right. \\ &\quad \left. \times z_1(s) \left(\widehat{\psi}''(s) - p(s)\widehat{h}''(s) - \zeta(s) \right) w(t) dr ds dt \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2n^2} I_{1231}(g) + \frac{1}{2n} I_{1232}(g_1) \end{aligned}$$

donde se define

$$\begin{aligned} I_{1231}(g) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \left. \times z_1(s) \left(K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s) \right) dr ds w(t) dt \right], \\ I_{1232}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \left. \times z_1(s) \left(K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s) \right) dr ds w(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Empezando por el primero de estos términos,

$$\begin{aligned} I_{1231}(g_1) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(s - y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \\ &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-L}^L K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_{-L}^L K''(y_1) (p(s - g_1 y_1) - p(s)) h(s - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(s) \right) ds w(t) dt \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$, $\frac{s-y}{g_1} = y_1$ y se ha supuesto $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r y $p(s - g_1 y_1) - p(s)$ y $h(s - g_1 y_1)$ en s ,

$$\begin{aligned} I_{1231}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-L}^L K(x_1) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i p^{(i)}(r) - \frac{1}{3!} g_1^3 x_1^3 p^{(3)}(\theta_1) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i x_1^i h^{(i)}(r) + \frac{1}{2!} g_1^2 x_1^2 h^{(2)}(\theta_2) \right) dx_1 dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_{-L}^L K''(y_1) \left(\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i y_1^i p^{(i)}(s) - \frac{1}{5!} g_1^5 y_1^5 p^{(5)}(\theta_3) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i}{i!} g_1^i y_1^i h^{(i)}(s) + \frac{1}{4!} g_1^4 y_1^4 h^{(4)}(\theta_4) \right) dy_1 - g_1^2 \zeta(s) \right) ds w(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_1^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left(p'(r)h'(r) + \frac{1}{2}p''(r)h(r) \right) dr \\
&\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\frac{1}{2}h(s)p^{(4)}(s) + 2h'(s)p^{(3)}(s) + 3h''(s)p''(s) + 2h^{(3)}(s)p'(s) \right) ds w(t) dt \\
&\quad + o(g_1^4)
\end{aligned} \tag{2.84}$$

donde θ_1 y θ_2 son puntos intermedios entre $r - g_1x_1$ y r , θ_3 y θ_4 son puntos intermedios entre $s - g_1y_1$ y s y se ha tenido en cuenta que $\int_{-L}^L K(x_1)x_1 dx_1 = 0$, así como las relaciones (2.40).

El término $I_{1232}(g_1)$ puede representarse como

$$\begin{aligned}
I_{1232}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon}^t \int_{\varepsilon}^t z_{21}(r)K_{g_1}(r-x)z_{11}(s)K''_{g_1}(s-x)w(t)\psi(x)drdsdtdx \\
&\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r)K_{g_1}(r-T_1)z_{12}(s)K''_{g_1}(s-T_1)w(t)\phi(x)drdsdtdx \\
&\quad - \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r)K_{g_1}(r-x)(p(x)-p(r))\alpha_w(t)h(x)drdtdx.
\end{aligned}$$

Si en los dos primeros sumandos se efectua el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$ y en el último $\frac{r-x}{g_1} = r_1$ y se supone $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned}
I_{1232}(g_1) &= \frac{1}{g_1^2} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x+g_1r_1)K(r_1)z_{11}(x+g_1s_1)K''(s_1)w(t)\psi(x)dr_1ds_1dtdx \\
&\quad + \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{22}(x+g_1r_1)K(r_1)z_{12}(x+g_1s_1)K''(s_1)w(t)\phi(x)dr_1ds_1dtdx \\
&\quad - \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-x}{g_1}} z_2(x+g_1r_1)K(r_1)(p(x)-p(x+g_1r_1))\alpha_w(t)h(x)dr_1dtdx.
\end{aligned}$$

Estos tres sumandos pueden acotarse directamente. Así

$$I_{1232}(g_1) = O(g_1^{-2}) + O(g_1^{-2}) + O(1) = O(g_1^{-2}). \tag{2.85}$$

A partir de los resultados (2.84) y (2.85) es inmediato obtener (2.83). ■

Lema 2.2.12 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$Var \left[\widehat{A}_{122} \right] = o(n^{-2}g_1^{-6}). \tag{2.86}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Var \left[\widehat{A}_{122} \right] &= \frac{1}{4^2 n^4} Var \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K''_{g_1}(r-T_i)(\delta_i - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K''_{g_1}(s-T_j)(\delta_j - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n M^{i,j,k,l}(g_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4^2 n^4} \left(n M^{1,1,1,1}(g_1) + 2n(n-1) (M^{1,2,2,2}(g_1) + M^{1,2,1,1}(g_1)) \right. \\
 &\quad + n(n-1) (M^{1,2,1,2}(g_1) + M^{1,2,2,1}(g_1)) \\
 &\quad \left. + n(n-1)(n-2) (M^{1,2,1,3}(g_1) + M^{1,2,3,1}(g_1) + M^{1,2,2,3}(g_1) + M^{1,2,3,2}(g_1)) \right)
 \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se ha definido

$$\begin{aligned}
 M^{i,j,k,l}(g_1) &= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_i) (\delta_i - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_j) (\delta_j - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt, \\
 &\quad \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_k) (\delta_k - p(u)) - \zeta(u)) du \\
 &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_l) (\delta_l - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right].
 \end{aligned}$$

Es evidente que se verifican las relaciones siguientes

$$M^{1,2,1,2}(g_1) = M^{1,2,2,1}(g_1), \quad M^{1,2,2,2}(g_1) = M^{1,2,1,1}(g_1)$$

y

$$M^{1,2,1,3}(g_1) = M^{1,2,3,1}(g_1) = M^{1,2,2,3}(g_1) = M^{1,2,3,2}(g_1),$$

por lo que en realidad basta con estudiar el orden de $M^{1,1,1,1}(g_1)$, $M^{1,2,2,2}(g_1)$, $M^{1,2,1,2}(g_1)$ y $M^{1,2,1,3}(g_1)$.

La tesis del lema es una consecuencia inmediata de los resultados siguientes

$$\begin{aligned}
 M^{1,1,1,1}(g_1) &= O(g_1^{-8}), & M^{1,2,1,3}(g_1) &= o(1), \\
 M^{1,2,2,2}(g_1) &= o(g_1^{-6}), & M^{1,2,1,2}(g_1) &= o(g_1^{-6}),
 \end{aligned}$$

que se prueban en los lemas 2.2.13-2.2.16 y de la condición **(V.1)**, que implica que $ng_1^2 \rightarrow \infty$ y $ng_1^6 \rightarrow 0$. ■

Lema 2.2.13 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.12, se tiene*

$$M^{1,2,1,3}(g_1) = o(1). \tag{2.87}$$

Demostración. Se inicia el estudio de $M^{1,2,1,3}(g_1)$ analizando la esperanza

$$\begin{aligned}
 &E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \\
 &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\
 &= M_1^{1,2,1,3}(g_1) + M_2^{1,2,1,3}(g_1) + M_3^{1,2,1,3}(g_1) + M_4^{1,2,1,3}(g_1)
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

donde se define

$$\begin{aligned}
M_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r-x) dr \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^\infty K_{g_1}''(s-y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx, \\
M_2^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r-x) dr \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^\infty K_{g_1}''(s-y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx, \\
M_3^{1,2,1,3}(g_1) &= -2 \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \int_0^\infty K_{g_1}''(r-x) (p(x) - p(r)) h(x) dx dr \\
&\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^\infty K_{g_1}''(s-y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \\
&\quad \times \int_\varepsilon^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \left(\int_0^\infty K_{g_1}''(v-\eta) (p(\eta) - p(v)) h(\eta) d\eta - \zeta(v) \right) dv \alpha_w(m) dm, \\
M_4^{1,2,1,3}(g_1) &= 4 \left(\int_\varepsilon^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^\infty K_{g_1}''(r-x) (p(x) - p(r)) h(x) dx - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \right)^2.
\end{aligned}$$

Tras hacer el cambio de variable $\frac{s-y}{g_1} = y_1$, $\frac{r-x}{g_1} = r_1$ y para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned}
M_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \frac{1}{g_1^8} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_{-L}^L K''(y_1) (p(s - g_1 y_1) - p(s)) \times h(s - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(s) \right) ds \right. \\
&\quad \times \left. w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Haciendo desarrollos de Taylor de $p(s - g_1 y_1) - p(s)$ y $h(s - g_1 y_1)$ como se hizo en (2.73) es inmediato obtener

$$\begin{aligned}
M_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \mu_K^2 \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{h(r) p^{(4)}(r)}{2} + 2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr w(t) dt \right)^2 \\
&\quad \times \psi(x) dx + o(1)
\end{aligned}$$

y como $\int_{-L}^L K''(r_1) dr_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{g_1 \rightarrow 0} M_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_x^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) \right) dr w(t) dt \right)^2 z_{11}(x)^2 \psi(x) dx \\
&\quad \times \mu_K^2 \left(\int_{-L}^L K''(r_1) dr_1 \right)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir,

$$M_1^{1,2,1,3}(g_1) = o(1). \quad (2.89)$$

Una simple inspección del término $M_2^{1,2,1,3}(g_1)$ y su comparación con el último estudiado es suficiente para concluir que

$$M_2^{1,2,1,3}(g_1) = o(1). \quad (2.90)$$

En cuanto a $M_3^{1,2,1,3}(g_1)$, haciendo el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$, $\frac{s-y}{g_1} = y_1$, $\frac{v-\eta}{g_1} = \eta_1$ y suponiendo $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} M_3^{1,2,1,3}(g_1) &= -\frac{2}{g_1^6} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \int_{-L}^L K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_{-L}^L K''(y_1) (p(s - g_1 y_1) - p(s)) h(s - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(s) \right) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \left(\int_{-L}^L K''(\eta_1) (p(v - g_1 \eta_1) - p(v)) h(v - g_1 \eta_1) d\eta_1 - g_1^2 \zeta(v) \right) dv \\ &\quad \times \alpha_w(m) dm \end{aligned}$$

y haciendo desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r , de $p(s - g_1 y_1) - p(s)$ y $h(s - g_1 y_1)$ en s y de $p(v - g_1 \eta_1) - p(v)$ y $h(v - g_1 \eta_1)$ en v , de modo similar a como se hizo en ocasiones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} M_3^{1,2,1,3}(g_1) &= -4g_1^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\frac{1}{2} h(s) p^{(4)}(s) + 2h'(s) p^{(3)}(s) \right. \\ &\quad \left. + 3h''(s) p''(s) + 2h^{(3)}(s) p'(s) \right) ds \alpha_w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \left(\frac{1}{2} h(v) p^{(4)}(v) + 2h'(v) p^{(3)}(v) \right. \\ &\quad \left. + 3h''(v) p''(v) + 2h^{(3)}(v) p'(v) \right) dv \alpha_w(m) dm + o(g_1^4). \quad (2.91) \end{aligned}$$

Respecto a $M_4^{1,2,1,3}(g_1)$, es suficiente con estudiar el orden de

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K''_{g_1}(r-x) (p(x) - p(r)) h(x) dx - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K''_{g_1}(r-x) (p(x) - p(r)) h(x) dx - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\ &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_{-L}^L K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\ &= g_1^2 \mu_K \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(4)}(r) + 2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\ &\quad + o(g_1^2) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha efectuado el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$ y se ha supuesto $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$ y en la última se han realizado de nuevo desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r . Por tanto,

$$M_4^{1,2,1,3}(g_1) = O(g_1^4). \quad (2.92)$$

De los resultados (2.89)-(2.92) se concluye que el orden de la esperanza (2.88) es $o(1)$. Por otra parte, como se deduce de (2.74), el orden del producto de esperanzas

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\ & \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = I_{1221}(g_1)^2 \end{aligned}$$

es $O(g_1^8)$. De todo ello se sigue el resultado (2.87). ■

Lema 2.2.14 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.12, se tiene*

$$M^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.93)$$

Demostración. Se aborda el estudio de $M^{1,2,2,2}(g_1)$, empezando por la esperanza del producto

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_2) (\delta_2 - p(u)) - \zeta(u)) du \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = \sum_{i=1}^{11} M_i^{1,2,2,2}(g_1), \end{aligned} \quad (2.94)$$

donde se define

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(u) K_{g_1}''(u - x) du \\ & \times \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(v) K_{g_1}''(v - x) dv w(m) dm \psi(x) dx, \\ M_2^{1,2,2,2}(g_1) &= - \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(u) K_{g_1}''(u-x) du \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(v) K_{g_1}''(v-x) dv w(m) dm \phi(x) dx, \\
 M_3^{1,2,2,2}(g_1) &= -4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) du \alpha_w(m) dm \psi(x) dx, \\
 M_4^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(v) K_{g_1}''(v-x) dv w(m) dm \psi(x) dx, \\
 M_5^{1,2,2,2}(g_1) &= -4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(u) K_{g_1}''(u-x) du \alpha_w(m) dm \phi(x) dx, \\
 M_6^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(u) K_{g_1}''(u-x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(v) K_{g_1}''(v-x) dv w(m) dm \phi(x) dx, \\
 M_7^{1,2,2,2}(g_1) &= 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \psi(x) dx, \\
 M_8^{1,2,2,2}(g_1) &= 8 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) du \alpha_w(m) dm \psi(x) dx, \\
 M_9^{1,2,2,2}(g_1) &= 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \phi(x) dx, \\
 M_{10}^{1,2,2,2}(g_1) &= 8 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(u) K_{g_1}''(u-x) du \alpha_w(m) dm \phi(x) dx, \\
 M_{11}^{1,2,2,2}(g_1) &= -8 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy - \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm h(x) dx.
 \end{aligned}$$

Tratando el primero de ellos de modo similar a como se hizo con $M_1^{1,2,3,1}(g_1)$, es decir, haciendo el

cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$, $\frac{v-x}{g_1} = v_1$ y suponiendo $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^8} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \\ &\times \left(\int_{-L}^L K''(y_1) (p(r - g_1 y_1) - p(r)) h(r - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \\ &\times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 \\ &\times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 v_1) K''(v_1) dv_1 w(m) dm \psi(x) dx \end{aligned}$$

y sendos nuevos desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 y_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 y_1)$ permiten obtener

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \mu_K \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \\ &\times \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(4)}(r) + 2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr \\ &\times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 \\ &\times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 v_1) K''(v_1) dv_1 w(m) dm \psi(x) dx + o(g_1^{-4}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_1^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-4}) \quad (2.95)$$

ya que, efectivamente,

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^4 M_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \mu_K \left(\int_{-L}^L K''(s_1) ds_1 \right)^3 \int_{\varepsilon'}^\infty \int_x^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \\ &\times \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(4)}(r) + 2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr w(t) dt \\ &\times \int_x^\infty w(m) dm z_{11}(x)^3 \psi(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, una simple inspección del término $M_2^{1,2,2,2}(g_1)$ y su comparación con $M_1^{1,2,2,2}(g_1)$ es suficiente para concluir que

$$M_2^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.96)$$

Para determinar el orden del siguiente término de (2.94) es suficiente con efectuar el cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, $\frac{u-x}{g_1} = x_1$, que permite escribir

$$M_3^{1,2,2,2}(g_1) = -\frac{4}{g_1^6} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} K''(y_1) (p(r - g_1 y_1) - p(r)) h(r - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\frac{\varepsilon' - x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon' - x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \psi(x) dx \\
 & = o(g_1^{-6})
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

pues, obviamente,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^6 M_3^{1,2,2,2}(g_1) = 0.$$

Tratando los tres términos siguientes como el precedente es inmediato probar que para ellos es válido el mismo orden, es decir,

$$M_4^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-6}), \tag{2.98}$$

$$M_5^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-6}) \tag{2.99}$$

y

$$M_6^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \tag{2.100}$$

Los cuatro términos siguientes de (2.94) se estudian todos ellos de un modo muy similar, que se ilustra analizando más en detalle el primero de ellos. Haciendo el cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, éste es

$$\begin{aligned}
 M_7^{1,2,2,2}(g_1) &= \frac{4}{g_1^4} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \\
 & \times \left(\int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} K''(y_1) (p(r - g_1 y_1) - p(r)) h(r - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \\
 & \times \int_{\frac{\varepsilon' - x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \psi(x) dx \\
 & = o(g_1^{-4}),
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

ya que, obviamente,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^4 M_7^{1,2,2,2}(g_1) = 0.$$

Del mismo modo se prueba que

$$M_8^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-4}), \tag{2.102}$$

$$M_9^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-4}), \tag{2.103}$$

y

$$M_{10}^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.104)$$

Por fin, como con el cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = y_1$,

$$\begin{aligned} M_{11}^{1,2,2,2}(g_1) &= -\frac{8}{g_1^2} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} K''(y_1) (p(r - g_1 y_1) - p(r)) \right. \\ &\quad \left. \times h(r - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(r) \right) dr \alpha_w(t) dt \int_{\varepsilon'}^\infty \alpha(m)^2 w(m) dm h(x) dx \end{aligned}$$

y

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^2 M_{11}^{1,2,2,2}(g_1) = 0,$$

se tiene

$$M_{11}^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-2}). \quad (2.105)$$

Como se desprende de los resultados (2.95)-(2.105) el orden de la esperanza (2.94) es $o(g_1^{-6})$ y dado que el producto de esperanzas

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\ &\times E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_2) (\delta_2 - p(u)) - \zeta(u)) du \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ &= I_{1221}(g_1) I_{1222}(g_1) \end{aligned}$$

es, de acuerdo con lo que se probó en (2.74) y (2.78), de orden $O(g_1)$, el orden de $M^{1,2,2,2}(g_1)$ es el dado en el resultado (2.93). ■

Lema 2.2.15 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.12, se tiene*

$$M^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.106)$$

Demostración. Se estudia en primer lugar la esperanza

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} M_i^{1,2,1,2}(g_1) + 16 \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \right)^2 \quad (2.107)$$

donde se define

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,1,2}(g_1) &= 2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(r) K_{g_1}''(r-x) z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) \psi(x) dr du dx \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) z_{12}(v) K_{g_1}''(v-x) \phi(y) ds dv dy w(t) w(m) dm dt, \\ M_2^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(r) K_{g_1}''(r-x) z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) \psi(x) dr du dx \right)^2 \\ &\quad \times w(t) w(m) dm dt, \\ M_3^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(r) K_{g_1}''(r-x) z_{12}(u) K_{g_1}''(u-x) \phi(x) dr du dx \right)^2 \\ &\quad \times w(t) w(m) dm dt, \\ M_4^{1,2,1,2}(g_1) &= -8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(r) z_{11}(u) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-x) K_{g_1}''(u-x) \psi(x) dx du dr \alpha_w(t) \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(v-y) (p(y) - p(v)) h(y) dy dv w(m) dm dt, \\ M_5^{1,2,1,2}(g_1) &= -8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(r) z_{12}(u) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-x) K_{g_1}''(u-x) \phi(x) dx du dr \alpha_w(t) \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(v-y) (p(y) - p(v)) h(y) dy dv w(m) dm dt, \\ M_6^{1,2,1,2}(g_1) &= 8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^m \int_0^{\infty} z_1(u) K_{g_1}''(u-x) (p(x) - p(u)) h(x) dx du \right)^2 w(m) dm, \\ M_7^{1,2,1,2}(g_1) &= 8 \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_0^{\infty} z_1(r) K_{g_1}''(r-x) (p(x) - p(r)) h(x) \alpha_w(t) dx dr dt \right)^2, \\ M_8^{1,2,1,2}(g_1) &= 8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(r) z_{11}(u) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-x) K_{g_1}''(u-x) \psi(x) dx \\ &\quad \times \alpha_w(t) \alpha_w(m) dr du dm dt, \\ M_9^{1,2,1,2}(g_1) &= 8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(r) z_{12}(u) \int_0^{\infty} K_{g_1}''(r-x) K_{g_1}''(u-x) \phi(x) dx \\ &\quad \times \alpha_w(t) \alpha_w(m) dr du dm dt, \\ M_{10}^{1,2,1,2}(g_1) &= -32 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r-x) (p(x) - p(r)) \alpha_w(t) \alpha_w(m)^2 w(m) dr dt dm. \end{aligned}$$

Si en $M_1^{1,2,1,2}(g_1)$ se tiene en cuenta al escribir los límites de integración que las funciones z_{11} y ϕ son nulas en $[0, \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,1,2}(g_1) &= 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^t \int_{\varepsilon}^m z_{11}(r) K_{g_1}''(r-x) z_{11}(u) K_{g_1}''(u-x) \psi(x) dr du dx \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) z_{12}(v) K_{g_1}''(v-x) \phi(y) ds dv dy w(t) w(m) dm dt. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, $\frac{v-x}{g_1} = v$ y suponiendo $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,1,2}(g_1) &= \frac{2}{g_1^8} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) \psi(x) dr_1 du_1 dx \\ &\quad \times \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z_{12}(y + g_1 s_1) K''(s_1) z_{12}(y + g_1 v_1) K''(v_1) \phi(y) ds_1 dv_1 dy \\ &\quad \times w(t) w(m) dm dt \\ &= \frac{2}{g_1^8} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) w(t) w(m) dm dt \end{aligned}$$

donde se han definido para $t, m > \varepsilon$,

$$\begin{aligned} M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) \psi(x) dr_1 du_1 dx, \\ M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z_{12}(y + g_1 s_1) K''(s_1) z_{12}(y + g_1 v_1) K''(v_1) \phi(y) ds_1 dv_1 dy. \end{aligned}$$

Obviamente,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) = \left(\int_{-L}^L K''(r_1) dr_1 \right)^2 \int_{\varepsilon}^{t \wedge m} z_{11}(x)^2 \psi(x) dx = 0$$

y

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) = \left(\int_{-L}^L K''(s_1) ds_1 \right)^2 \int_{\varepsilon}^{t \wedge m} z_{12}(y)^2 \phi(y) dy = 0.$$

La derivada parcial de $M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m)$ respecto a g_1 es

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial g_1} M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) \\ &= \int_0^{\infty} \psi(x) \left(-z_{11}(t) K'' \left(\frac{t-x}{g_1} \right) \frac{t-x}{g_1^2} + z_{11}(\varepsilon) K'' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z'_{11}(x + g_1 r_1) r_1 K''(r_1) dr_1 \right) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} \psi(x) \left(-z_{11}(m) K'' \left(\frac{m-x}{g_1} \right) \frac{m-x}{g_1^2} + z_{11}(\varepsilon) K'' \left(\frac{\varepsilon-x}{g_1} \right) \frac{\varepsilon-x}{g_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z'_{11}(x + g_1 r_1) r_1 K''(r_1) dr_1 \right) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 dx \\ &= - \int_{-L}^{\frac{t}{g_1}} \psi(t - g_1 x_1) z_{11}(t) K''(x_1) x_1 \int_{\frac{\varepsilon-t}{g_1} + x_1}^{\frac{m-t}{g_1} + x_1} z_{11}(t + g_1(u_1 - x_1)) K''(u_1) du_1 dx_1 \\ &\quad - \int_{-L}^{\frac{m}{g_1}} \psi(m - g_1 x_1) z_{11}(m) K''(x_1) x_1 \int_{\frac{\varepsilon-m}{g_1} + x_1}^{\frac{t-m}{g_1} + x_1} z_{11}(m + g_1(u_1 - x_1)) K''(u_1) du_1 dx_1 \\ &\quad + \int_0^{\infty} \psi(x) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z'_{11}(x + g_1 r_1) r_1 K''(r_1) dr_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 dx \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\infty \psi(x) \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z'_{11}(x+g_1r_1)r_1K''(r_1)dr_1 \int_{\frac{\varepsilon-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x+g_1u_1)K''(u_1)du_1dx$$

donde se ha descompuesto la expresión en varios sumandos, efectuándose los cambios de variable $\frac{t-x}{g_1} = x_1$ y $\frac{m-x}{g_1} = x_1$ en los dos primeros, respectivamente.

De modo análogo, la derivada parcial de $M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m)$ respecto a g_1 es

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial g_1} M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) \\ &= \int_\varepsilon^\infty \phi(y) \left(-z_{12}(t)K''\left(\frac{t-y}{g_1}\right) \frac{t-y}{g_1^2} + \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} z'_{12}(y+g_1r_1)r_1K''(r_1)dr_1 \right) \\ & \quad \times \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z_{12}(y+g_1u_1)K''(u_1)du_1dy \\ & \quad + \int_\varepsilon^\infty \phi(y) \left(-z_{12}(m)K''\left(\frac{m-y}{g_1}\right) \frac{m-y}{g_1^2} + \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z'_{12}(y+g_1r_1)r_1K''(r_1)dr_1 \right) \\ & \quad \times \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{12}(y+g_1u_1)K''(u_1)du_1dy \\ &= - \int_{-L}^{\frac{t-\varepsilon}{g_1}} \phi(t-g_1y_1)z_{12}(t)K''(y_1)y_1 \int_{-L}^{\frac{m-t}{g_1}+y_1} z_{12}(t+g_1(v_1-y_1))K''(v_1)dv_1dy_1 \\ & \quad - \int_{-L}^{\frac{m-\varepsilon}{g_1}} \phi(m-g_1y_1)z_{12}(m)K''(y_1)y_1 \int_{-L}^{\frac{t-m}{g_1}+y_1} z_{12}(m+g_1(v_1-y_1))K''(v_1)dv_1dy_1 \\ & \quad + \int_\varepsilon^\infty \phi(y) \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} z'_{12}(y+g_1s_1)s_1K''(s_1)ds_1 \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z_{12}(y+g_1v_1)K''(v_1)dv_1dy \\ & \quad + \int_\varepsilon^\infty \phi(y) \int_{-L}^{\frac{m-y}{g_1}} z'_{12}(y+g_1s_1)s_1K''(s_1)ds_1 \int_{-L}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{12}(y+g_1v_1)K''(v_1)dv_1dy. \end{aligned}$$

Los límites al tender g_1 a 0 de estas derivadas son

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial g_1} M_{1,1}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) &= - \int_{-L}^L K''(x_1)x_1dx_1 \int_{-L}^L K''(u_1)du_1 \\ & \quad \times (I(m > t)\psi(t)z_{11}(t)^2 + I(t > m)\psi(m)z_{11}(m)^2) \\ & \quad + 2 \int_{-L}^L r_1K''(r_1)dr_1 \int_{-L}^L K''(u_1)du_1 \int_\varepsilon^{t \wedge m} \psi(x)z'_{11}(x)z_{11}(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial g_1} M_{1,2}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) &= - \int_{-L}^L K''(y_1)y_1dy_1 \int_{-L}^L K''(v_1)dv_1 \\ & \quad \times (I(m > t)\phi(t)z_{12}(t)^2 + I(t > m)\phi(m)z_{12}(m)^2) \\ & \quad + 2 \int_{-L}^L s_1K''(s_1)ds_1 \int_{-L}^L K''(v_1)dv_1 \int_\varepsilon^{t \wedge m} \phi(y)z'_{12}(y)z_{12}(y)dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de Taylor a $M_{11}^{1,2,1,2}(g_1, t, m)$ y $M_{12}^{1,2,1,2}(g_1, t, m)$ considerados como funciones de la variable g_1 ,

$$M_{11}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) = o(g_1)$$

y

$$M_{12}^{1,2,1,2}(g_1, t, m) = o(g_1).$$

Como, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^6 M_1^{1,2,1,2}(g_1) = 0,$$

resulta ser

$$M_1^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.108)$$

El mismo orden es válido para los términos $M_2^{1,2,1,2}(g_1)$ y $M_3^{1,2,1,2}(g_1)$, como revela una simple inspección de estos términos y su comparación con $M_1^{1,2,1,2}(g_1)$. Por tanto,

$$M_2^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}) \quad (2.109)$$

y

$$M_3^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.110)$$

Pasando al siguiente término de la representación (2.107), mediante el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$, $\frac{v-y}{g_1} = y_1$,

$$\begin{aligned} M_4^{1,2,1,2}(g_1) &= -\frac{8}{g_1^6} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) z_{11}(x + g_1 u_1) \\ &\quad \times K''(r_1) K''(u_1) \psi(x) du_1 dr_1 dx \alpha_w(t) \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) \int_{-\infty}^{\frac{v}{g_1}} K''(y_1) (p(v - g_1 y_1) - p(v)) h(v - g_1 y_1) dy_1 dv w(m) dm dt \end{aligned}$$

y, obviamente,

$$M_4^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.111)$$

Igualmente,

$$M_5^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-6}). \quad (2.112)$$

pues $M_5^{1,2,1,2}(g_1)$ se puede obtener a partir de $M_4^{1,2,1,2}(g_1)$ simplemente sustituyendo z_{11} y ψ por, respectivamente, z_{12} y ϕ , modificaciones que en nada afectan al orden que se obtiene siguiendo los razonamientos empleados en el caso del término anterior.

En relación con $M_6^{1,2,1,2}(g_1)$, tras efectuar el cambio de variable $\frac{u-x}{g_1} = x_1$ se tiene

$$M_6^{1,2,1,2}(g_1) = \frac{8}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^m \int_{-\infty}^{\frac{u}{g_1}} z_1(u) K''(x_1) (p(u - g_1 x_1) - p(u)) \right)$$

$$\times h(u - g_1 x_1) dx_1 du \Big)^2 w(m) dm$$

y, evidentemente,

$$M_6^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.113)$$

Análogamente, con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$,

$$M_7^{1,2,1,2}(g_1) = \frac{8}{g_1^4} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} z_1(r) K''(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) \right. \\ \left. \times h(r - g_1 x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt \right)^2$$

y, nuevamente,

$$M_7^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.114)$$

El siguiente término es, con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$,

$$M_8^{1,2,1,2}(g_1) = \frac{8}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) z_{11}(x + g_1 u_1) \\ \times K''(r_1) K''(u_1) \psi(x) dx \alpha_w(t) \alpha_w(m) dr_1 du_1 dm dt,$$

de modo que

$$M_8^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.115)$$

El mismo resultado es válido para el término análogo, $M_9^{1,2,1,2}(g_1)$, esto es,

$$M_9^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-4}). \quad (2.116)$$

Por fin, haciendo el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$,

$$M_{10}^{1,2,1,2}(g_1) = -\frac{32}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_1(x + g_1 r_1) K''(r_1) (p(x + g_1 r_1) - p(r)) \\ \times \alpha_w(t) \alpha(m)^2 w(m) dr_1 dt dm$$

y es inmediato observar que

$$M_{10}^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-2}). \quad (2.117)$$

A partir de los resultados (2.108)-(2.117) se obtiene para la esperanza (2.107) el orden $o(g^{-6})$. Para probar la tesis del lema, que afirma que ése es también el orden de $M^{1,2,1,2}(g_1)$, basta con comprobar que el producto de esperanzas

$$E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K''_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\ \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K''_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \right. \\
& \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\
& = I_{1221}(g_1)^2
\end{aligned}$$

es, como se deduce de (2.74), de orden $O(g_1^8)$. ■

Lema 2.2.16 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.12, se tiene*

$$M^{1,1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-8}). \quad (2.118)$$

Demostración. En primer lugar se aborda el estudio de la esperanza

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\
& \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\
& \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \\
& \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_1) (\delta_1 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right].
\end{aligned}$$

Tras algunos cálculos se obtiene para dicha esperanza la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\
& + \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx \\
& - 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(u) K_{g_1}''(u - x) du \alpha_w(m) dm \psi(x) dx \\
& + 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(u) K_{g_1}''(u - x) du \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \\
& + 8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \psi(x) dx \\
& + 8 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \right)^2 w(t) dt \phi(x) dx \\
& + 4 \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\
& + 4 \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(r) K_{g_1}''(r - x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx \\
& - 16 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r - x) (p(x) - p(r)) dr \alpha_w(t) dt h(x) dx \\
& + 16 \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \alpha(t)^2 w(t) dt \right)^2
\end{aligned}$$

y haciendo, según proceda, los cambios de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$ o $\frac{r-x}{g_1} = r_1, \frac{u-x}{g_1} = u_1$, la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{g_1^8} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\
 & + \frac{1}{g_1^8} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx \\
 & - \frac{4}{g_1^6} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \psi(x) dx \\
 & + \frac{4}{g_1^6} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 u_1) K''(u_1) du_1 \alpha_w(m) dm \phi(x) dx \\
 & + \frac{8}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^\infty \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \psi(x) dx \\
 & + \frac{8}{g_1^4} \int_{\varepsilon'}^\infty \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{12}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \right)^2 w(t) dt \phi(x) dx \\
 & + \frac{4}{g_1^4} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx \\
 & + \frac{4}{g_1^4} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 r_1) K''(r_1) dr_1 \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx \\
 & - \frac{16}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^\infty \alpha(m)^2 w(m) dm \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) K_{g_1}''(r-x) (p(x) - p(r)) dr \alpha_w(t) dt h(x) dx \\
 & + 16 \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \alpha(t)^2 w(t) dt \right)^2 \\
 & = O(g_1^{-8}). \tag{2.119}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, como se deduce de (2.78), para el producto de esperanzas se tiene

$$\begin{aligned}
 & E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) (K_{g_1}''(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) - \zeta(r)) dr \right. \\
 & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\
 & \times E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_1(u) (K_{g_1}''(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) - \zeta(u)) du \right. \\
 & \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_1) (\delta_1 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right]
 \end{aligned}$$

$$= I_{1222}(g_1)^2 = O(g_1^{-6}). \quad (2.120)$$

El resultado (2.118) se obtiene directamente a partir de (2.119) y (2.120). ■

Lema 2.2.17 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$\text{Var} \left[\widehat{A}_{121} \right] = o(n^{-1}). \quad (2.121)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\widehat{A}_{121} \right] &= \frac{1}{4^2 n^4} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_j) (\delta_j - p(s)) ds w(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N^{i,j,k,l}(g_2) \\ &= \frac{1}{4^2 n^4} \left(n N^{1,1,1,1}(g_1) + 2n(n-1) (N^{1,2,2,2}(g_1) + N^{1,2,1,1}(g_1)) \right. \\ &\quad \left. + n(n-1) (N^{1,2,1,2}(g_1) + N^{1,2,2,1}(g_1)) \right. \\ &\quad \left. + n(n-1)(n-2) (N^{1,2,1,3}(g_1) + N^{1,2,3,1}(g_1) + N^{1,2,2,3}(g_1) + N^{1,2,3,2}(g_1)) \right) \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se ha definido

$$N^{i,j,k,l}(g_1) = \text{Cov} \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_j) (\delta_j - p(s)) ds w(t) dt, \right. \\ \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_k) (\delta_k - p(u)) du \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) K_{g_1}(v - T_l) (\delta_l - p(v)) dv w(m) dm \right].$$

Como se discutió al tratar el caso de $\text{Var} \left[\widehat{A}_{122} \right]$, basta con estudiar el orden de los términos $N^{1,2,1,3}(g_1)$, $N^{1,2,2,2}(g_1)$, $N^{1,2,1,2}(g_1)$ y $N^{1,1,1,1}(g_1)$. La tesis del lema es consecuencia de los resultados siguientes, que se prueban en el lema 2.2.18,

$$\begin{aligned} N^{1,2,1,3}(g_1) &= o(1), & N^{1,2,2,2}(g_1) &= O(g_1^2), \\ N^{1,2,1,2}(g_1) &= O(1), & N^{1,1,1,1}(g_1) &= O(g_1^{-4}) \end{aligned}$$

y de que, como consecuencia de la condición **(V.1)**, $ng_1^2 \rightarrow \infty$. ■

Lema 2.2.18 *Supuestas las condiciones del lema 2.2.17, se tiene*

$$N^{1,2,1,3}(g_1) = o(1), \quad (2.122)$$

$$N^{1,2,2,2}(g_1) = O(g_1^2), \quad (2.123)$$

$$N^{1,2,1,2}(g_1) = O(1) \quad (2.124)$$

y

$$N^{1,1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-4}). \quad (2.125)$$

Demostración. Se aborda el estudio de $N^{1,2,1,3}(g_1)$ analizando la esperanza

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) K_{g_1}(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = N_1^{1,2,1,3}(g_1) + N_2^{1,2,1,3}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) \int_0^{\infty} K_{g_1}(s - y) (p(y) - p(s)) h(y) dy ds w(t) dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u - x) du \\ &\times \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) \int_0^{\infty} K_{g_1}(v - \eta) (p(\eta) - p(v)) h(\eta) d\eta dv w(m) dm \phi(x) dx, \\ N_2^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) \int_0^{\infty} K_{g_1}(s - y) (p(y) - p(s)) h(y) dy ds w(t) dt \\ &\times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) du \\ &\times \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) \int_0^{\infty} K_{g_1}(v - \eta) (p(\eta) - p(v)) h(\eta) d\eta dv w(m) dm \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{s-y}{g_1} = y_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$, $\frac{v-\eta}{g_1} = \eta_1$,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \\ &\times \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) \int_{-\infty}^{\frac{s}{g_1}} K(y_1) (p(s - g_1 y_1) - p(s)) h(s - g_1 y_1) dy_1 ds w(t) dt \\ &\times \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{22}(x + g_1 u_1) K(u_1) du_1 \\ &\times \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) \int_{-\infty}^{\frac{v}{g_1}} K(\eta_1) (p(v - g_1 \eta_1) - p(v)) h(v - g_1 \eta_1) d\eta_1 dv w(m) dm \phi(x) dx \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Evidentemente, $N_2^{1,2,1,3}(g_1)$ tiene el mismo orden asintótico. Así, puesto que el orden del producto de esperanzas

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \right] \\ & \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) K_{g_1}(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = I_{1211}(g_1)^2 \end{aligned}$$

es, según se probó en (2.81), $O(g_1^8)$, se obtiene (2.122).

Respecto a $N^{1,2,2,2}(g_1)$, se tiene para la esperanza del producto,

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_2) (\delta_2 - p(u)) du \\ & \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) K_{g_1}(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = N_1^{1,2,2,2}(g_1) + N_2^{1,2,2,2}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx dr \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(s) K_{g_1}(s - y) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - y) du \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(v) K_{g_1}(v - y) dv w(m) dm \psi(y) dy, \\ N_2^{1,2,2,2}(g_1) &= - \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx dr \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(s) K_{g_1}(s - y) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u - y) du \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(v) K_{g_1}(v - y) dv w(m) dm \phi(y) dy. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$, $\frac{s-y}{g_1} = s_1$, $\frac{u-y}{g_1} = u_1$, $\frac{v-y}{g_1} = v_1$ y suponiendo $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-L}^L K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 dr \\ &\quad \times \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{21}(y + g_1 s_1) K(s_1) ds_1 w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{21}(y + g_1 u_1) K(u_1) du_1 \\ &\quad \times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{21}(y + g_1 v_1) K(v_1) dv_1 w(m) dm \psi(y) dy \end{aligned}$$

y sendos desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$ y $h(r - g_1 x_1)$ en r permiten obtener

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,2,2}(g_1) &= g_1^2 \mu_K \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(2)}(r) + h'(r) p'(r) \right) dr \\ &\quad \times \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{21}(y + g_1 s_1) K(s_1) ds_1 w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{21}(y + g_1 u_1) K(u_1) du_1 \\ &\quad \times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{21}(y + g_1 v_1) K(v_1) dv_1 w(m) dm \psi(y) dy + o(g_1^2) \end{aligned}$$

$$= O(g_1^2).$$

Análogamente se prueba que

$$N_2^{1,2,2,2}(g_1) = O(g_1^2)$$

y el resultado (2.123) se obtiene después de tener en cuenta que el producto de esperanzas

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \right] \\ & \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \int_{\varepsilon'}^m z_2(v) K_{g_1}(v - T_1) (\delta_1 - p(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = I_{1211}(g_1) I_{1212}(g_1) \end{aligned}$$

es, por (2.81) y (2.82), de orden $O(g_1^4)$.

Para $N^{1,2,1,2}(g_1)$, se tiene la siguiente esperanza del producto

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \right)^2 \right] \\ & = N_1^{1,2,1,2}(g_1) + N_2^{1,2,1,2}(g_1) + N_3^{1,2,1,2}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(s) K_{g_1}(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \psi(x) \psi(y) dx dy, \\ N_3^{1,2,1,2}(g_1) &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(s) K_{g_1}(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \phi(x) \psi(y) dx dy, \\ N_2^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(s) K_{g_1}(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \phi(x) \phi(y) dx dy. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{s-y}{g_1} = s_1$,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{21}(y + g_1 s_1) K(s_1) ds_1 w(t) dt \right)^2 \psi(x) \psi(y) dx dy \\ &= O(1). \end{aligned}$$

De modo completamente similar se prueba que

$$N_2^{1,2,1,2}(g_1) = O(1)$$

y

$$N_3^{1,2,1,2}(g_1) = O(1).$$

Como el producto de esperanzas es

$$\begin{aligned} & \left(E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \int_{\varepsilon'}^t z_2(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) ds w(t) dt \right] \right)^2 \\ &= I_{1211}(g_1)^2 = O(g_1^8) \end{aligned}$$

se obtiene el resultado (2.124).

Respecto a $N_1^{1,1,1,1}(g_1)$, la siguiente acotación es válida

$$\left| N_1^{1,2,2,2}(g_1) \right| \leq \frac{1}{g_1^4} \|K\|_{\infty}^4 \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_2(r)| dr \right)^2 w(t) dt \right)^2$$

donde $\|\cdot\|_{\infty}$ denota la norma del supremo. Puesto que las condiciones **(H.1)** y **(W.1)** implican la integrabilidad de $\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_2(r)| dr \right)^2 w(t) dt$, se obtiene el resultado (2.125). ■

Lema 2.2.19 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.8, se tiene*

$$Var \left[\widehat{A}_{123} \right] = O(n^{-1} g_1^4). \quad (2.126)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} Var \left[\widehat{A}_{123} \right] &= \frac{1}{2^2 n^4} Var \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) dr \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_j) (\delta_j - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Q^{i,j,k,l}(g_2) \\ &= \frac{1}{2^2 n^4} (n Q^{1,1,1,1}(g_1) + 2n(n-1) (Q^{1,2,2,2}(g_1) + Q^{1,2,1,1}(g_1)) \\ &\quad + n(n-1) (Q^{1,2,1,2}(g_1) + Q^{1,2,2,1}(g_1)) \\ &\quad + n(n-1)(n-2) (Q^{1,2,1,3}(g_1) + Q^{1,2,3,1}(g_1) + Q^{1,2,2,3}(g_1) + Q^{1,2,3,2}(g_1))) \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se ha definido

$$\begin{aligned} Q^{i,j,k,l}(g_1) &= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) dr \right. \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_j) (\delta_j - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt, \\ &\quad \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_k) (\delta_k - p(u)) du \\ &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_l) (\delta_l - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right]. \end{aligned}$$

Como se discutió con anterioridad para $Var \left[\widehat{A}_{122} \right]$, es suficiente con estudiar el orden de los términos $Q^{1,2,1,3}(g_1)$, $Q^{1,2,2,2}(g_1)$, $Q^{1,2,1,2}(g_1)$ y $Q^{1,1,1,1}(g_1)$.

Se aborda el estudio de $Q^{1,2,1,3}(g_1)$ analizando la esperanza

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \\ & \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = Q_1^{1,2,1,3}(g_1) + Q_2^{1,2,1,3}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} Q_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(s - y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ Q_2^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_0^{\infty} K_{g_1}''(s - y) (p(y) - p(s)) h(y) dy - \zeta(s) \right) ds w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Repetiendo ahora los mismos pasos seguidos en el análisis del término $M_1^{1,2,1,3}(g_1)$, tras hacer el cambio de variable $\frac{s-y}{g_1} = y_1$, $\frac{r-x}{g_1} = r_1$ y para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} Q_1^{1,2,1,3}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) \left(\int_{-L}^L K''(y_1) (p(s - g_1 y_1) - p(s)) h(s - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 \zeta(s) \right) ds w(t) dt \right)^2 \\ & \times \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Haciendo desarrollos de Taylor de $p(s - g_1 y_1) - p(s)$ y $h(s - g_1 y_1)$ en s

$$\begin{aligned} Q_1^{1,2,1,3}(g_1) &= g_1^4 \mu_K^2 \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \right. \\ & \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left(\frac{1}{2} h(r) p^{(4)}(r) + 2h'(r) p^{(3)}(r) + 3h''(r) p''(r) + 2h^{(3)}(r) p'(r) \right) dr w(t) dt \right)^2 \\ & \times \psi(x) dx + o(g_1^4) \\ & = O(g_1^4). \end{aligned}$$

Es inmediato reconocer, dada la similitud de $Q_1^{1,2,1,3}(g_1)$ con $Q_2^{1,2,1,3}(g_1)$, que

$$Q_2^{1,2,1,3}(g_1) = O(g_1^4)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q_1^{1,2,1,3}(g_1) &= Q_1^{1,2,1,3}(g_1) + Q_2^{1,2,1,3}(g_1) - I_{1231}(g_1)^2 \\ &= O(g_1^4) + O(g_1^8) = O(g_1^4) \end{aligned} \quad (2.127)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\ &\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\ &\times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \right. \\ &\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_3) (\delta_3 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ &= I_{1231}(g_1)^2 \end{aligned}$$

y el resultado (2.84).

Respecto a $Q^{1,2,2,2}(g_1)$, se considera primeramente la esperanza

$$\begin{aligned} &E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_2) (\delta_2 - p(u)) du \\ &\quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ &= \sum_{i=1}^7 Q_i^{1,2,2,2}(g_1) \end{aligned} \quad (2.128)$$

donde se define

$$\begin{aligned} Q_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(v) K_{g_1}''(v - x) dv w(m) dm \psi(x) dx, \\ Q_2^{1,2,2,2}(g_1) &= - \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u - x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(v) K_{g_1}''(v - x) dv w(m) dm \phi(x) dx, \\ Q_3^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) du \alpha_w(m) dm \psi(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_4^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^\infty K_{g_1}(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s-x) ds w(t) dt \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u-x) du \alpha_w(m) dm \phi(x) dx, \\
 Q_5^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^\infty K_{g_1}(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \alpha_w(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u-x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(v) K_{g_1}''(v-x) dv w(m) dm \psi(x) dx, \\
 Q_6^{1,2,2,2}(g_1) &= -2 \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^\infty K_{g_1}(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \alpha_w(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u-x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(v) K_{g_1}''(v-x) dv w(m) dm \phi(x) dx, \\
 Q_7^{1,2,2,2}(g_1) &= 4 \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_0^\infty K_{g_1}(r-y) (p(y) - p(r)) h(y) dy dr \alpha_w(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u-x) (p(x) - p(u)) du \alpha_w(m) dm h(x) dx.
 \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, $\frac{u-x}{g_1} = u_1$, $\frac{v-x}{g_1} = v_1$,

$$\begin{aligned}
 Q_1^{1,2,2,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} K(r-y) (p(r - g_1 y_1) - p(r)) h(r - g_1 y_1) dy_1 dr \\
 &\quad \times \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 u_1) K(u_1) du_1 \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 v_1) K''(v_1) dv_1 w(m) dm \psi(x) dx \\
 &= o(g_1^{-4}).
 \end{aligned}$$

Como es obvio, el mismo orden es válido para $Q_2^{1,2,2,2}(g_1)$. Los restantes términos de (2.128) pueden acotarse directamente. Sirva de ilustración el caso de $Q_3^{1,2,2,2}(g_1)$.

$$\left| Q_3^{1,2,2,2}(g_1) \right| \leq \frac{2}{g_1^5} \|K\|_\infty^2 \|K''\|_\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_2(r)| dr \right)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m |z_{21}(u) \alpha_w(m)| dudm,$$

luego

$$Q_3^{1,2,2,2}(g_1) = O(g_1^{-5}),$$

ya que de las condiciones **(H.1)** y **(W.1)** se deduce la integrabilidad de $\int_{\varepsilon'}^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_2(r)| dr \right)^2 w(t) dt$ y $\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m |z_{21}(u) \alpha_w(m)| dudm$. El mismo orden es evidentemente válido para los términos restantes de (2.128). Por tanto, teniendo nuevamente en cuenta que

$$\begin{aligned}
 &E \left[\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_2) (\delta_2 - p(u)) du \right. \\
& \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\
& = I_{1231}(g_1) I_{1232}(g_1)
\end{aligned}$$

y los resultados (2.84) y (2.85),

$$Q^{1,2,2,2}(g_1) = O(g_1^{-5}) - O(g_1^4)O(g_1^{-2}) = O(g_1^{-5}). \quad (2.129)$$

Respecto a $Q^{1,2,1,2}(g_1)$, se empieza por el estudio de la esperanza

$$\begin{aligned}
& E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\
& \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\
& \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \\
& \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\
& = \sum_{i=1}^8 Q_i^{1,2,1,2}(g_1) \quad (2.130)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_1^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \\
&\quad \times \psi(y) \psi(x) dx dy, \\
Q_2^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \\
&\quad \times \psi(y) \phi(x) dx dy, \\
Q_3^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \\
&\quad \times \phi(y) \psi(x) dx dy, \\
Q_4^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s - y) ds w(t) dt \right)^2 \\
&\quad \times \phi(y) \phi(x) dx dy, \\
Q_5^{1,2,1,2}(g_1) &= -2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \\
&\quad \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) K_{g_1}''(s - y) (p(y) - p(s)) ds w(t) dt \\
&\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) du \alpha_w(m) dm h(y) \psi(x) dy dx, \\
Q_6^{1,2,1,2}(g_1) &= -2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) K_{g_1}''(s-y) (p(y) - p(s)) ds w(t) dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u-x) du \alpha_w(m) dm h(y) \phi(x) dy dx, \\
 Q_7^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r-x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx, \\
 Q_8^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r-x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx.
 \end{aligned}$$

Los cuatro primeros términos se analizan del mismo modo, efectuando el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{s-y}{g_1} = s_1$. Así,

$$\begin{aligned}
 Q_1^{1,2,1,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{t-y}{g_1}} z_{11}(y + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \right)^2 \\
 & \quad \times \psi(y) \psi(x) dx dy \\
 &= o(g_1^{-4}),
 \end{aligned}$$

orden que es evidentemente también válido para los términos $Q_i^{1,2,1,2}(g_1)$, $i = 2, 3, 4$. No es difícil acotar directamente los términos restantes de (2.130). Por ejemplo,

$$\left| Q_5^{1,2,1,2}(g_1) \right| = \frac{2}{g_1^5} \|K\|_{\infty}^2 \|K''\|_{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_{21}(r)| dr \right)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m |z_{21}(u) \alpha_w(m)| dudm,$$

de donde,

$$Q_5^{1,2,2,2}(g_1) = O(g_1^{-5}), \tag{2.131}$$

ya que de las condiciones **(H.1)** y **(W.1)** se deduce la integrabilidad de $\int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t |z_{21}(r)| dr \right)^2 w(t) dt$ y $\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m |z_{21}(u) \alpha_w(m)| dudm$. El mismo procedimiento permite obtener los órdenes $O(g_1^{-5})$ para $Q_6^{1,2,2,2}(g_1)$ y $O(g_1^{-2})$ tanto para $Q_7^{1,2,2,2}(g_1)$ como para $Q_8^{1,2,2,2}(g_1)$.

Teniendo en cuenta que, como se probó en (2.84),

$$\begin{aligned}
 & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\
 & \quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\
 & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \right. \\
 & \quad \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_2) (\delta_2 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\
 &= I_{1231}(g_1)^2 = O(g_1^8)
 \end{aligned}$$

se tiene finalmente

$$Q^{1,2,1,2}(g_1) = O(g_1^{-5}).$$

Análogamente, para $Q^{1,1,1,1}(g_1)$ se aborda en primer lugar la esperanza

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \\ & \left. \times \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_1) (\delta_1 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = \sum_{i=1}^6 Q_i^{1,1,1,1}(g_1) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} Q_1^{1,1,1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{11}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ Q_2^{1,1,1,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \int_{\varepsilon'}^t z_{12}(s) K_{g_1}''(s - x) ds w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx, \\ Q_3^{1,1,1,1}(g_1) &= -4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \alpha_w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{21}(u) K_{g_1}(u - x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{11}(v) K_{g_1}''(v - x) dv w(m) dm \psi(x) dx, \\ Q_4^{1,1,1,1}(g_1) &= 4 \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \alpha_w(t) dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_{22}(u) K_{g_1}(u - x) du \int_{\varepsilon'}^m z_{12}(v) K_{g_1}''(v - x) dv w(m) dm \phi(x) dx, \\ Q_5^{1,1,1,1}(g_1) &= 4 \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{21}(r) K_{g_1}(r - x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ Q_6^{1,1,1,1}(g_1) &= 4 \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{22}(r) K_{g_1}(r - x) dr \alpha_w(t) dt \right)^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$,

$$\begin{aligned} Q_1^{1,1,1,1}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{21}(x + g_1 r_1) K(r_1) dr_1 \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{11}(x + g_1 s_1) K''(s_1) ds_1 w(t) dt \right)^2 \\ & \times \psi(x) dx \\ & = o(g_1^{-4}) \end{aligned}$$

y el mismo orden se obtiene evidentemente también para $Q_2^{1,1,1,1}(g_1)$. Por otra parte, acotando directamente

$$\left| Q_3^{1,1,1,1}(g_1) \right| \leq \frac{4}{g_1^5} \|K\|_{\infty}^2 \|K''\|_{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t |z_{21}(r)| dr |\alpha_w(t)| dt \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^m |z_{21}(u)| du \right)^2 w(m) dm$$

y $Q_3^{1,1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-5})$. Mediante el mismo procedimiento es sencillo obtener para $Q_4^{1,1,1,1}(g_1)$ el orden $O(g_1^{-5})$ y tanto para $Q_5^{1,1,1,1}(g_1)$ como para $Q_6^{1,1,1,1}(g_1)$ el orden $O(g_1^{-2})$.

Por fin, como por (2.85),

$$\begin{aligned} & \left[\left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) dr \right. \right. \\ & \quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^t z_1(s) (K_{g_1}''(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) - \zeta(s)) ds w(t) dt \right] \\ & \times E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_2(u) K_{g_1}(u - T_1) (\delta_1 - p(u)) du \right. \\ & \quad \times \left. \int_{\varepsilon'}^m z_1(v) (K_{g_1}''(v - T_1) (\delta_1 - p(v)) - \zeta(v)) dv w(m) dm \right] \\ & = I_{1232}(g_1)^2 = O(g_1^{-4}), \end{aligned}$$

se tiene

$$Q^{1,1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-5}). \quad (2.132)$$

La tesis del lema es consecuencia directa de los resultados (2.127)-(2.132) y de suponer, de acuerdo con **(V.1)**, que $ng_1 \rightarrow \infty$. ■

Lema 2.2.20 *Bajo las condiciones de los lemas 2.2.12, 2.2.17 y 2.2.18, las covarianzas $Cov[\widehat{A}_{121}, \widehat{A}_{122}]$, $Cov[\widehat{A}_{121}, \widehat{A}_{123}]$ y $Cov[\widehat{A}_{122}, \widehat{A}_{123}]$ son de orden $o(n^{-2}g_1^{-6})$.*

Demostración. A partir de los resultados (2.86), (2.121) y (2.126) es inmediato comprobar que el orden de las varianzas $Var[\widehat{A}_{121}]$, $Var[\widehat{A}_{122}]$ y $Var[\widehat{A}_{123}]$ es $o(n^{-2}g_1^{-6})$.

En virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left| Cov[\widehat{A}_{121}, \widehat{A}_{122}] \right| \leq Var[\widehat{A}_{121}]^{1/2} Var[\widehat{A}_{122}]^{1/2} = o(n^{-2}g_1^{-6})$$

y, obviamente, lo mismo es válido para $Cov[\widehat{A}_{121}, \widehat{A}_{123}]$ y $Cov[\widehat{A}_{122}, \widehat{A}_{123}]$. ■

En los dos siguientes lemas se considera el término \widehat{A}_{13} .

Lema 2.2.21 *Bajo las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(P.2)**, **(H.1)**, **(W.1)** y **(V.1)**, se tiene*

$$E[\widehat{A}_{13}] = O(g_1^4) + o(n^{-1}g_1^{-3}) \quad (2.133)$$

y

$$Var[\widehat{A}_{13}] = o(n^{-2}g_1^{-5}) + o(n^{-1}). \quad (2.134)$$

Demostración. Después de algunas cancelaciones en (2.35) se obtiene la siguiente expresión para \widehat{A}_{13} ,

$$\widehat{A}_{13} = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \left(\widehat{\psi}(r) - p(r)\widehat{h}(r) \right) \left(h(r)\widehat{h}''(r) - h''(r)\widehat{h}(r) \right) \alpha_w(t) dr dt.$$

Su esperanza es

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{A}_{13} \right] &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \frac{1}{n^2} z_3(r) \left(\sum_{i=1}^n K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(h(r) \sum_{j=1}^n K_{g_1}''(r - T_j) - h''(r) \sum_{j=1}^n K_{g_1}(r - T_j) \right) \alpha_w(t) dr dt \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} I_{131}(g_1) + \frac{1}{n} I_{132}(g_1) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_{131}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) (K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r))) \right. \\ &\quad \times \left. (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \right], \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} I_{132}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \times \left. (h(r) K_{g_1}''(r - T_1) - h''(r) K_{g_1}(r - T_1)) \alpha_w(t) dr dt \right]. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} I_{131}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) \\ &\quad \times (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) \alpha_w(t) h(x) h(y) dr dt dy dx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) h(x) dx \\ &\quad \times \int_0^{\infty} (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) h(y) dy \alpha_w(t) dr dt \\ &= \frac{1}{g_1^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \int_{-L}^L K(x_1) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1) dx_1 \\ &\quad \times \left(h(r) \int_{-L}^L K''(y_1) h(r - g_1 y_1) dy_1 - g_1^2 h''(r) \int_{-L}^L K(y_2) h(r - g_1 y_2) dy_2 \right) \\ &\quad \times \alpha_w(t) dr dt \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el teorema de Fubini, se ha efectuado el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$, $\frac{r-y}{g_1} = y_1$ y se ha supuesto $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Haciendo desarrollos de Taylor de $p(r - g_1 x_1) - p(r)$, $h(r - g_1 x_1)$, $h(r - g_1 y_1)$ y $h(r - g_1 y_2)$ en r es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned} I_{131}(g_1) &= \frac{1}{2} g_1^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \left(\frac{1}{2} p''(r) h(r) + p'(r) h'(r) \right) \left(h(r) h^{(4)}(r) - h''(r)^2 \right) \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad + o(g_1^4). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Análogamente, con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = x_1$,

$$I_{132}(g_1) = \frac{1}{g_1^3} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{-\infty}^{\frac{r}{g_1}} z_3(r) (p(r - g_1 x_1) - p(r)) h(r - g_1 x_1)$$

$$\begin{aligned}
 & \times (h(r)K''(x_1) - g_1^2 h''(r)K(x_1)) K(x_1) \alpha_w(t) dx_1 dr dt \\
 & = o(g_1^{-3}).
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

El resultado (2.133) se obtiene directamente a partir de de (2.137) y (2.138).

En cuanto a la varianza de \widehat{A}_{13} ,

$$\begin{aligned}
 Var [\widehat{A}_{13}] &= Var \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \right) \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}''(r - T_i) h(r) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(r - T_i) h''(r) \right) \alpha_w(t) dr dt \right] \\
 &= \frac{1}{n^4} Var \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \right. \\
 & \quad \times \left. (h(r)K_{g_1}''(r - T_j) - h''(r)K_{g_1}(r - T_j)) \alpha_w(t) dr dt \right] \\
 &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R^{i,j,k,l}(g_2) \\
 &= \frac{1}{n^4} (nR^{1,1,1,1}(g_1) + 2n(n-1)(R^{1,2,2,2}(g_1) + R^{1,2,1,1}(g_1)) \\
 & \quad + n(n-1)(R^{1,2,1,2}(g_1) + R^{1,2,2,1}(g_1)) \\
 & \quad + n(n-1)(n-2)(R^{1,2,1,3}(g_1) + R^{1,2,3,1}(g_1) + R^{1,2,2,3}(g_1) + R^{1,2,3,2}(g_1)))
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

donde para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se ha definido

$$\begin{aligned}
 R^{i,j,k,l}(g_1) &= Cov \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_i) (\delta_i - p(r)) \right. \\
 & \quad \times (h(r)K_{g_1}''(r - T_j) - h''(r)K_{g_1}(r - T_j)) \alpha_w(t) dr dt, \\
 & \quad \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_k) (\delta_k - p(s)) \\
 & \quad \times (h(s)K_{g_1}''(s - T_l) - h''(s)K_{g_1}(s - T_l)) \alpha_w(m) ds dm \left. \right].
 \end{aligned}$$

Como $R^{1,2,3,1}(g_1) = R^{1,2,2,3}(g_1)$, el estudio se limita a los términos $R^{1,2,1,3}(g_1)$, $R^{1,2,3,1}(g_1)$, $R^{1,2,3,2}(g_1)$, $R^{1,2,2,2}(g_1)$, $R^{1,2,1,1}(g_1)$, $R^{1,2,1,2}(g_1)$, $R^{1,2,2,1}(g_1)$ y $R^{1,1,1,1}(g_1)$.

El resultado (2.134) es consecuencia de los resultados siguientes, que se prueban en el lema 2.2.21,

$$\begin{aligned}
 R^{1,2,1,3}(g_1) &= O(g_1^4), & R^{1,2,3,1}(g_1) &= o(1), & R^{1,2,3,2}(g_1) &= o(1), \\
 R^{1,2,2,2}(g_1) &= o(g_1^{-5}), & R^{1,2,1,1}(g_1) &= o(g_1^{-5}), & R^{1,2,1,2}(g_1) &= o(g_1^{-5}), \\
 R^{1,2,2,1}(g_1) &= o(g_1^{-5}), & R^{1,1,1,1}(g_1) &= O(g_1^{-8})
 \end{aligned}$$

y de que, como consecuencia de la condición **(V.1)**, $ng^3 \rightarrow \infty$. ■

Lema 2.2.22 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.21, se tiene*

$$R^{1,2,1,3}(g_1) = O(g_1^4), \tag{2.140}$$

$$R^{1,2,3,1}(g_1) = o(1), \quad (2.141)$$

$$R^{1,2,3,2}(g_1) = o(1), \quad (2.142)$$

$$R^{1,2,2,2}(g_1) = o(g_1^{-5}), \quad (2.143)$$

$$R^{1,2,1,1}(g_1) = o(g_1^{-5}), \quad (2.144)$$

$$R^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-5}), \quad (2.145)$$

$$R^{1,2,2,1}(g_1) = o(g_1^{-5}) \quad (2.146)$$

y

$$R^{1,1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-8}). \quad (2.147)$$

Demostración. Empezando por el término $R^{1,2,1,3}(g_1)$, si se define

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,3}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) \\ &\quad \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_3) - h''(s) K_{g_1}(s - T_3)) \alpha_w(m) ds dm \right] \end{aligned}$$

y se recuerda la definición de $I_{131}(g_1)$ dada en la demostración del lema 2.2.20, se tiene

$$R^{1,2,1,3}(g_1) = R_1^{1,2,1,3}(g_1) - I_{131}(g_1)^2.$$

Tras algunos cálculos,

$$R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) = R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) + R_{12}^{1,2,1,3}(g_1)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{31}(r) K_{g_1}(r - x) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) h(y) dy \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \psi(x) dx, \\ R_{12}^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{32}(r) K_{g_1}(r - x) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) h(y) dy \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{r-y}{g_1} = y_1$ y suponiendo que $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{31}(x + g_1 r_1) K(r_1) \right. \\ &\quad \times \left(h(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K''(y_1) h(x + g_1 (r_1 - y_1)) dy_1 \right. \\ &\quad \left. \left. - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K(y_2) h(x + g_1 (r_1 - y_2)) dy_2 \right) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Valiéndose de desarrollos de Taylor de $h(x + g_1 (r_1 - y_1))$, $h(x + g_1 (r_1 - y_2))$, $h(x + g_1 r_1)$ y $h''(x + g_1 r_1)$ en x se tiene

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) &= \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{31}(x + g_1 r_1) K(r_1) \right. \\ &\quad \times \left(\left(h(x) + g_1 r_1 h'(x) + \frac{1}{2} g_1^2 r_1^2 h''(x) + \frac{1}{3!} g_1^3 r_1^3 h^{(3)}(\theta_3) \right) \right. \\ &\quad \times \left(h''(x) + g_1 r_1 h^{(3)}(x) + \frac{1}{2} g_1^2 h^{(4)}(x) (r_1^2 + \mu_K) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{5!} g_1^3 \int_{-L}^L K''(y_1) (r_1 - y_1)^5 h^{(5)}(\theta_1) dy_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(h''(x) + g_1 r_1 h^{(3)}(x) + \frac{1}{2} g_1^2 r_1^2 h^{(4)}(x) + \frac{1}{3!} g_1^3 r_1^3 h^{(5)}(\theta_4) \right) \right. \\ &\quad \times \left(h(x) + g_1 r_1 h'(x) + \frac{1}{2} g_1^2 h''(x) (r_1^2 + \mu_K) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3!} g_1^3 \int_{-L}^L K(y_2) (r_1 - y_2)^3 h^{(3)}(\theta_2) dy_2 \right) \right) \alpha_w(t) dr_1 dt \Big)^2 \psi(x) dx \end{aligned}$$

donde $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 son puntos intermedios entre x y $x + g_1 (r_1 - y_1)$, x y $x + g_1 (r_1 - y_2)$, x y $x + g_1 r_1$ y x y $x + g_1 r_1$, respectivamente. Por tanto, teniendo en consideración que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L K(y_1) (r_1 - y_1) dy_1 &= r_1, & \int_{-L}^L K(y_1) (r_1 - y_1)^2 dy_1 &= r_1^2 + \mu_K, \\ \int_{-L}^L K''(y_1) (r_1 - y_1) dy_1 &= 0, & \int_{-L}^L K''(y_1) (r_1 - y_1)^2 dy_1 &= 2, \\ \int_{-L}^L K''(y_1) (r_1 - y_1)^3 dy_1 &= 6r_1, & \int_{-L}^L K''(y_1) (r_1 - y_1)^4 dy_1 &= 12 (r_1^2 + \mu_K), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,3}(g_1) &= g_1^4 \frac{1}{4} \mu_K^2 \int_0^\infty \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{31}(x + g_1 r_1) K(r_1) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \\ &\quad \times \left(h^{(4)}(x) h(x) - h''(x)^2 \right)^2 \psi(x) dx + o(g_1^4) \\ &= O(g_1^4). \end{aligned}$$

Un razonamiento similar permite obtener

$$R_{12}^{1,2,1,3}(g_1) = O(g_1^4)$$

y como, por (2.137), $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$, se tiene que se verifica el resultado (2.140). Respecto a $R_1^{1,2,3,1}(g_1)$, si se procede como en la demostración del lema anterior definiendo

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,3,1}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_3) (\delta_3 - p(s)) \\ &\quad \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_1) - h''(s) K_{g_1}(s - T_1)) \alpha_w(m) ds dm \right], \end{aligned}$$

se tiene

$$R_1^{1,2,3,1}(g_1) = R_1^{1,2,3,1}(g_1) - I_{131}(g_1)^2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,3,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) h(y) dy \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) \int_0^{\infty} K_{g_1}(s - u) (p(u) - p(s)) h(u) du \\ &\quad \times (h(s) K_{g_1}''(s - x) - h''(s) K_{g_1}(s - x)) \alpha_w(m) h(x) ds dm dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{r-y}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$, $\frac{s-u}{g_1} = u_1$ y tomando $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,3,1}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_3(x + g_1 r_1) K(r_1) (p(x) - p(x + g_1 r_1)) \\ &\quad \times \left(h(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K''(y_1) h(x + g_1 (r_1 - y_1)) dy_1 \right. \\ &\quad \left. - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K(y_2) h(x + g_1 (r_1 - y_2)) dy_2 \right) \alpha_w(t) dr_1 dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_3(s) \int_{-L}^L K(u_1) (p(x + g_1 (s_1 - u_1)) - p(x + g_1 s_1)) \\ &\quad \times h(x + g_1 (s_1 - u_1)) du_1 (h(x + g_1 s_1) K''(s_1) - g_1^2 h''(x + g_1 s_1) K(s_1)) \\ &\quad \times \alpha_w(m) h(x) ds_1 dm dx. \end{aligned}$$

Si, como en la demostración del lema previo, el factor

$$h(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K''(y_1) h(x + g_1 (r_1 - y_1)) dy_1 - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) \int_{-L}^L K(y_2) h(x + g_1 (r_1 - y_2)) dy_2$$

se analiza mediante desarrollos de Taylor, se tiene

$$R_1^{1,2,3,1}(g_1) = \frac{1}{2} \mu_K \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_3(x + g_1 r_1) K(r_1) (p(x) - p(x + g_1 r_1))$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(h^{(4)}(x)h(x) - h''(x)^2 \right) \alpha_w(t) dr_1 dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_3(s) \int_{-L}^L K(u_1) (p(x + g_1(s_1 - u_1)) - p(x + g_1 s_1)) \\
 & \times h(x + g_1(s_1 - u_1)) du_1 (h(x + g_1 s_1) K''(s_1) - g_1^2 h''(x + g_1 s_1) K(s_1)) \\
 & \times \alpha_w(m) h(x) ds_1 dm dx + o(1) \\
 & = o(1)
 \end{aligned}$$

y se obtiene el resultado (2.141) con sólo recordar que $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$.

Pasando a $R_1^{1,2,3,2}(g_1)$, se define

$$\begin{aligned}
 R_1^{1,2,3,2}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\
 & \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_3) (\delta_3 - p(s)) \\
 & \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_2) - h''(s) K_{g_1}(s - T_2)) \alpha_w(m) ds dm \right],
 \end{aligned}$$

de modo que

$$R_1^{1,2,3,2}(g_1) = R_1^{1,2,3,2}(g_1) - I_{131}(g_1)^2.$$

En cuanto a $R_1^{1,2,3,2}(g_1)$,

$$\begin{aligned}
 R_1^{1,2,3,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) \int_0^{\infty} K_{g_1}(r - y) (p(y) - p(r)) h(y) dy \right. \\
 & \left. \times (h(r) K_{g_1}''(r - x) - h''(r) K_{g_1}(r - x)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 h(x) dx.
 \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{r-y}{g_1} = y_1$ y para $g_1 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned}
 R_1^{1,2,3,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^4} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_3(x + g_1 r_1) \right. \\
 & \times \int_{-L}^L K(y_1) (p(x + g_1(r_1 - y_1)) - p(x + g_1 r_1)) h(x + g_1(r_1 - y_1)) dy_1 \\
 & \left. \times (h(x + g_1 r_1) K''(r_1) - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) K(r_1)) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 h(x) dx.
 \end{aligned}$$

Mediante desarrollos de Taylor de $p(x + g_1(r_1 - y_1))$, $p(x + g_1 r_1)$ y $h(x + g_1(r_1 - y_1))$ en x se tiene tras algunos cálculos

$$\begin{aligned}
 R_1^{1,2,3,2}(g_1) &= \mu_K \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_3(x + g_1 r_1) \left(\frac{1}{2} p''(x) h(x) + p'(x) h'(x) \right) \right. \\
 & \left. \times (h(x + g_1 r_1) K''(r_1) - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) K(r_1)) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 h(x) dx + o(1)
 \end{aligned}$$

$$= o(1)$$

y para obtener el resultado (2.142) basta con tener en cuenta que $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$.

El término $R_1^{1,2,2,2}(g_1)$ se analiza de modo similar. Definiendo

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,2}(g_1) = & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ & \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) \\ & \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_2) - h''(s) K_{g_1}(s - T_2)) \alpha_w(m) ds dm \right] \end{aligned}$$

y recordando la definición de $I_{132}(g_1)$ dada en (2.136), se tiene

$$R_1^{1,2,2,2}(g_1) = R_1^{1,2,2,2}(g_1) - I_{131}(g_1)I_{132}(g_1).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,2}(g_1) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) \\ & \times (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) \alpha_w(t) h(x) dr dt dx \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - y) (p(y) - p(s)) \\ & \times (h(s) K_{g_1}''(s - y) - h''(s) K_{g_1}(s - y)) \alpha_w(m) h(y) ds dm dy. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $\frac{r-y}{g_1} = r_1$, $\frac{x-y}{g_1} = x_1$, $\frac{s-y}{g_1} = s_1$,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,2}(g_1) = & \frac{1}{g_1^5} \int_0^{\infty} \int_{\frac{-y}{g_1}}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{t-y}{g_1}} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-y}{g_1}}^{\frac{m-y}{g_1}} z_3(y + g_1 r_1) K(r_1 - x_1) (p(y + g_1 x_1) - p(y + g_1 r_1)) \\ & \times (h(y + g_1 r_1) K''(r_1) - g_1^2 h''(y + g_1 r_1) K(r_1)) \alpha_w(t) h(y + g_1 x_1) \\ & \times z_3(y + g_1 s_1) K(s_1) (p(y) - p(y + g_1 s_1)) \\ & \times (h(y + g_1 s_1) K''(s_1) - g_1^2 h''(y + g_1 s_1) K(s_1)) \alpha_w(m) h(y) ds_1 dm dr_1 dt dx_1 dy \\ = & o(g_1^{-5}) \end{aligned}$$

y se obtiene el resultado (2.143) teniendo en cuenta que, según (2.137) y (2.138), $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$ y $I_{132}(g_1) = o(g_1^{-3})$.

En cuanto a $R_1^{1,2,1,1}(g_1)$, como en la demostración de los resultados precedentes, se comienza por definir

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,1}(g_1) = & E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ & \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) \\ & \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_1) - h''(s) K_{g_1}(s - T_1)) \alpha_w(m) ds dm \right] \end{aligned}$$

de modo que

$$R^{1,2,1,1}(g_1) = R_1^{1,2,1,1}(g_1) - I_{131}(g_1)I_{132}(g_1).$$

Tras algunos cálculos, se obtiene

$$R_1^{1,2,1,1}(g_1) = R_{11}^{1,2,1,1}(g_1) + R_{12}^{1,2,1,1}(g_1)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_{31}(r)K_{g_1}(r-x) \\ &\quad \times \int_0^\infty (h(r)K_{g_1}''(r-y) - h''(r)K_{g_1}(r-y)) h(y)dy\alpha_w(t)drdt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_{31}(s)K_{g_1}(s-x) (h(s)K_{g_1}''(s-x) - h''(s)K_{g_1}(s-x)) \alpha_w(m)dsdm\psi(x)dx, \\ R_{12}^{1,2,1,1}(g_1) &= \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t z_{32}(r)K_{g_1}(r-x) \\ &\quad \times \int_0^\infty (h(r)K_{g_1}''(r-y) - h''(r)K_{g_1}(r-y)) h(y)dy\alpha_w(t)drdt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^m z_{32}(s)K_{g_1}(s-x) (h(s)K_{g_1}''(s-x) - h''(s)K_{g_1}(s-x)) \alpha_w(m)dsdm\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1, \frac{y-x}{g_1} = y_1, \frac{s-x}{g_1} = s_1,$

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,1}(g_1) &= \frac{1}{g_1^5} \int_0^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{31}(x+g_1r_1)K(r_1) \\ &\quad \times \int_{\frac{-x}{g_1}}^\infty (h(x+g_1r_1)K''(r_1-y_1) - g_1^2h''(r)K(r_1-y_1)) h(x+g_1y_1)dy_1\alpha_w(t)dr_1dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_{31}(x+g_1s_1)K(s_1) \\ &\quad \times (h(x+g_1s_1)K''(s_1) - g_1^2h''(x+g_1s_1)K(s_1)) \alpha_w(m)ds_1dm\psi(x)dx \\ &= o(g_1^{-5}), \end{aligned}$$

pues, en efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{g_1 \rightarrow 0} g_1^5 R_{11}^{1,2,1,1}(g_1) &= \int_{-L}^L K(r_1) \int_{r_1-L}^{r_1+L} K''(r_1-y_1)dy_1dr_1 \int_{-L}^L K(s_1)K''(s_1)ds_1 \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^\infty A_w(x)^2 z_{31}(x)^2 \psi(x)h(x)^3 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

El mismo procedimiento permite obtener

$$R_{12}^{1,2,1,1}(g_1) = o(g_1^{-5}).$$

Se obtiene el resultado (2.144) directamente a partir de estos resultados y recordando además que $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$ y $I_{132}(g_1) = o(g_1^{-3})$.

Respecto a $R^{1,2,1,2}(g_1)$, definiendo

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,2}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \\ &\quad \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) \\ &\quad \left. \times (h(s) K_{g_1}''(s - T_2) - h''(s) K_{g_1}(s - T_2)) \alpha_w(m) ds dm \right], \end{aligned}$$

se tiene

$$R^{1,2,1,2}(g_1) = R_1^{1,2,1,2}(g_1) - I_{131}(g_1)^2.$$

Ahora,

$$R_1^{1,2,1,2}(g_1) = R_{11}^{1,2,1,2}(g_1) + R_{12}^{1,2,1,2}(g_1)$$

donde se define

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{31}(r) K_{g_1}(r - x) \right. \\ &\quad \left. \times (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 \psi(x) h(y) dx dy, \\ R_{12}^{1,2,1,2}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_{32}(r) K_{g_1}(r - x) \right. \\ &\quad \left. \times (h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y)) \alpha_w(t) dr dt \right)^2 h(x) h(y) dx dy. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{y-x}{g_1} = y_1$,

$$\begin{aligned} R_{11}^{1,2,1,2}(g_1) &= \frac{1}{g_1^5} \int_0^{\infty} \int_{\frac{-x}{g_1}}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_{31}(x + g_1 r_1) K(r_1) \right. \\ &\quad \left. \times (h(x + g_1 r_1) K''(r_1 - y_1) - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) K(r_1 - y_1)) \alpha_w(t) dr_1 dt \right)^2 \\ &\quad \times \psi(x) h(x + g_1 y_1) dy_1 dx \\ &= o(g_1^{-5}). \end{aligned}$$

Análogamente, con este mismo procedimiento aplicado al término $R_{12}^{1,2,1,2}(g_1)$ se obtiene

$$R_{12}^{1,2,1,2}(g_1) = o(g_1^{-5}).$$

Se llega a (2.145) teniendo en cuenta estos resultados y que, según (2.137), $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$.

Pasando al término $R^{1,2,2,1}(g_1)$, se define

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,1}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ &\quad \left. \times (h(r) K_{g_1}''(r - T_2) - h''(r) K_{g_1}(r - T_2)) \alpha_w(t) dr dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_2) (\delta_2 - p(s)) \\ & \times \left(h(s) K_{g_1}''(s - T_1) - h''(s) K_{g_1}(s - T_1) \right) \alpha_w(m) dsd \Bigg], \end{aligned}$$

de modo que

$$R_1^{1,2,2,1}(g_1) = R_1^{1,2,2,1}(g_1) - I_{131}(g_1)^2.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,1}(g_1) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - x) (p(x) - p(r)) \\ & \times \left(h(r) K_{g_1}''(r - y) - h''(r) K_{g_1}(r - y) \right) \alpha_w(t) dr dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - y) (p(y) - p(s)) \\ & \times \left(h(s) K_{g_1}''(s - x) - h''(s) K_{g_1}(s - x) \right) \alpha_w(m) ds dm h(x) h(y) dx dy \end{aligned}$$

y con el cambio de variable $\frac{r-x}{g_1} = r_1$, $\frac{y-x}{g_1} = y_1$, $\frac{s-x}{g_1} = s_1$,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,2,1}(g_1) &= \frac{1}{g_1^5} \int_0^{\infty} \int_{\frac{-x}{g_1}}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{t-x}{g_1}} z_3(x + g_1 r_1) K(r_1) (p(x) - p(x + g_1 r_1)) \\ & \times \left(h(x + g_1 r_1) K''(r_1 - y_1) - g_1^2 h''(x + g_1 r_1) K(r_1 - y_1) \right) \alpha_w(t) dr_1 dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_1}}^{\frac{m-x}{g_1}} z_3(x + g_1 s_1) K(s_1 - y_1) (p(x + g_1 y_1) - p(x + g_1 s_1)) \\ & \times \left(h(x + g_1 s_1) K''(s_1) - g_1^2 h''(x + g_1 s_1) K(s_1) \right) \alpha_w(m) ds_1 dm h(x) h(x + g_1 y_1) dy_1 dx \\ & = o(g_1^{-5}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta nuevamente que $I_{131}(g_1) = O(g_1^4)$, se obtiene el resultado (2.146).

Finalmente, en cuanto a $R_1^{1,1,1,1}(g_1)$ se define

$$\begin{aligned} R_1^{1,1,1,1}(g_1) &= E \left[\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_3(r) K_{g_1}(r - T_1) (\delta_1 - p(r)) \right. \\ & \times \left(h(r) K_{g_1}''(r - T_1) - h''(r) K_{g_1}(r - T_1) \right) \alpha_w(t) dr dt \\ & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^m z_3(s) K_{g_1}(s - T_1) (\delta_1 - p(s)) \\ & \left. \times \left(h(s) K_{g_1}''(s - T_1) - h''(s) K_{g_1}(s - T_1) \right) \alpha_w(m) ds dm \right]. \end{aligned}$$

Así

$$R_1^{1,1,1,1}(g_1) = R_1^{1,1,1,1}(g_1) - I_{132}(g_1)^2.$$

$R_1^{1,1,1,1}(g_1)$ se puede acotar directamente,

$$\left| R_1^{1,1,1,1}(g_1) \right| \leq \frac{2}{g_1^2} \|K\|_{\infty}^2 \left(g_1^{-6} \|K''\|_{\infty}^2 \left(\int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t |z_3(r) h(r) \alpha_w(t)| dr dt \right)^2 \right)$$

$$+\frac{1}{g_1^2} \|K\|_\infty^2 \left(\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t |z_3(r)h''(r)\alpha_w(t)| dr dt \right)^2$$

y, como $\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t |z_3(r)h(r)\alpha_w(t)| dr dt$ y $\int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^t |z_3(r)h''(r)\alpha_w(t)| dr dt$ son integrables

$$R_1^{1,1,1}(g_1) = O(g_1^{-8}).$$

Se obtiene así el resultado (2.147), ya que, de acuerdo con (2.138), $I_{132}(g_1) = o(g_1^{-3})$. ■

En el siguiente lema se da el orden de $Cov[\widehat{A}_{12}, \widehat{A}_{13}]$, $Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{12}]$ y $Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{13}]$.

Lema 2.2.23 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{12}] = o(n^{-2}g_1^{-6}), \quad (2.148)$$

$$Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{13}] = o(n^{-2}g_1^{-6}) \quad (2.149)$$

y

$$Cov[\widehat{A}_{12}, \widehat{A}_{13}] = o(n^{-2}g_1^{-6}). \quad (2.150)$$

Demostración. Según los lemas 2.2.2, 2.2.8 y 2.2.21 las varianzas $Var[\widehat{A}_{11}]$, $Var[\widehat{A}_{12}]$ y $Var[\widehat{A}_{13}]$ tienen respectivamente órdenes $O(n^{-1})$, $o(n^{-2}g_1^{-6})$ y $o(n^{-2}g_1^{-5}) + o(n^{-1})$. Bajo la condición (V.1),

$$\frac{Var[\widehat{A}_{11}]}{n^{-2}g_1^{-6}} = \frac{Var[\widehat{A}_{11}]}{n^{-1}} ng_1^6 = O(1)o(1) = o(1)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{Var[\widehat{A}_{13}]}{n^{-2}g_1^{-6}} &= \frac{Var[\widehat{A}_{13}]}{n^{-2}g_1^{-5} + n^{-1}} \frac{n^{-2}g_1^{-5} + n^{-1}}{n^{-2}g_1^{-6}} = \frac{Var[\widehat{A}_{13}]}{n^{-2}g_1^{-5} + n^{-1}} (g_1 + ng_1^6) \\ &= o(1)o(1) = o(1), \end{aligned}$$

es decir, tanto $Var[\widehat{A}_{11}]$ como $Var[\widehat{A}_{13}]$ son de orden $o(n^{-2}g_1^{-6})$. Por tanto, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$|Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{12}]| \leq Var[\widehat{A}_{11}]^{1/2} Var[\widehat{A}_{12}]^{1/2} = o(n^{-2}g_1^{-6}),$$

$$|Cov[\widehat{A}_{11}, \widehat{A}_{13}]| \leq Var[\widehat{A}_{11}]^{1/2} Var[\widehat{A}_{13}]^{1/2} = o(n^{-2}g_1^{-6}),$$

$$|Cov[\widehat{A}_{12}, \widehat{A}_{13}]| \leq Var[\widehat{A}_{12}]^{1/2} Var[\widehat{A}_{13}]^{1/2} = o(n^{-2}g_1^{-6})$$

y, por tanto, los resultados (2.148), (2.149) y (2.150). ■

Lema 2.2.24 *Bajo las condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\tilde{A}_1 - A = O_P(g_1^2 + n^{-1}g_1^{-3}). \quad (2.151)$$

Demostración. De la definición (2.37), $\tilde{A}_1 = A + \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12} + \hat{A}_{13}$. De los lemas 2.2.2, 2.2.8, 2.2.21 y 2.2.23 es inmediato concluir que

$$E[\tilde{A}_1 - A] = C_1 g_1^2 + \frac{C_2}{ng_1^3} + O(g_1^4) + o(n^{-1}g_1^{-3}) \quad (2.152)$$

y

$$\text{Var}[\tilde{A}_1 - A] = O(n^{-1}) + o(n^{-2}g_1^{-6}) \quad (2.153)$$

donde se define

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\mu_K \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^t \frac{1}{1-H(r)} \left(p^{(4)}(r)h(r) + 4p^{(3)}(r)h'(r) + 5p''(r)h''(r) \right. \\ &\quad \left. + 4p'(r)h^{(3)}(r) - 2p'(r)h(r)^{-1}h'(r)h''(r) \right) \alpha_w(t) dr dt, \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}c_{K'} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(1-p(x))p(x)h(x)w(x)}{(1-H(x))^2} dx. \quad (2.155)$$

La desigualdad de Tchebychev permite obtener directamente la acotación en probabilidad del resultado (2.151). ■

Nótese que los términos \hat{A}_{11} , \hat{A}_{12} y \hat{A}_{13} de \tilde{A}_1 se caracterizan por tener a lo sumo dos factores del tipo $(\hat{h}^{(i)} - h^{(i)})$, $(\hat{\psi}^{(j)} - \psi^{(j)})$, $i, j = 0, 1, 2$. Por otra parte, en las expresiones que constituyen el término \hat{A}_{14} de la representación (2.37) aparecen al menos tres factores del tipo $(\hat{p} - p)$, $(\hat{h}^{(i)} - h^{(i)})$ o $(\hat{\psi}^{(j)} - \psi^{(j)})$, $i, j = 0, 1, 2$.

A continuación, se tratará de establecer la despreciablez de \hat{A}_{14} respecto a $\tilde{A}_1 - A$, demostrando su acotación en probabilidad a una tasa más rápida que la dada en el lema 2.151. Para ello se empleará la generalización de los teoremas 1.2.1-1.2.3 dada en las observaciones 1.2.1 y 1.2.2.

Se considera la siguiente representación de \hat{A}_{14} , obtenida a partir de (2.36),

$$\hat{A}_{14} = \hat{A}_{141} + \hat{A}_{142} + \hat{A}_{143} \quad (2.156)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \hat{A}_{141} &= -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left((\hat{\psi}''(r) - \psi''(r)) - p(r)(\hat{h}''(r) - h''(r)) \right) \\ &\quad \times z_1(s)(\hat{p}(s) - p(s))(\hat{h}''(s) - h''(s))w(t) dr ds dt \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r)(\hat{p}(r) - p(r))(\hat{h}''(r) - h''(r)) dr \right)^2 w(t) dt, \\ \hat{A}_{142} &= -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left((\hat{\psi}''(r) - \psi''(r)) - p(r)(\hat{h}''(r) - h''(r)) \right) \\ &\quad \times z_2(s)(\hat{p}(s) - p(s))(\hat{h}(s) - h(s))w(t) dr ds dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left((\hat{\psi}(r) - \psi(r)) - p(r)(\hat{h}(r) - h(r)) \right) \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned}
& \times z_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}''(s) - h''(s))w(t)drdsdt \\
& + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_1(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}(r) - h(r))(\widehat{h}''(r) - h''(r))\alpha_w(t)drdt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \\
& \times z_2(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}(s) - h(s))w(t)drdsdt, \tag{2.158} \\
\widehat{A}_{143} & = \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_2(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}(r) - h(r))dr \right)^2 w(t)dt \\
& - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left((\widehat{\psi}(r) - \psi(r)) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r)) \right) \\
& \times z_2(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}(s) - h(s))w(t)drdsdt \\
& + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}(r) - h(r))^2 \alpha(t)w(t)drdt. \tag{2.159}
\end{aligned}$$

Lema 2.2.25 *Bajo las condiciones del lema 2.2.2, se tiene*

$$\widehat{A}_{14} = o_P(n^{-1}g_1^{-3}).$$

Demostración. Como se hizo notar más arriba las expresiones que constituyen los términos de la representación (2.156) de \widehat{A}_{14} se caracterizan por la presencia de tres ó cuatro factores del tipo $(\widehat{h}^{(i)} - h^{(i)})$, $(\widehat{\psi}^{(j)} - \psi^{(j)})$ o $(\widehat{p} - p)$, con $i, j = 0, 1, 2$. La línea general de la demostración consiste en aplicar a dichos términos la extensión de los teoremas 1.2.1-1.2.3 dada en las observaciones 1.2.1 y 1.2.2. En caso de que el orden máximo de las derivadas de $(\widehat{h} - h)$ o $(\widehat{\psi} - \psi)$ presentes en un término sea mayor de 1, deberá ser rebajado previamente mediante integración por partes.

Procediendo así con el primer sumando de \widehat{A}_{141} en (2.157), descómponiéndolo en suma de dos y haciendo en el primero de ellos

$$\begin{aligned}
z_1(r) &= u_1, & \widehat{\psi}''(r) - \psi''(r)dr &= dv_1, \\
z_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) &= u_2, & \widehat{h}''(s) - h''(s)ds &= dv_2
\end{aligned}$$

y en el segundo

$$\begin{aligned}
z_{12}(r) &= u_1, & \widehat{h}''(r) - h''(r)dr &= dv_1, \\
z_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) &= u_2, & \widehat{h}''(s) - h''(s)ds &= dv_2,
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t \int_{\varepsilon'}^t z_1(r) \left((\widehat{\psi}''(r) - \psi''(r)) - p(r)(\widehat{h}''(r) - h''(r)) \right) \\
& \times z_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}''(s) - h''(s))w(t)drdsdt \\
& = -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t)(\widehat{\psi}'(t) - \psi'(t)) - z_1(\varepsilon')(\widehat{\psi}'(\varepsilon') - \psi'(\varepsilon')) - \int_{\varepsilon'}^t z_1'(r)(\widehat{\psi}'(r) - \psi'(r))dr \right) \\
& \times \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) - z_1(\varepsilon')(\widehat{p}(\varepsilon') - p(\varepsilon'))(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) \right. \\
& \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z_1'(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s))) (\widehat{h}'(s) - h'(s))ds \right) w(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_{12}(t)(\widehat{h}'(t) - h'(t)) - z_{12}(\varepsilon')(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) - \int_{\varepsilon'}^t z'_{12}(r)(\widehat{h}'(r) - h'(r))dr \right) \\
 & \times \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) - z_1(\varepsilon')(\widehat{p}(\varepsilon') - p(\varepsilon'))(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z'_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s))) (\widehat{h}'(s) - h'(s))ds \right) w(t)dt \\
 = & \frac{1}{2} z_1(\varepsilon') \left((\widehat{\psi}'(\varepsilon') - \psi'(\varepsilon')) + p(\varepsilon')(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) \right) \\
 & \times \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) - z_1(\varepsilon')(\widehat{p}(\varepsilon') - p(\varepsilon'))(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z'_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s))) (\widehat{h}'(s) - h'(s))ds \right) w(t)dt \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t) \left((\widehat{\psi}'(t) - \psi'(t)) - p(t)(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t \left(z'_1(r)(\widehat{\psi}'(r) - \psi'(r)) - z'_{12}(r)(\widehat{h}'(r) - h'(r)) \right) dr \right) \\
 & \times \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) - z_1(\varepsilon')(\widehat{p}(\varepsilon') - p(\varepsilon'))(\widehat{h}'(\varepsilon') - h'(\varepsilon')) \right) \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z'_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s))) (\widehat{h}'(s) - h'(s))ds \right) w(t)dt.
 \end{aligned}$$

Como $p(\varepsilon') = 1$, $\psi'(\varepsilon') = h'(\varepsilon')$ y para ventanas inferiores a cierto valor, se tiene, con probabilidad 1 $\widehat{p}(\varepsilon') = 1$ y $\widehat{\psi}'(\varepsilon') = \widehat{h}'(\varepsilon')$, la expresión anterior equivale a

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t) \left((\widehat{\psi}'(t) - \psi'(t)) - p(t)(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t \left(z'_1(r)(\widehat{\psi}'(r) - \psi'(r)) - z'_{12}(r)(\widehat{h}'(r) - h'(r)) \right) dr \right) \\
 & \times \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z'_1(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s))) (\widehat{h}'(s) - h'(s))ds \right) w(t)dt. \quad (2.160)
 \end{aligned}$$

En cuanto al segundo sumando de \widehat{A}_{141} en (2.157), una simple comparación con el primero permite escribir

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon'}^t z_1(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}''(r) - h''(r))dr \right)^2 w(t)dt \\
 = & \frac{1}{4} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right. \\
 & \left. - \int_{\varepsilon'}^t (z'_1(r)(\widehat{p}(r) - p(r)) + z_1(r)(\widehat{p}'(r) - p'(r))) (\widehat{h}'(r) - h'(r))dr \right)^2 w(t)dt. \quad (2.161)
 \end{aligned}$$

Considerando simultáneamente las expresiones (2.160) y (2.161) es inmediato obtener, de acuerdo con las observaciones 1.2.1 y 1.2.2,

$$\widehat{A}_{141} = O_P \left(n^{-1/2} g_1^{5/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{1/2} + n^{-3/2} g_1^{-9/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{3/2} \right)$$

y, por la hipótesis **(V.1)**,

$$\widehat{A}_{141} = O_P \left(n^{-3/2} g_1^{-9/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{3/2} \right). \quad (2.162)$$

Procediendo igual con la expresión (2.158) correspondiente a \widehat{A}_{142} , se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{142} = & -\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t) \left((\widehat{\psi}'(t) - \psi'(t)) - p(t)(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right) \right. \\ & - \int_{\varepsilon'}^t \left(z_1'(r)(\widehat{\psi}'(r) - \psi'(r)) - z_{12}'(r)(\widehat{h}'(r) - h'(r)) \right) dr \Big) \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_2(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}(s) - h(s)) ds w(t) dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^t z_2(r) \left((\widehat{\psi}(r) - \psi(r)) - p(r)(\widehat{h}(r) - h(r)) \right) \\ & \times \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right. \\ & - \int_{\varepsilon'}^t \left(z_1'(s)(\widehat{p}(s) - p(s)) + z_1(s)(\widehat{p}'(s) - p'(s)) \right) (\widehat{h}'(s) - h'(s)) ds \Big) w(t) dt \\ & + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}(t) - h(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right. \\ & - \int_{\varepsilon'}^t \left(z_1'(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}(r) - h(r)) + z_1(r)(\widehat{p}'(r) - p'(r))(\widehat{h}(r) - h(r)) \right. \\ & \left. \left. + z_1(r)(\widehat{p}(r) - p(r))(\widehat{h}'(r) - h'(r)) \right) (\widehat{h}'(r) - h'(r)) dr \right) \alpha_w(t) dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(z_1(t)(\widehat{p}(t) - p(t))(\widehat{h}'(t) - h'(t)) \right. \\ & - \int_{\varepsilon'}^t \left(z_1'(r)(\widehat{p}(r) - p(r)) + z_1(r)(\widehat{p}'(r) - p'(r)) \right) (\widehat{h}'(r) - h'(r)) dr \Big) \\ & \times \int_{\varepsilon'}^t z_2(s)(\widehat{p}(s) - p(s))(\widehat{h}(s) - h(s)) ds w(t) dt \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta nuevamente las observaciones 1.2.1 y 1.2.2 y la hipótesis **(V.1)**, se tiene

$$\widehat{A}_{142} = O_P \left(n^{-1} g_1^{-1} \left(\log \frac{1}{g_1} \right) + n^{-3/2} g_1^{-7/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{3/2} \right). \quad (2.163)$$

Por último, para la expresión (2.159) correspondiente al término \widehat{A}_{143} , aplicando directamente las observaciones 1.2.1 y 1.2.2 y la hipótesis **(V.1)**,

$$\widehat{A}_{143} = O_P \left(n^{-1/2} g_1^{7/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{1/2} + n^{-3/2} g_1^{-3/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{3/2} \right). \quad (2.164)$$

Reuniendo los resultados (2.162), (2.163), (2.164) y aplicando la hipótesis **(V.1)** se concluye que

$$\widehat{A}_{14} = O_P \left(n^{-3/2} g_1^{-9/2} \left(\log \frac{1}{g_1} \right)^{3/2} \right). \quad (2.165)$$

La tesis del lema se desprende de (2.165) como consecuencia directa de la hipótesis **(V.1)**. ■

Teorema 2.2.1 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.1), se tiene*

$$MSE(\tilde{A}_1) = AMSE(\tilde{A}_1) + O(g_1^6) + o(n^{-1}g_1^{-1}) + o(n^{-2}g_1^{-6})$$

donde

$$AMSE(\tilde{A}_1) = \left(C_1 g_1^2 + \frac{C_2}{n g_1^3} \right)^2.$$

Por tanto, la ventana que minimiza el $AMSE(\tilde{A}_1)$ es

$$g_{1,AMSE} = \frac{C}{n^{1/5}} \tag{2.166}$$

donde

$$C = \begin{cases} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right)^{1/5}, & \text{si } C_1 < 0 \\ \left(\frac{3C_2}{2C_1} \right)^{1/5}, & \text{si } C_1 > 0 \end{cases}$$

y C_1 y C_2 se definieron en (2.154) y (2.155), respectivamente.

Demostración. De las expresiones (2.152) y (2.153) para la esperanza y la varianza de $\tilde{A}_1 - A$ — dadas en la demostración del lema 2.2.24— es inmediato deducir su error cuadrático medio, expresado en función de g_1 ,

$$MSE(\tilde{A}_1) = \left(C_1 g_1^2 + \frac{C_2}{n g_1^3} \right)^2 + O(g_1^6) + o(n^{-1}g_1^{-1}) + o(n^{-2}g_1^{-6}).$$

El valor de g_1 que minimiza el error cuadrático medio es, salvo términos de orden despreciable, el que minimiza su parte dominante. Puesto que $C_2 > 0$, deben considerarse a la hora de hallar dicho mínimo dos casos distintos, según cuál sea el signo de C_1 (el caso particular $C_1 = 0$, que conlleva un estudio más fino del orden del sesgo y la varianza, no se considera). Así, si $C_1 < 0$ el mínimo se alcanza cuando $C_1 g_1^2 + C_2 n^{-1} g_1^{-3} = 0$, es decir, para

$$g_1 = \left(-\frac{C_2}{C_1 n} \right)^{1/5},$$

mientras que si $C_1 > 0$ el mínimo se alcanza en el punto en que se anula la derivada respecto a g_1 de $C_1 g_1^2 + C_2 n^{-1} g_1^{-3}$, es decir, en

$$g_1 = \left(\frac{3C_2}{2C_1 n} \right)^{1/5},$$

con lo que queda probada la tesis del teorema. ■

A continuación, se estudia el estimador de Q propuesto en (2.18),

$$\hat{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{p}(T_i) (1 - \hat{p}(T_i)) w(T_i)}{\left(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n} \right)^2}.$$

Se necesitarán en lo sucesivo las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} z_4 &= (1 - H)^{-2} w, & z_{41} &= z_4 h^{-2}, & z_{42} &= z_4 h^{-1}, \\ z_5 &= (1 - H)^{-2} (1 - 2p) w, & z_{51} &= z_5 h^{-1}, & z_{52} &= z_5 h^{-2}. \end{aligned}$$

Lema 2.2.26 Bajo las condiciones **(K.1)**, **(H.1)**, **(W.1)** y **(V.2)**, se tiene

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1 + o_P\left(\widehat{Q}_1\right) \quad (2.167)$$

donde

$$\widehat{Q}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{p}(T_i) (1 - \widehat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H(T_i))^2}.$$

Demostración. \widehat{Q} puede representarse como

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2$$

donde se ha definido

$$\widehat{Q}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{p}(T_i) (1 - \widehat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H(T_i))^2} \left(\frac{(1 - H(T_i))^2}{(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n})^2} - 1 \right). \quad (2.168)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{p}(T_i) (1 - \widehat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H(T_i))^2 (1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n})^2} \left((1 - H(T_i))^2 - \left(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{p}(T_i) (1 - \widehat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H(T_i))^2 (1 - H(T_i) - (H_n(T_i) - H(T_i)) + \frac{1}{n})^2} \\ &\quad \times \left(H_n(T_i) - H(T_i) - \frac{1}{n} \right) \left(2 - H(T_i) - H_n(T_i) + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

y como por **(W.1)** el soporte de la función de peso, w , es (ε', t_0) ,

$$\left| \widehat{Q}_2 \right| \leq \frac{3}{n} \left(\sup_{\varepsilon' < t < t_0} |H_n(t) - H(t)| + \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{p}(T_i) (1 - \widehat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H(T_i))^2 \left(\frac{1}{n} - H(T_i)\right)^2}.$$

Existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que para todo $n \geq n_0$ y $t > \varepsilon'$ se verifica que $\left|\frac{1}{n} - H(t)\right| > \delta$ y, por consiguiente,

$$\left| \widehat{Q}_2 \right| \leq \frac{3}{\delta^2} \left(\sup_{\varepsilon' < t < t_0} |H_n(t) - H(t)| + \frac{1}{n} \right) \widehat{Q}_1.$$

Teniendo ahora en cuenta el resultado bien conocido para procesos empíricos,

$$\sup_{\varepsilon' < t < t_0} |H_n(t) - H(t)| = O_P\left(n^{-1/2}\right),$$

es inmediato concluir que

$$\widehat{Q}_2 = O_P\left(n^{-1/2}\widehat{Q}_1\right) = o_P\left(\widehat{Q}_1\right), \quad (2.169)$$

lo que prueba el resultado (2.167). ■

En cuanto a \widehat{Q}_1 , la descomposición

$$\widehat{p}(1 - \widehat{p}) = p(1 - p) + (\widehat{p} - p)(1 - 2p) - (\widehat{p} - p)^2$$

permite escribir

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(T_i) (1 - p(T_i)) z_4(T_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) z_5(T_i) \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i))^2 z_4(T_i)\end{aligned}\quad (2.170)$$

Expresando la diferencia $\widehat{p} - p$ en función de las funciones ψ, h y de sus correspondientes estimadores $\widehat{\psi}$ y \widehat{h}

$$\widehat{p} - p = \frac{\widehat{\psi} - p\widehat{h}}{h} - \frac{(\widehat{p} - p)(\widehat{h} - h)}{h}, \quad (2.171)$$

pueden linealizarse los dos últimos sumandos de (2.170)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) z_5(T_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i)) z_{51}(T_i) \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{51}(T_i)\end{aligned}\quad (2.172)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i))^2 z_4(T_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i))^2 z_{41}(T_i) \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i)) (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) \\ &\quad \times (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{41}(T_i) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i))^2 (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{41}(T_i).\end{aligned}\quad (2.173)$$

Repetiendo este procedimiento para el segundo sumando de (2.172) con el fin de obtener un término linealizado con dos factores del tipo $(\widehat{\psi} - p\widehat{h})$ ó $(\widehat{h} - h)$, del tipo del primer sumando de (2.173),

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{51}(T_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{52}(T_i) \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{52}(T_i).\end{aligned}$$

Definiendo ahora

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(T_i) (1 - p(T_i)) z_4(T_i), \\ \widehat{Q}_{12} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i)) z_{51}(T_i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_{13} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i))^2 z_{41}(T_i) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{52}(T_i), \\
\widehat{Q}_{14} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{52}(T_i) \\
&\quad + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)) (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{41}(T_i) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i))^2 (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{41}(T_i),
\end{aligned} \tag{2.174}$$

se obtiene la representación

$$\widehat{Q}_1 - Q = Q_{11} - Q + \widehat{Q}_{12} + \widehat{Q}_{13} + \widehat{Q}_{14},$$

o, más compactamente, definiendo $\widetilde{Q}_1 = \widehat{Q}_1 - \widehat{Q}_{14}$,

$$\widehat{Q}_1 - Q = \widetilde{Q}_1 - Q + \widehat{Q}_{14}. \tag{2.175}$$

Lema 2.2.27 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (W.1) y (V.2), se tiene*

$$E[Q_{11}] = Q$$

y

$$Var[Q_{11}] = \frac{1}{n} \left(\int_0^\infty p(x)^2 (1-p(x))^2 z_4(x)^2 h(x) dx - Q^2 \right).$$

Demostración. Como por definición $q = (1-H)^{-2} p(1-p)h$, es evidente que

$$E[Q_{11}] = E[p(T_1)(1-p(T_1))z_4(T_1)] = \int_0^\infty q(x)w(x)dx = Q$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
Var[Q_{11}] &= \frac{1}{n} Var[p(T_1)(1-p(T_1))z_4(T_1)] \\
&= \frac{1}{n} \left(\int_0^\infty p(x)^2 (1-p(x))^2 z_4(x)^2 h(x) dx - Q^2 \right).
\end{aligned}$$

■

Lema 2.2.28 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.2), se tiene*

$$E[\widehat{Q}_{12}] = g_2^2 \mu_K \int_\varepsilon^\infty z_5(x) \left(p'(x)h'(x) + \frac{1}{2}p''(x)h(x) \right) dx + o(g_2^2) + O(n^{-1}g_2^2) \tag{2.176}$$

y

$$Var[\widehat{Q}_{12}] = \frac{1}{n} \int_\varepsilon^\infty p(x)(1-p(x))z_5(x)^2 h(x) dx + O(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}). \tag{2.177}$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{Q}_{12} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{g_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) z_{51}(T_i) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(K_{g_2}(T_i - T_j) (p(T_j) - p(T_i)) z_{51}(T_i)) \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} E(K_{g_2}(T_1 - T_2) (p(T_2) - p(T_1)) z_{51}(T_1)), \end{aligned}$$

luego

$$E \left[\widehat{Q}_{12} \right] = \frac{n(n-1)}{n^2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) z_{51}(x) h(x) h(y) dy dx$$

donde se ha tenido en cuenta que w , y por tanto también z_{51} , se anulan para valores de x menores que ε' . Si se define

$$I_{12}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) z_{51}(x) h(x) h(y) dy dx, \quad (2.178)$$

con el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$I_{12}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^L K(y_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) h(x - g_2 y_1) z_5(x) dy_1 dx.$$

Mediante sendos desarrollos de Taylor de $(p(x - g_2 y_1) - p(x))$ y $h(x - g_2 y_1)$ en x es fácil comprobar que

$$I_{12}(g_2) = g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} z_5(x) \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right) dx + o(g_2^2),$$

de donde, teniendo en cuenta **(P.2)**, se deduce directamente el resultado (2.176).

La varianza de \widehat{Q}_{12} es

$$\begin{aligned} Var \left[\widehat{Q}_{12} \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov \left[(\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)) z_{51}(T_i), (\widehat{\psi}(T_j) - p(T_j) \widehat{h}(T_j)) z_{51}(T_j) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K_{g_2}(T_i - T_k) (\delta_k - p(T_i)) z_{51}(T_i), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n K_{g_2}(T_j - T_l) (\delta_l - p(T_j)) z_{51}(T_j) \right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n M^{i,j,k,l}(g_2) \\ &= \frac{1}{n^4} (nM^{1,1,1,1}(g_2) + 2n(n-1) (M^{1,2,2,2}(g_2) + M^{1,1,2,1}(g_2)) \\ &\quad + n(n-1) (M^{1,1,2,2}(g_2) + M^{1,2,2,1}(g_2)) \\ &\quad + n(n-1)(n-2) (M^{1,2,3,3}(g_2) + M^{1,2,3,1}(g_2)) \end{aligned}$$

$$+M^{1,2,2,3}(g_2) + M^{1,1,2,3}(g_2)) \quad (2.179)$$

donde para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ se ha definido

$$M^{i,j,k,l}(g_2) = Cov [K_{g_2}(T_i - T_k) (\delta_k - p(T_i)) z_{51}(T_i), K_{g_2}(T_j - T_l) (\delta_l - p(T_j)) z_{51}(T_j)].$$

El resultado es consecuencia directa del lema siguiente —donde se estudian los órdenes de las covarianzas $M^{i,j,k,l}(g_2)$ — y de la hipótesis **(V.2)**. ■

Lema 2.2.29 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.28, se tiene*

$$M^{1,1,1,1}(g_2) = O(g_2^{-2}), \quad (2.180)$$

$$M^{1,2,2,2}(g_2) = O(g_2^{-1}), \quad (2.181)$$

$$M^{1,1,2,1}(g_2) = 0, \quad (2.182)$$

$$M^{1,1,2,2}(g_2) = O(g_2^{-1}), \quad (2.183)$$

$$M_1^{1,2,2,1}(g_2) = o(g_2^{-1}), \quad (2.184)$$

$$M^{1,2,3,3}(g_2) = \int_{\varepsilon}^{\infty} p(s) (1 - p(s)) z_5(s)^2 h(s) ds + O(g_2^2), \quad (2.185)$$

$$M^{1,2,3,1}(g_2) = o(g_2^2), \quad (2.186)$$

$$M^{1,2,2,3}(g_2) = o(g_2^2) \quad (2.187)$$

y

$$M^{1,1,2,3}(g_2) = O(g_2^4). \quad (2.188)$$

Demostración. Empezando por $M^{1,1,1,1}(g_2)$

$$\begin{aligned} M^{1,1,1,1}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 z_{51}(T_1)^2 \right] - (E [K_{g_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) z_{51}(T_1)])^2 \\ &= E \left[K_{g_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 z_{51}(T_1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{g_2^2} K(0) \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x) (1 - p(x)) z_{51}(x)^2 h(x) dx, \end{aligned}$$

obteniéndose el resultado (2.180).

Respecto a $M^{1,2,2,2}(g_2)$,

$$\begin{aligned} M^{1,2,2,2}(g_2) &= K_{g_2}(0) E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1) (\delta_2 - p(T_2)) z_{51}(T_2)] \\ &\quad - E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)] E [K_{g_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) z_{51}(T_1)] \\ &= K_{g_2}(0) E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1) (\delta_2 - p(T_2)) z_{51}(T_2)]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 M^{1,2,2,2}(g_2) &= \frac{1}{g_2} K(0) \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K_{g_2}(x-y) p(y) (1-p(y)) z_{51}(x) z_{51}(y) h(y) h(x) dy dx \\
 &= \frac{1}{g_2} K(0) \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x-\varepsilon'}{g_2}} K(y_1) p(x-g_2 y_1) (1-p(x-g_2 y_1)) z_5(x) z_5(x-g_2 y_1) dy_1 dx \\
 &= \frac{1}{g_2} K(0) \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x) (1-p(x)) z_5(x)^2 dx + o(g_2^{-1})
 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$. Se obtiene, por tanto, el resultado (2.181).

En cuanto a $M^{1,1,2,1}(g_2)$, es fácil verificar el resultado (2.182). En efecto,

$$\begin{aligned}
 M^{1,1,2,1}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_2) K_{g_2}(0) (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_1 - p(T_1)) z_{51}(T_1)^2] \\
 &\quad - E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)] E [K_{g_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) z_{51}(T_1)] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Siguiendo con $M^{1,1,2,2}(g_2)$,

$$M^{1,1,2,2}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1))^2 z_{51}(T_1)^2] - (E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)])^2.$$

Definiendo

$$M_1^{1,1,2,2}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1))^2 z_{51}(T_1)^2],$$

se tiene

$$\begin{aligned}
 M_1^{1,1,2,2}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y)^2 (p(y) (1-2p(x)) + p(x)^2) z_{51}(x)^2 h(y) h(x) dy dx \\
 &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1)^2 (p(x-g_2 y_1) (1-2p(x)) + p(x)^2) z_{51}(x)^2 h(x-g_2 y_1) h(x) dy_1 dx \\
 &= \frac{1}{g_2} c_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x) (1-p(x)) z_5(x)^2 dx + o(g_2^{-1})
 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$. Como, por otra parte,

$$E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)] = I_{12}(g_2)$$

donde $I_{12}(g_2)$ se definió en (2.178) y, según se probó entonces,

$$I_{12}(g_2) = O(g_2^2),$$

se tiene

$$M^{1,1,2,2}(g_2) = \frac{1}{g_2} c_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x) (1-p(x)) z_5(x)^2 dx + o(g_2^{-1})$$

y, por ende, el resultado (2.183).

Análogamente, para $M^{1,2,2,1}(g_2)$,

$$M^{1,2,2,1}(g_2) = M_1^{1,2,2,1}(g_2) - I_{12}(g_2)^2 = M_1^{1,2,2,1}(g_2) - O(g_2^4)$$

donde se define

$$M_1^{1,2,2,1}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_1 - p(T_2)) z_{51}(T_1) z_{51}(T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,1}(g_2) &= - \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} K_{g_2}(x - y)^2 (p(y) - p(x))^2 z_{51}(x) z_{51}(y) h(y) h(x) dy dx \\ &= - \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x-\varepsilon'}{g_2}} K(y_1)^2 (p(x - g_2 y_1) - p(x))^2 z_5(x) z_5(x - g_2 y_1) dy_1 dx \\ &= o(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$. Se obtiene, por tanto, el resultado (2.184).

En cuanto a $M_1^{1,2,3,3}(g_2)$,

$$M_1^{1,2,3,3}(g_2) = M_1^{1,2,3,3}(g_2) - I_{12}(g_2)^2 = M_1^{1,2,3,3}(g_2) - O(g_2^4)$$

donde se define

$$M_1^{1,2,3,3}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) z_{51}(T_2)].$$

Se tiene

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x - s) K_{g_2}(y - s) (p(s) (1 - p(x) - p(y)) + p(x)p(y)) \\ &\quad \times z_5(x) z_5(y) h(s) ds dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} K(x_1) K(y_1) \\ &\quad \times (p(s) (1 - p(s + g_2 x_1) - p(s + g_2 y_1)) + p(s + g_2 x_1) p(s + g_2 y_1)) \\ &\quad \times z_5(s + g_2 x_1) z_5(s + g_2 y_1) h(s) dy_1 dx_1 ds \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-s}{g_2} = x_1$, $\frac{y-s}{g_2} = y_1$. Se verifica que

$$\lim_{g_2 \rightarrow 0} M_1^{1,2,3,3}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(s) (1 - p(s)) z_5(s)^2 h(s) ds.$$

La derivada de $M_1^{1,2,3,3}(g_2)$ es

$$\begin{aligned} \frac{dM_1^{1,2,3,3}(g_2)}{dg_2} &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} K(x_1) K(y_1) \\ &\quad \times (p(s) (1 - p(s + g_2 x_1) - p(s + g_2 y_1)) + p(s + g_2 x_1) p(s + g_2 y_1)) \\ &\quad \times z_5(s + g_2 x_1) z_5(s + g_2 y_1) h(s) dy_1 dx_1 ds \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} \frac{\varepsilon' - s}{g_2^2} K\left(\frac{\varepsilon' - s}{g_2}\right) K(y_1) \\ &\quad \times (p(s) (1 - p(\varepsilon') - p(s + g_2 y_1)) + p(\varepsilon') p(s + g_2 y_1)) \\ &\quad \times z_5(\varepsilon') z_5(s + g_2 y_1) h(s) dy_1 ds \\ &\quad + \int_0^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-s}{g_2}}^{\infty} \frac{\varepsilon' - s}{g_2^2} K(x_1) K\left(\frac{\varepsilon' - s}{g_2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (p(s) (1 - p(s + g_2 x_1) - p(\varepsilon')) + p(s + g_2 x_1) p(\varepsilon')) \\
 & \times z_5(s + g_2 x_1) z_5(\varepsilon') h(s) dx_1 ds \\
 & + \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon' - s}{g_2}}^\infty \int_{\frac{\varepsilon' - s}{g_2}}^\infty K(x_1) K(y_1) \Psi(g_2, x_1, y_1, s) h(s) dy_1 dx_1 ds \\
 = & \int_0^\infty \int_{\frac{\varepsilon' - s}{g_2}}^\infty \int_{\frac{\varepsilon' - s}{g_2}}^\infty K(x_1) K(y_1) \Psi(g_2, x_1, y_1, s) h(s) dy_1 dx_1 ds
 \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
 \Psi(g_2, x_1, y_1, s) = & (x_1 p'(s + g_2 x_1) (p(s + g_2 y_1) - p(s)) + y_1 p'(s + g_2 y_1) (p(s + g_2 x_1) - p(s))) \\
 & \times z_5(s + g_2 x_1) z_5(s + g_2 y_1) \\
 & + (p(s) (1 - p(s + g_2 x_1) - p(s + g_2 y_1)) + p(s + g_2 x_1) p(s + g_2 y_1)) \\
 & \times (x_1 z_5'(s + g_2 x_1) z_5(s + g_2 y_1) + y_1 z_5(s + g_2 x_1) z_5'(s + g_2 y_1)).
 \end{aligned}$$

y se ha tenido en cuenta que $z_5(\varepsilon') = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \lim_{g_2 \rightarrow 0} \frac{dM_1^{1,2,3,3}(g_2)}{dg_2} & = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(x_1) K(y_1) (x_1 + y_1) dy_1 dx_1 \int_{\varepsilon'}^\infty p(s) (1 - p(s)) z_5(s) z_5'(s) h(s) ds \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Se tiene así el siguiente desarrollo de Taylor de $M_1^{1,2,3,3}(g_2)$ en 0,

$$M_1^{1,2,3,3}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^\infty p(s) (1 - p(s)) z_5(s)^2 h(s) ds + O(g_2^2)$$

y, teniendo en cuenta **(P.2)**, el resultado (2.185).

Pasando a $M_1^{1,2,3,1}(g_2)$,

$$M_1^{1,2,3,1}(g_2) = M_1^{1,2,3,1}(g_2) - I_{12}(g_2)^2 = M_1^{1,2,3,1}(g_2) - O(g_2^4)$$

donde se define

$$M_1^{1,2,3,1}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) K_{g_2}(T_2 - T_1) (\delta_1 - p(T_2)) z_{51}(T_2)].$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
 M_1^{1,2,3,1}(g_2) & = \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty \int_0^\infty K_{g_2}(x - s) (p(s) - p(x)) z_{51}(x) \\
 & \quad \times K_{g_2}(y - x) (p(x) - p(y)) z_{51}(y) h(s) h(y) h(x) ds dy dx \\
 & = \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{-\infty}^{\frac{x - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(s_1) (p(x - g_2 s_1) - p(x)) z_5(x) \\
 & \quad \times K(y_1) (p(x) - p(x - g_2 y_1)) z_5(x - g_2 y_1) h(x - g_2 s_1) ds_1 dy_1 dx \\
 & = \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{-\infty}^{\frac{x - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L K(s_1) (p(x - g_2 s_1) - p(x)) z_5(x) \\
 & \quad \times K(y_1) (p(x) - p(x - g_2 y_1)) z_5(x - g_2 y_1) h(x - g_2 s_1) ds_1 dy_1 dx
 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x - y}{g_2} = y_1$, $\frac{x - s}{g_2} = s_1$ y, en la última igualdad, se ha considerado $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $p(x - g_2 s_1) - p(x)$ y $h(x - g_2 s_1)$ en x es fácil comprobar que

$$M_1^{1,2,3,1}(g_2) = g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^\infty \int_{-\infty}^{\frac{x - \varepsilon'}{g_2}} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right) z_5(x)$$

$$\begin{aligned} & \times K(y_1) (p(x) - p(x - g_2 y_1)) z_5(x - g_2 y_1) dy_1 dx + o(g_2^2) \\ & = o(g_2^2) \end{aligned}$$

obteniéndose, por tanto, el resultado (2.186).

El siguiente término es

$$M_1^{1,2,2,3}(g_2) = M_1^{1,2,2,3}(g_2) - I_{12}(g_2)^2 = M_1^{1,2,2,3}(g_2) - O(g_2^4)$$

donde se define

$$M_1^{1,2,2,3}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1) K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) z_{51}(T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x - y) (p(y) - p(x)) z_{51}(x) K_{g_2}(y - s) \\ &\quad \times (p(s) - p(y)) z_{51}(y) h(s) h(y) h(x) ds dy dx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon' - y}{g_2}}^{\infty} \int_{-L}^L K(x_1) (p(y) - p(y + g_2 x_1)) z_5(y + g_2 x_1) \\ &\quad \times K(s_1) (p(y - g_2 s_1) - p(y)) z_5(y) h(y + g_2 s_1) ds_1 dx_1 dy \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = x_1$, $\frac{s-y}{g_2} = s_1$ y se ha supuesto $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Haciendo desarrollos de Taylor de $p(y - g_2 s_1) - p(y)$ y $h(y + g_2 s_1)$ en y

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,2,3}(g_2) &= g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon' - y}{g_2}}^{\infty} K(x_1) (p(y) - p(y + g_2 x_1)) z_5(y + g_2 x_1) \\ &\quad \times \left(p'(y) h'(y) + \frac{1}{2} p''(y) h(y) \right) z_5(y) dx_1 dy + o(g_2^2) \\ &= o(g_2^2), \end{aligned}$$

obteniéndose el resultado (2.187).

Por fin,

$$M_1^{1,1,2,3}(g_2) = M_1^{1,1,2,3}(g_2) - I_{12}(g_2)^2 = M_1^{1,1,2,3}(g_2) - O(g_2^4)$$

donde se define

$$M_1^{1,1,2,3}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)^2 K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1))],$$

teniéndose

$$\begin{aligned} M_1^{1,1,2,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x - y) K_{g_2}(x - s) (p(y) - p(x)) (p(s) - p(x)) \\ &\quad \times z_{51}(x)^2 h(s) h(y) h(x) ds dy dx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(y_1) K(s_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) \\ &\quad \times (p(x - g_2 s_1) - p(x)) z_{51}(x)^2 h(x - g_2 s_1) h(x - g_2 y_1) h(x) ds_1 dy_1 dx \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$, $\frac{x-s}{g_2} = s_1$ y se ha supuesto $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Haciendo desarrollos de Taylor de $p(x - g_2 y_1) - p(x)$, $p(x - g_2 s_1) - p(x)$, $h(x - g_2 y_1)$ y $h(x - g_2 s_1)$ en x ,

$$M_1^{1,1,2,3}(g_2) = g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right)^2 z_{51}(x)^2 h(x) dx + o(g_2^4).$$

Se obtiene así el resultado (2.188). ■

Lema 2.2.30 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.2), se tiene*

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{Q}_{13} \right] &= -\frac{1}{2} g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right) h''(x) z_{51}(x) dx \\ &\quad - g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right)^2 z_{42}(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{n g_2} c_K \int_{\varepsilon}^{\infty} p(x) (1 - p(x)) z_4(x) dx + o(g_2^4) + o(n^{-1} g_2^{-1}) \end{aligned}$$

y

$$\text{Var} \left[\widehat{Q}_{13} \right] = O(n^{-1} g_2^2) + O(n^{-2} g_2^{-1}) + O(n^{-3} g_2^{-4}).$$

Demostración. Definiendo

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{131} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i))^2 z_{41}(T_i), \\ \widehat{Q}_{132} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{52}(T_i), \end{aligned}$$

se obtiene la representación

$$\widehat{Q}_{13} = -\widehat{Q}_{131} - \widehat{Q}_{132}. \quad (2.189)$$

La tesis del lema es una consecuencia inmediata de los lemas 2.2.31-2.2.35, que se enuncian a continuación. ■

Lema 2.2.31 *Bajo las condiciones del lema 2.2.30, se tiene*

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{Q}_{131} \right] &= g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right)^2 z_{42}(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{n g_2} c_K \int_{\varepsilon}^{\infty} p(x) (1 - p(x)) z_4(x) dx + o(g_2^4) + o(n^{-1} g_2^{-1}). \end{aligned} \quad (2.190)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{Q}_{131} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{g_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K_{g_2}(T_i - T_k) (\delta_k - p(T_i)) z_{41}(T_i) \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E [K_{g_2}(T_i - T_j) K_{g_2}(T_i - T_k) (\delta_j - p(T_i)) (\delta_k - p(T_i)) z_{41}(T_i)] \\ &= \frac{1}{n^2} I_{1311}(g_2) + \frac{2(n-1)}{n^2} I_{1312}(g_2) + \frac{(n-1)}{n^2} I_{1313}(g_2) + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} I_{1314}(g_2) \end{aligned} \quad (2.191)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} I_{1311}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right], \\ I_{1312}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(0) K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_1 - p(T_1)) (\delta_2 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{1313}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right], \\ I_{1314}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(T_1 - T_2) K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_3 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \right]. \end{aligned}$$

A continuación, se estudia cada uno de estos cuatro términos. El primero es

$$I_{1311}(g_2) = \frac{1}{g_2^2} K(0)^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x)(1-p(x)) z_{42}(x) dx = O(g_2^{-2}). \quad (2.192)$$

Por otra parte, es evidente que

$$I_{1312}(g_2) = 0. \quad (2.193)$$

En cuanto a $I_{1313}(g_2)$,

$$\begin{aligned} I_{1313}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y)^2 (p(y)(1-2p(x)) + p(x)^2) z_{41}(x) h(y) h(x) dy dx \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1)^2 (p(x-g_2 y_1)(1-2p(x)) + p(x)^2) z_{42}(x) h(x-g_2 y_1) dy_1 dx \\ &= \frac{1}{g_2} c_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x)(1-p(x)) z_4(x) dx + o(g_2^{-1}) \end{aligned} \quad (2.194)$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$.

Por último,

$$\begin{aligned} I_{1314}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) K_{g_2}(x-s) (p(y) - p(x)) \\ &\quad \times (p(s) - p(x)) z_{41}(x) h(s) h(y) h(x) ds dy dx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1) K(s_1) (p(x-g_2 y_1) - p(x)) \\ &\quad \times (p(x-g_2 s_1) - p(x)) z_{42}(x) h(x-g_2 s_1) h(x-g_2 y_1) ds_1 dy_1 dx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(y_1) K(s_1) (p(x-g_2 y_1) - p(x)) \\ &\quad \times (p(x-g_2 s_1) - p(x)) z_{42}(x) h(x-g_2 s_1) h(x-g_2 y_1) ds_1 dy_1 dx \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$, $\frac{x-s}{g_2} = s_1$ y, en la última igualdad, se ha considerado $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Efectuando desarrollos de Taylor de $h(x-g_2 s_1)$, $h(x-g_2 y_1)$, $p(x-g_2 y_1) - p(x)$ y $p(x-g_2 s_1) - p(x)$ en x

$$I_{1314}(g_2) = g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right)^2 z_{42}(x) dx + o(g_2^4). \quad (2.195)$$

Sustituyendo los resultados (2.192)-(2.195) en (2.191) y teniendo en cuenta **(P.2)** se obtiene (2.190).

■

Lema 2.2.32 *Bajo las mismas condiciones del lema 2.2.30, se tiene*

$$E \left[\widehat{Q}_{132} \right] = \frac{1}{2} g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right) h''(x) z_{51}(x) dx + o(g_2^4) + o(n^{-1} g_2^{-1}). \quad (2.196)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
 E \left[\widehat{Q}_{132} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{g_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (K_{g_2}(T_i - T_k) - h(T_i)) z_{52}(T_i) \right] \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E [K_{g_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) (K_{g_2}(T_i - T_k) - h(T_i)) z_{52}(T_i)] \\
 &= \frac{1}{n^2} I_{1321}(g_2) + \frac{n-1}{n^2} (I_{1312}(g_2) + I_{1323}(g_2) + I_{1324}(g_2)) + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} I_{1325}(g_2)
 \end{aligned} \tag{2.197}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
 I_{1321}(g_2) &= E [K_{g_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) (K_{g_2}(0) - h(T_1)) z_{52}(T_1)], \\
 I_{1322}(g_2) &= E [K_{g_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_2) - h(T_1)) z_{52}(T_1)], \\
 I_{1323}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) (K_{g_2}(0) - h(T_1)) z_{52}(T_1)], \\
 I_{1324}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_2) - h(T_1)) z_{52}(T_1)], \\
 I_{1325}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_3) - h(T_1)) z_{52}(T_1)].
 \end{aligned} \tag{2.198}$$

Obviamente,

$$I_{1321}(g_2) = I_{1322}(g_2) = 0. \tag{2.199}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 I_{1323}(g_2) &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) (K(0) - g_2 h(x)) z_{52}(x) h(y) h(x) dy dx \\
 &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) (K(0) - g_2 h(x)) z_{51}(x) h(x - g_2 y_1) dy_1 dx \\
 &= o(g_2^{-1})
 \end{aligned} \tag{2.200}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$.

Procediendo del mismo modo,

$$\begin{aligned}
 I_{1324}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) (K_{g_2}(x-y) - h(x)) z_{52}(x) h(y) h(x) dy dx \\
 &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) (K(y_1) - g_2 h(x)) z_{51}(x) h(x - g_2 y_1) dy_1 dx \\
 &= o(g_2^{-1}).
 \end{aligned} \tag{2.201}$$

Por fin,

$$\begin{aligned}
 I_{1325}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) (K_{g_2}(x-s) - h(x)) z_{52}(x) \\
 &\quad \times h(s) h(y) h(x) ds dy dx \\
 &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x-y) (p(y) - p(x)) \\
 &\quad \times \left(\int_0^{\infty} K_{g_2}(x-s) h(s) ds - h(x) \right) z_{51}(x) h(y) dy dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(y_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{g_2}} K(s_1) h(x - g_2 s_1) ds_1 - h(x) \right) z_{51}(x) h(x - g_2 y_1) dy_1 dx \\
&= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^L K(y_1) (p(x - g_2 y_1) - p(x)) \\
&\quad \times \left(\int_{-L}^L K(s_1) h(x - g_2 s_1) ds_1 - h(x) \right) z_{51}(x) h(x - g_2 y_1) dy_1 dx
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x-y}{g_2} = y_1$, $\frac{x-s}{g_2} = s_1$ y en la última igualdad se considera $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Efectuando desarrollos de Taylor de $h(x - g_2 s_1)$, $p(x - g_2 y_1) - p(x)$ y $h(x - g_2 y_1)$ en x ,

$$I_{1325}(g_2) = \frac{1}{2} g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(p'(x) h'(x) + \frac{1}{2} p''(x) h(x) \right) h''(x) z_{51}(x) dx + o(g_2^4). \quad (2.202)$$

Sustituyendo los resultados (2.199)-(2.202) en (2.197) y teniendo en cuenta **(P.2)** se obtiene (2.196). ■

Lema 2.2.33 *Bajo las condiciones del lema 2.2.30, se tiene*

$$Var \left[\widehat{Q}_{131} \right] = o(n^{-1} g_2^2) + O(n^{-2} g_2^{-1}) + O(n^{-3} g_2^{-4}). \quad (2.203)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}
Var \left[\widehat{Q}_{131} \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov \left[\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)^2 z_{41}(T_i), \widehat{\psi}(T_j) - p(T_j) \widehat{h}(T_j)^2 z_{41}(T_j) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) \right. \\
&\quad \times \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_1})) z_{41}(T_{i_1}), \\
&\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{i_5=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_6=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) (\delta_{i_6} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2}) \right] \\
&= \frac{1}{n^6} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n \sum_{i_6=1}^n M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2)
\end{aligned}$$

donde para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \leq n$ se define

$$\begin{aligned}
M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2) &= Cov \left[K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_1})) z_{41}(T_{i_1}), \right. \\
&\quad \left. K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) (\delta_{i_6} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2}) \right].
\end{aligned}$$

Se discute a continuación el orden de estas covarianzas según el cardinal del conjunto de índices $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$. En adelante se denotará el cardinal del conjunto I por $\#(I)$.

- a) Si $\#(I) = 5$ los posibles casos son 6, aunque, como se verá, se reducen por simetría a 3.
- $i_1 = i_2$.

La covarianza es

$$M^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = M_1^{1,1,2,3,4,5}(g_2) - I_{1314}(g_2)^2$$

donde se ha definido

$$M_1^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \\ \times K_{g_2}(T_1 - T_4) (\delta_4 - p(T_1)) K_{g_2}(T_1 - T_5) (\delta_5 - p(T_1)) z_{41}(T_1)]$$

y el término

$$I_{1314}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2) K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_3 - p(T_1)) z_{41}(T_1)]$$

se definió en la demostración del lema 2.2.30, donde se probó que es de orden $O(g_2^4)$. Se tiene,

$$M_1^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_2) (p(x_2) - p(x_1)) K_{g_2}(x_1 - x_3) \\ \times (p(x_3) - p(x_1)) K_{g_2}(x_1 - x_4) (p(x_4) - p(x_1)) K_{g_2}(x_1 - x_5) \\ \times (p(x_5) - p(x_1)) z_{41}(x_1)^2 h(x_5) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1.$$

Con el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1 - x_4}{g_2} = x_{41}$, $\frac{x_1 - x_5}{g_2} = x_{51}$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$M_1^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(x_{21}) (p(x_1 - g_2 x_{21}) - p(x_1)) K(x_{31}) \\ \times (p(x_1 - g_2 x_{31}) - p(x_1)) K(x_{41}) (p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1)) K(x_{51}) \\ \times (p(x_1 - g_2 x_{51}) - p(x_1)) z_{41}(x_1)^2 h(x_1 - g_2 x_{51}) h(x_1 - g_2 x_{41}) \\ \times h(x_1 - g_2 x_{31}) h(x_1 - g_2 x_{21}) h(x_1) dx_{51} dx_{41} dx_{31} dx_{21} dx_1.$$

Mediante sendos desarrollos de Taylor de $p(x_1 - g_2 x_{21}) - p(x_1)$, $h(x_1 - g_2 x_{21})$, $p(x_1 - g_2 x_{31}) - p(x_1)$, $h(x_1 - g_2 x_{31})$, $p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1)$, $h(x_1 - g_2 x_{41})$, $p(x_1 - g_2 x_{51}) - p(x_1)$ y $h(x_1 - g_2 x_{51})$ en x_1 ,

$$M_1^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = g_2^8 \mu_K^4 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \left(p'(x_1) h'(x_1) + \frac{1}{2} p''(x_1) h(x_1) \right)^4 z_{41}(x_1)^2 h(x_1) dx_1 + o(g_2^8)$$

y, en fin,

$$M^{1,1,2,3,4,5}(g_2) = O(g_2^8). \quad (2.204)$$

- $i_1 = i_5$, $i_1 = i_6$.

Los dos casos son iguales por simetría, por lo que basta con considerar el primero de ellos. Procediendo como en el caso anterior,

$$M^{1,2,3,4,1,5}(g_2) = M_1^{1,2,3,4,1,5}(g_2) - I_{1314}(g_2)^2$$

donde se ha definido

$$M_1^{1,2,3,4,1,5}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) K_{g_2}(T_1 - T_4) (\delta_4 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \\ \times K_{g_2}(T_2 - T_1) (\delta_1 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_5) (\delta_5 - p(T_2)) z_{41}(T_2)].$$

Ahora,

$$M_1^{1,2,3,4,1,5}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_3) (p(x_3) - p(x_1)) K_{g_2}(x_1 - x_4)$$

$$\begin{aligned} & \times (p(x_4) - p(x_1)) z_{41}(x_1) K_{g_2}(x_2 - x_1) (p(x_1) - p(x_2)) K_{g_2}(x_2 - x_5) \\ & \times (p(x_5) - p(x_2)) z_{41}(x_2) h(x_5) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

y con el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1 - x_4}{g_2} = x_{41}$, $\frac{x_1 - x_5}{g_2} = x_{51}$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,1,5}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31}) (p(x_1 - g_2 x_{31}) - p(x_1)) \\ & \times K(x_{41}) (p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1)) z_{42}(x_1) K(x_{21}) (p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ & \times K(x_{51} - x_{21}) (p(x_1 - g_2 x_{51}) - p(x_1 - g_2 x_{21})) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) \\ & \times h(x_1 - g_2 x_{51}) h(x_1 - g_2 x_{41}) h(x_1 - g_2 x_{31}) dx_{51} dx_{41} dx_{31} dx_{21} dx_1. \end{aligned}$$

Mediante sendos desarrollos de Taylor de $p(x_1 - g_2 x_{31}) - p(x_1)$, $h(x_1 - g_2 x_{31})$, $p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1)$ y $h(x_1 - g_2 x_{41})$ en x_1 ,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,1,5}(g_2) &= g_2^4 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{51} - x_{21}) K(x_{21}) (p(x_1 - g_2 x_{51}) - p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ & \times (p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) h(x_1 - g_2 x_{51}) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) \\ & \times \left(p'(x_1) h'(x_1) + \frac{1}{2} p''(x_1) h(x_1) \right)^2 z_{42}(x_1) dx_{51} dx_{21} dx_1 + o(g_2^4) \\ &= o(g_2^4) \end{aligned}$$

y, por tanto, también

$$M^{1,2,3,4,1,5}(g_2) = o(g_2^4). \quad (2.205)$$

- $i_3 = i_5$, $i_3 = i_6$, $i_4 = i_6$.

Los casos son iguales por simetría. La primera covarianza es

$$M^{1,2,3,4,3,5}(g_2) = M_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) - I_{1314}(g_2)^2,$$

con

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) K_{g_2}(T_1 - T_4) (\delta_4 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \\ & \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_5) (\delta_5 - p(T_2)) z_{41}(T_2)] \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_1 - x_4) (p(x_4) - p(x_1)) z_{41}(x_1) \\ & \times (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1) p(x_2)) K_{g_2}(x_2 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_5) \\ & \times (p(x_5) - p(x_2)) z_{41}(x_2) h(x_5) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1 - x_4}{g_2} = x_{41}$, $\frac{x_1 - x_5}{g_2} = x_{51}$, y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31}) K(x_{41}) (p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1)) z_{42}(x_1) \\ & \times (p(x_1 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) + p(x_1) p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ & \times K(x_{31} - x_{21}) K(x_{51} - x_{21}) (p(x_1 - g_2 x_{51}) - p(x_1 - g_2 x_{21})) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) \\ & \times h(x_1 - g_2 x_{51}) h(x_1 - g_2 x_{41}) h(x_1 - g_2 x_{31}) dx_{51} dx_{41} dx_{31} dx_{21} dx_1. \end{aligned}$$

Un desarrollo de Taylor de $p(x_1 - g_2x_{41}) - p(x_1)$ y $h(x_1 - g_2x_{41})$ en x_1 permite obtener

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= g_2^2 \mu_K^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31}) z_{42}(x_1) \left(p'(x_1) h'(x_1) + \frac{1}{2} p''(x_1) h(x_1) \right) \\ &\quad \times (p(x_1 - g_2x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\ &\quad \times K(x_{31} - x_{21}) K(x_{51} - x_{21}) (p(x_1 - g_2x_{51}) - p(x_1 - g_2x_{21})) \\ &\quad \times z_{42}(x_1 - g_2x_{21}) h(x_1 - g_2x_{51}) h(x_1 - g_2x_{31}) dx_{51} dx_{41} dx_{21} dx_1 + o(g_2^2) \\ &= o(g_2^2) \end{aligned}$$

e, igualmente,

$$M^{1,2,3,4,3,5}(g_2) = o(g_2^2). \quad (2.206)$$

b) Si $\#(I) = 4$, puede ser debido a que haya dos pares de índices iguales (y, por tanto, los otros dos distintos entre sí y de los anteriores) o a que tres de los seis índices sean iguales (y, por tanto, los otros tres sean distintos entre sí y de los anteriores).

• Cuando se da la primera de estas dos posibilidades, los casos se reducen por simetría a 8, a saber,

$$\begin{aligned} i_1 = i_2, i_3 = i_4; \quad i_1 = i_2, i_3 = i_5; \quad i_1 = i_4, i_3 = i_5; \quad i_1 = i_5, i_2 = i_3; \\ i_1 = i_5, i_3 = i_4; \quad i_1 = i_5, i_2 = i_6; \quad i_1 = i_5, i_3 = i_6; \quad i_3 = i_5, i_4 = i_6. \end{aligned}$$

Para no alargar excesivamente este estudio, se analiza en detalle sólo el último caso, pues no es difícil llegar a la conclusión de que el orden que se obtiene para él es igualmente válido para los demás casos. Se aborda por tanto el estudio de la covarianza

$$M^{1,2,3,4,3,4}(g_2) = M_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) - I_{1314}(g_2)^2$$

donde se define

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) K_{g_2}(T_1 - T_4) (\delta_4 - p(T_1)) z_{41}(T_1) \\ &\quad \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_4) (\delta_4 - p(T_2)) z_{41}(T_2)]. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_1 - x_4) \\ &\quad \times (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) z_{41}(x_1) \\ &\quad \times K_{g_2}(x_2 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_4) (p(x_4) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) \\ &\quad \times z_{41}(x_2) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

y, con el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1 - x_4}{g_2} = x_{41}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31}) K(x_{41}) K(x_{31} - x_{21}) K(x_{41} - x_{21}) z_{42}(x_1) \\ &\quad \times (p(x_1 - g_2x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\ &\quad \times (p(x_1 - g_2x_{41}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\ &\quad \times z_{42}(x_1 - g_2x_{21}) h(x_1 - g_2x_{41}) h(x_1 - g_2x_{31}) dx_{41} dx_{31} dx_{21} dx_1 \\ &= O(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

y, también,

$$M^{1,2,3,4,3,4}(g_2) = O(g_2^{-1}). \quad (2.207)$$

• En cuanto a la segunda posibilidad comentada más arriba, los casos se reducen por simetría a 4:

$$i_1 = i_2 = i_3, \quad i_1 = i_3 = i_5, \quad i_1 = i_5 = i_6, \quad i_3 = i_4 = i_5.$$

Se aborda en detalle sólo el último caso, en que, como se concluye con facilidad, se obtiene un orden válido igualmente para los casos restantes. Así, la covarianza es

$$M^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = M_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) - I_{1313}(g_2)I_{1314}(g_2)$$

donde se define

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) &= E \left[K_{g_2}(T_1 - T_3)^2 (\delta_3 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right. \\ &\quad \left. \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_4) (\delta_4 - p(T_2)) z_{41}(T_2) \right] \end{aligned}$$

y, además de $I_{1314}(g_2)$, se emplea el término $I_{1313}(g_2)$ definido en la demostración del lema 2.2.30 como

$$I_{1313}(g_2) = E \left[K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right],$$

para el que se halló un orden $O(g_2^{-1})$. Se tiene

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_3)^2 \\ &\quad \times (p(x_3) (1 - 2p(x_1)) (1 - p(x_2)) + p(x_1)^2 (p(x_3) - p(x_2))) \\ &\quad \times z_{41}(x_1) K_{g_2}(x_2 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_4) (p(x_4) - p(x_2)) z_{41}(x_2) \\ &\quad \times h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

y, con el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1 - x_4}{g_2} = x_{41}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31})^2 (p(x_1 - g_2 x_{31}) (1 - 2p(x_1)) (1 - p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ &\quad + p(x_1)^2 (p(x_1 - g_2 x_{31}) - p(x_1 - g_2 x_{21}))) z_{42}(x_1) K(x_{31} - x_{21}) K(x_{41} - x_{21}) \\ &\quad \times (p(x_1 - g_2 x_{41}) - p(x_1 - g_2 x_{21})) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) \\ &\quad \times h(x_1 - g_2 x_{41}) h(x_1 - g_2 x_{31}) dx_{41} dx_{31} dx_{21} dx_1 \\ &= o(g_2^{-1}). \end{aligned}$$

Por tanto, igualmente,

$$M^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = o(g_2^{-1}) + O(g_2^{-1}) O(g_2^4) = o(g_2^{-1}). \quad (2.208)$$

c) Finalmente, en el caso $\#(I) < 4$ se hace uso de un razonamiento más directo para obtener el orden de la covarianza $M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2)$. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos al estudiar la esperanza de \hat{Q}_{131} ,

$$\begin{aligned} M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_1})) z_{41}(T_{i_1}) \\ &\quad \times K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) (\delta_{i_6} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2})] - O(g_2^{-4}) \end{aligned}$$

y para índices $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \leq n$ cualesquiera

$$|M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2)| \leq \frac{1}{g_2^4} \|K\|_{\infty}^4 \|z_{41}\|_{\infty}^2 + O(g_2^{-4}) = O(g_2^{-4}). \quad (2.209)$$

A partir de los resultados (2.204)-(2.209) se obtiene el resultado (2.203). ■

Lema 2.2.34 Bajo las condiciones del lema 2.2.30, se tiene

$$\text{Var} \left[\widehat{Q}_{132} \right] = O(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}) + O(n^{-3}g_2^{-4}). \quad (2.210)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\widehat{Q}_{132} \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov} \left[(\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i)\widehat{h}(T_i))(\widehat{h}(T_i) - h(T_i))z_{52}(T_i), \right. \\ &\quad \left. (\widehat{\psi}(T_j) - p(T_j)\widehat{h}(T_j))(\widehat{h}(T_j) - h(T_j))z_{52}(T_j) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \text{Cov} \left[\frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) \right. \\ &\quad \times \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n (K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) - h(T_{i_1})) z_{52}(T_{i_1}), \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{i_5=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_6=1}^n (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) - h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2}) \right] \\ &= \frac{1}{n^6} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n \sum_{i_6=1}^n N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2) \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \leq n$ se define

$$\begin{aligned} N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2) &= \text{Cov} [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) (K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) - h(T_{i_1})) z_{52}(T_{i_1}), \\ &\quad K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) - h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2})]. \end{aligned}$$

Análogamente a como se hizo con \widehat{Q}_{131} , se discute el orden de estas covarianzas según el cardinal del conjunto de índices $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$.

a) Cuando $\#(I) = 5$, no es difícil comprobar, aunque sí algo tedioso, que, analizando los 6 posibles casos del modo habitual, el orden de convergencia es al menos $O(g_2^2)$. Se ilustra considerando el caso $i_3 = i_5$, para el que se obtiene exactamente ese orden. La covarianza es

$$N^{1,2,3,4,3,5}(g_2) = N_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) - I_{1325}(g_2)^2$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_4) - h(T_1)) z_{52}(T_1) \\ &\quad \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) (K_{g_2}(T_2 - T_5) - h(T_2)) z_{52}(T_2)] \end{aligned}$$

y se ha utilizado el término

$$I_{1325}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_3) - h(T_1)) z_{52}(T_1)]$$

definido en (2.198), para el que entonces se probó un orden $O(g_2^4)$. Ahora,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_3) (K_{g_2}(x_1 - x_4) - h(x_1)) z_{52}(x_1) \\ &\quad \times K_{g_2}(x_2 - x_3) (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) \\ &\quad \times (K_{g_2}(x_2 - x_5) - h(x_2)) z_{52}(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times h(x_5)h(x_4)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_5dx_4dx_3dx_2dx_1 \\
= & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} K_{g_2}(x_1 - x_4)h(x_4)dx_4 - h(x_1) \right) K_{g_2}(x_1 - x_3) \\
& \times z_{51}(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_3) (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) \\
& \times (K_{g_2}(x_2 - x_5) - h(x_2)) z_{51}(x_2)h(x_5)h(x_3)dx_5dx_3dx_2dx_1.
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{x_1-x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1-x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1-x_4}{g_2} = x_{41}$, $\frac{x_1-x_5}{g_2} = x_{51}$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} \left(\int_{-L}^L K(x_{41})h(x_1 - g_2x_{41})dx_{41} - h(x_1) \right) K(x_{31}) \\
&\times K(x_{31} - x_{21}) (K(x_{51} - x_{21}) - g_2h(x_1 - g_2x_{21})) z_{51}(x_1)z_{51}(x_1 - g_2x_{21}) \\
&\times (p(x_1 - g_2x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\
&\times h(x_1 - g_2x_{51})h(x_1 - g_2x_{31})dx_{51}dx_{31}dx_{21}dx_1
\end{aligned}$$

y un desarrollo de Taylor de $h(x_1 - g_2x_{41})$ en x_1 permite obtener

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,4,3,5}(g_2) &= \frac{1}{2}g_2^2\mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} K(x_{31})K(x_{31} - x_{21}) \\
&\times (K(x_{51} - x_{21}) - g_2h(x_1 - g_2x_{21})) z_{51}(x_1)z_{51}(x_1 - g_2x_{21}) \\
&\times (p(x_1 - g_2x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\
&\times h(x_1 - g_2x_{51})h(x_1 - g_2x_{31})h''(x_1)dx_{51}dx_{31}dx_{21}dx_1 + o(g_2^2) \\
&= O(g_2^2)
\end{aligned}$$

e, igualmente,

$$N^{1,2,3,4,3,5}(g_2) = O(g_2^2). \quad (2.211)$$

b) Para los casos en que $Card(I) = 4$, en lugar de estudiar *in extenso* todos los posibles casos sólo se consideran, tanto cuando hay dos pares de índices iguales como cuando tres de los seis índices sean iguales, sendos casos representativos, en el sentido de que el orden que se obtenga para ellos sea también válido para los casos restantes.

Para la primera posibilidad mencionada, se considera el caso $i_3 = i_5, i_4 = i_6$. La covarianza es

$$\begin{aligned}
N^{1,2,3,4,3,4}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_4) - h(T_1)) z_{52}(T_1) \\
&\times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) (K_{g_2}(T_2 - T_4) - h(T_2)) z_{52}(T_2)] \\
&- (E [K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_3) - h(T_1)) z_{52}(T_1)])^2 \\
&= N_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) - I_{1325}(g_2)^2.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) K_{g_2}(x_1 - x_3) \\
&\times (K_{g_2}(x_1 - x_4) - h(x_1)) z_{52}(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_3) (K_{g_2}(x_2 - x_4) - h(x_2)) \\
&\times z_{52}(x_2)h(x_4)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_4dx_3dx_2dx_1
\end{aligned}$$

y, con el cambio de variable $\frac{x_1-x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1-x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_1-x_4}{g_2} = x_{41}$,

$$N_1^{1,2,3,4,3,4}(g_2) = \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} (p(x_1 - g_2x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})))$$

$$\begin{aligned}
 & +p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) K(x_{31}) (K(x_{41}) - g_2h(x_1)) K(x_{31} - x_{21}) \\
 & \times (K(x_{41} - x_{21}) - g_2h(x_1 - g_2x_{21})) z_{51}(x_1)z_{51}(x_1 - g_2x_{21}) \\
 & \times h(x_1 - g_2x_{41})h(x_1 - g_2x_{31})dx_{41}dx_{31}dx_{21}dx_1 \\
 = & O(g_2^{-1}).
 \end{aligned}$$

Por tanto, también,

$$N^{1,2,3,4,3,4}(g_2) = O(g_2^{-1}).$$

En cuanto a la segunda posibilidad descrita, se estudia la covarianza correspondiente al caso $i_3 = i_4 = i_5$, a saber, $N^{1,2,3,3,3,4}(g_2)$. Se tiene,

$$N^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = N_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) - I_{1324}(g_2)I_{1325}(g_2)$$

donde

$$\begin{aligned}
 N_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = & E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) (K_{g_2}(T_1 - T_3) - h(T_1)) z_{52}(T_1) \\
 & \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) (K_{g_2}(T_2 - T_4) - h(T_2)) z_{52}(T_2)]
 \end{aligned}$$

y $I_{1324}(g_2)$ y $I_{1325}(g_2)$ fueron definidos y estudiados en el lema 2.2.32.

Ahora,

$$\begin{aligned}
 N_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) K_{g_2}(x_1 - x_3) \\
 & \times (K_{g_2}(x_1 - x_3) - h(x_1)) z_{52}(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_3) (K_{g_2}(x_2 - x_4) - h(x_2)) \\
 & \times z_{52}(x_2)h(x_4)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_4dx_3dx_2dx_1.
 \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{x_1-x_2}{g_2} = x_{11}$, $\frac{x_2-x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_2-x_4}{g_2} = x_{41}$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$\begin{aligned}
 N_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = & \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x_2}{g_2}}^{\infty} \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2x_{11}) - p(x_2)) \\
 & + p(x_2 - g_2x_{11})p(x_2)) K(x_{31} - x_{11}) (K(x_{31} - x_{11}) - g_2h(x_2 - g_2x_{11})) \\
 & \times z_{51}(x_2 - g_2x_{11})K(x_{31}) \left(\int_{-L}^L K(x_{41})h(x_2 - g_2x_{41})dx_{41} - h(x_2) \right) \\
 & \times z_{51}(x_2)h(x_2 - g_2x_{31})dx_{31}dx_{11}dx_2.
 \end{aligned}$$

Un desarrollo de Taylor de $h(x_2 - g_2x_{41})$ en x_2 permite concluir que

$$\begin{aligned}
 N_1^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = & \frac{1}{2}g_2\mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x_2}{g_2}}^{\infty} \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2x_{11}) - p(x_2)) \\
 & + p(x_2 - g_2x_{11})p(x_2)) K(x_{31} - x_{11})^2K(x_{31})z_{51}(x_2 - g_2x_{11}) \\
 & \times z_{51}(x_2)h''(x_2)h(x_2 - g_2x_{31})dx_{31}dx_{11}dx_2 + o(g_2) \\
 = & O(g_2).
 \end{aligned}$$

De este modo,

$$N^{1,2,3,3,3,4}(g_2) = O(g_2). \quad (2.212)$$

c) Para los casos en que $\#(I) < 4$ es suficiente con observar que

$$\begin{aligned} N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) (K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_4}) - h(T_{i_1})) z_{52}(T_{i_1}) \\ &\quad \times K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_6}) - h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2})] - o(g_2^{-2}) \end{aligned}$$

y que, cualesquiera que sean los índices $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \leq n$,

$$|N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6}(g_2)| \leq \frac{1}{g_2^4} \|K\|_\infty^2 (\|K\|_\infty + \|h\|_\infty)^2 \|z_{52}\|_\infty^2 + o(g_2^{-2}) = O(g_2^{-4}). \quad (2.213)$$

A partir de los resultados (2.211)-(2.213) se deduce el resultado (2.210). ■

Lema 2.2.35 *Bajo las condiciones del lema 2.2.30, se tiene*

$$Cov [\widehat{Q}_{131}, \widehat{Q}_{132}] = O(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}) + O(n^{-3}g_2^{-4}). \quad (2.214)$$

Demostración. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|Cov [\widehat{Q}_{131}, \widehat{Q}_{132}]| \leq Var [\widehat{Q}_{131}]^{1/2} Var [\widehat{Q}_{132}]^{1/2}$$

y se obtiene el resultado (2.214) con sólo tener en cuenta los resultados (2.203) y (2.210). ■

Las covarianzas $Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{12}]$, $Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{13}]$ y $Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{13}]$ requieren un estudio más detallado, que se aborda en los lemas 2.2.36-2.2.38.

Lema 2.2.36 *Bajo las condiciones del lema 2.2.28, se tiene*

$$Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{12}] = O(n^{-1}g_2^2). \quad (2.215)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{12}] &= Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(T_i)(1 - p(T_i))z_4(T_i), \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{g_2}(T_j - T_k) (\delta_k - p(T_j)) z_{51}(T_j) \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M^{i,j,k}(g_2) \\ &= \frac{1}{n^3} (n(n-1) (M^{1,1,2}(g_2) + M^{1,2,1}(g_2)) + nM^{1,1,1}(g_2)) \end{aligned} \quad (2.216)$$

donde para $1 \leq i, j, k \leq n$ se define

$$M^{i,j,k}(g_2) = Cov [p(T_i)(1 - p(T_i))z_4(T_i), K_{g_2}(T_j - T_k) (\delta_k - p(T_j)) z_{51}(T_j)].$$

La primera de estas tres covarianzas es

$$M^{1,1,2}(g_2) = M_1^{1,1,2}(g_2) - QI_{12}(g_2)$$

donde

$$M_1^{1,1,2}(g_2) = E [p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) z_{51}(T_1)]$$

y $I_{12}(g_2)$ se definió en (2.178). Se tiene

$$\begin{aligned} M_1^{1,1,2}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x)(1-p(x))z_4(x)K_{g_2}(x-y)(p(y)-p(x))z_{51}(x)h(y)h(x)dydx \\ &= O(g_2^2), \end{aligned}$$

como se probó para la expresión similar (2.178), que define el término $I_{12}(g_2)$. Por tanto,

$$M^{1,1,2}(g_2) = O(g_2^2). \quad (2.217)$$

Análogamente,

$$M^{1,2,1}(g_2) = M_1^{1,2,1}(g_2) - QI_{12}(g_2)$$

donde se define

$$M_1^{1,2,1}(g_2) = E[p(T_1)(1-p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(T_2-T_1)(\delta_1-p(T_2))z_{51}(T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,1}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x)(1-p(x))z_4(x)K_{g_2}(y-x)(p(x)-p(y))z_{51}(y)h(y)h(x)dydx \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_2}}^{\infty} p(x)(1-p(x))z_4(x)K(y_1)(p(x)-p(x+g_2y_1))z_5(x+g_2y_1)h(x)dy_1dx \end{aligned}$$

donde el cambio de variable empleado ha sido $\frac{y-x}{g_2} = y_1$. Obviamente,

$$\lim_{g_2 \rightarrow 0} M_1^{1,2,1}(g_2) = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{dM_1^{1,2,1}(g_2)}{dg_2} &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x)(1-p(x))z_4(x)K\left(\frac{\varepsilon'-x}{g_2}\right)(p(x)-p(\varepsilon'))z_5(\varepsilon')\frac{\varepsilon'-x}{g_2}h(x)dy_1dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_2}}^{\infty} ((p(x)-p(x+g_2y_1))z_5'(x+g_2y_1)-p'(x+g_2y_1)z_5(x+g_2y_1)) \\ &\quad \times p(x)(1-p(x))z_4(x)h(x)K(y_1)y_1dy_1dx \end{aligned}$$

por lo que, teniendo en cuenta que $z_5(\varepsilon') = 0$ como consecuencia de las hipótesis sobre w , también se verifica

$$\lim_{g_2 \rightarrow 0} \frac{dM_1^{1,2,1}(g_2)}{dg_2} = 0.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_1^{1,2,1}(g_2)}{dg_2^2} &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} ((p(x)-p(\varepsilon'))z_5'(\varepsilon')-p'(\varepsilon')z_5(\varepsilon')) \\ &\quad \times K\left(\frac{\varepsilon'-x}{g_2}\right)\left(\frac{\varepsilon'-x}{g_2}\right)^2 p(x)(1-p(x))z_4(x)h(x)dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\frac{\varepsilon'-x}{g_2}}^{\infty} ((p(x)-p(x+g_2y_1))z_5''(x+g_2y_1) \end{aligned}$$

$$-2p'(x + g_2 y_1) z_5'(x + g_2 y_1) - p''(x + g_2 y_1) z_5(x + g_2 y_1)) \\ \times K(y_1) y_1^2 dy_1 p(x) (1 - p(x)) z_4(x) h(x) dx.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $z_5(\varepsilon') = z_5'(\varepsilon') = 0$,

$$\lim_{g_2 \rightarrow 0} \frac{dM_1^{1,2,1}(g_2)}{dg_2} = - \int_{\varepsilon'}^{\infty} (2p'(x) z_5'(x) + p''(x) z_5(x)) p(x) (1 - p(x)) z_4(x) h(x) dx.$$

Así, mediante un desarrollo de Taylor de $M_1^{1,2,1}(g_2)$ en 0,

$$M_1^{1,2,1}(g_2) = O(g_2^2)$$

y, en fin,

$$M^{1,2,1}(g_2) = O(g_2^2). \quad (2.218)$$

Respecto a la tercera covarianza de (2.216), es fácil observar que

$$M^{1,1,1}(g_2) = 0. \quad (2.219)$$

Reuniendo los resultados (2.217), (2.218) y (2.219) se obtiene (2.215). ■

Lema 2.2.37 *Bajo las condiciones del lema 2.2.28, se tiene*

$$Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{13}] = o(n^{-1} g_2^2) + O(n^{-2} g_2^{-1}). \quad (2.220)$$

Demostración. A lo largo de la demostración se emplearán resultados demostrados con anterioridad para los términos $I_{1311}(g_2)$, $I_{1313}(g_2)$, $I_{1314}(g_2)$ —definidos en el lema 2.2.31—, $I_{1324}(g_2)$ y $I_{1325}(g_2)$ —del lema 2.2.32—.

Recordando la representación (2.189), se estudian a continuación las covarianzas $Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{131}]$ y $Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{132}]$. Respecto a la primera,

$$Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{131}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n Cov \left[p(T_{i_1}) (1 - p(T_{i_1})) z_4(T_{i_1}), \right. \\ \left. \frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2}) \right] \\ = \frac{1}{n^4} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n N^{i_1, i_2, i_3, i_4}(g_2)$$

donde para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$ se define

$$N^{i_1, i_2, i_3, i_4}(g_2) = Cov [p(T_{i_1}) (1 - p(T_{i_1})) z_4(T_{i_1}), \\ K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_2})) K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2})].$$

Se estudian estas covarianzas según la cardinalidad de $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, seleccionando, con el fin de no extender innecesariamente el estudio, aquellos casos relevantes en el sentido de que su orden asintótico sea extensible a los casos no tratados.

a) Cuando $\#(I) = 3$, se considera, por ejemplo, el caso $i_1 = i_3$,

$$N^{1,2,1,3}(g_2) = N_1^{1,2,1,3}(g_2) - QI_{1314}(g_2)$$

donde se ha definido

$$N_1^{1,2,1,3}(g_2) = E [p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(T_2 - T_1) \times (\delta_1 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) z_{41}(T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_1) (p(x_1) - p(x_2)) \\ &\quad \times K_{g_2}(x_2 - x_3) (p(x_3) - p(x_2)) z_{41}(x_2)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L p(x_2 - g_2x_{11})(1 - p(x_2 - g_2x_{11}))z_4(x_2 - g_2x_{11}) \\ &\quad \times K(x_{11}) (p(x_2 - g_2x_{11}) - p(x_2)) K(x_{31}) (p(x_2 - g_2x_{31}) - p(x_2)) \\ &\quad \times z_{42}(x_2)h(x_2 - g_2x_{31})h(x_2 - g_2x_{11})dx_{31}dx_{11}dx_2 \end{aligned}$$

donde el cambio de variable empleado ha sido $\frac{x_2 - x_1}{g_2} = x_{11}$, $\frac{x_2 - x_3}{g_2} = x_{31}$ y se supone $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Como es habitual, un desarrollo de Taylor de $p(x_2 - g_2x_{31}) - p(x_2)$ y $h(x_2 - g_2x_{31})$ en x_2 permite obtener

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,3}(g_2) &= g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2 - \varepsilon'}{g_2}} p(x_2 - g_2x_{11})(1 - p(x_2 - g_2x_{11}))z_4(x_2 - g_2x_{11}) \\ &\quad \times K(x_{11}) (p(x_2 - g_2x_{11}) - p(x_2)) \left(p'(x_2)h'(x_2) + \frac{1}{2}p''(x_2)h(x_2) \right) \\ &\quad \times z_{42}(x_2)h(x_2 - g_2x_{11})dx_{11}dx_2 + o(g_2^2) \\ &= o(g_2^2) \end{aligned}$$

e, igualmente,

$$N^{1,2,1,3}(g_2) = o(g_2^2). \quad (2.221)$$

b) Cuando $\#(I) = 2$ se estudian dos casos, que representan situaciones cualitativamente diferentes. El primero es aquél en que $i_1 = i_2, i_3 = i_4$. La covarianza es

$$N^{1,1,2,2}(g_2) = N_1^{1,1,2,2}(g_2) - QI_{1313}(g_2)$$

donde

$$N_1^{1,1,2,2}(g_2) = E \left[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(T_1 - T_2)^2 (\delta_2 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right].$$

Se tiene,

$$\begin{aligned} N_1^{1,1,2,2}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_1 - x_2)^2 \\ &\quad \times (p(x_2)(1 - 2p(x_1)) + p(x_1)^2) z_{41}(x_1)h(x_2)h(x_1)dx_2dx_1 \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} p(x_1)(1 - p(x_1))z_1(x_1)K(x_{21})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (p(x_2)(1 - 2p(x_1)) + p(x_1)^2) z_{42}(x_1)h(x_1 - g_2x_{21})dx_{21}dx_1 \\ & = O(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x_1-x_2}{g_2} = x_{21}$. Por tanto, también,

$$N^{1,1,2,2}(g_2) = O(g_2^{-1}). \quad (2.222)$$

El segundo caso que se estudia es $i_1 = i_3 = i_4$, en que la covarianza es

$$N^{1,2,1,1}(g_2) = N_1^{1,2,1,1}(g_2) - QI_{1313}(g_2)$$

donde

$$N_1^{1,2,1,1}(g_2) = E \left[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(T_2 - T_1)^2 (\delta_1 - p(T_2))^2 z_{41}(T_2) \right].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} N_1^{1,2,1,1}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_1)^2 \\ &\quad \times (p(x_1)(1 - 2p(x_2)) + p(x_2)^2) z_{41}(x_2)h(x_2)h(x_1)dx_2dx_1 \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\varepsilon'}{x}} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K(x_{21})^2 \\ &\quad \times (p(x_1)(1 - 2p(x_2)) + p(x_2)^2) z_{42}(x_1 - g_2x_{21})h(x_1)dx_{21}dx_1 \\ &= O(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

donde se ha empleado el mismo cambio de variable del caso anterior. Por tanto, igualmente,

$$N^{1,2,1,1}(g_2) = O(g_2^{-1}). \quad (2.223)$$

c) Cuando $\#(I) = 1$ la única covarianza es

$$N^{1,1,1,1}(g_2) = N_1^{1,1,1,1}(g_2) - QI_{1311}(g_2)$$

donde

$$N_1^{1,1,1,1}(g_2) = E \left[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)K_{g_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 z_{41}(T_1) \right].$$

Se tiene

$$N_1^{1,1,1,1}(g_2) = \frac{1}{g_2^2} K(0)^2 \int_{\varepsilon'}^{\infty} z_4(x)p(x)^2(1 - p(x))^2 z_{41}(x)h(x)dx = O(g_2^{-2}),$$

luego, igualmente,

$$N^{1,1,1,1}(g_2) = O(g_2^{-2}). \quad (2.224)$$

A partir de los resultados (2.221)-(2.224) se obtiene

$$Cov \left[Q_{11}, \widehat{Q}_{131} \right] = o(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}) + O(n^{-3}g_2^{-2})$$

y, por la hipótesis **(V.2)**,

$$Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{131}] = o(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}). \quad (2.225)$$

Por otra parte, procediendo del mismo modo,

$$\begin{aligned} Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{132}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n Cov \left[p(T_{i_1})(1-p(T_{i_1}))z_4(T_{i_1}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_2}-T_{i_3})(\delta_{i_3}-p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n (K_{g_2}(T_{i_2}-T_{i_4})-h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2}) \right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n R^{i_1, i_2, i_3, i_4}(g_2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R^{i_1, i_2, i_3, i_4}(g_2) &= Cov [p(T_{i_1})(1-p(T_{i_1}))z_4(T_{i_1}), \\ &\quad K_{g_2}(T_{i_2}-T_{i_3})(\delta_{i_3}-p(T_{i_2}))(K_{g_2}(T_{i_2}-T_{i_4})-h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2})]. \end{aligned}$$

Se considerarán una a una las diferentes cardinalidades del conjunto de índices $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

a) Cuando $\#(I) = 3$, se considera, por ejemplo, el caso $i_1 = i_3$. La covarianza es

$$R^{1,2,1,3}(g_2) = R_1^{1,2,1,3}(g_2) - QI_{1325}(g_2)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,3}(g_2) &= E [p(T_1)(1-p(T_1))z_4(T_1) \\ &\quad \times K_{g_2}(T_2-T_1)(\delta_1-p(T_2))(K_{g_2}(T_2-T_3)-h(T_2)) z_{52}(T_2)]. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x_1)(1-p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_2-x_1)(p(x_1)-p(x_2)) \\ &\quad \times (K_{g_2}(x_2-x_3)-h(x_2)) z_{52}(x_2)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x_1)(1-p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_2-x_1)(p(x_1)-p(x_2)) \\ &\quad \times \left(\int_0^{\infty} K_{g_2}(x_2-x_3)h(x_3)dx_3 - h(x_2) \right) z_{51}(x_2)h(x_1)dx_2dx_1 \\ &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\varepsilon'}{g_2}} p(x_2-g_2x_{11})(1-p(x_2-g_2x_{11}))z_4(x_2-g_2x_{11})K(x_{11}) \\ &\quad \times (p(x_2-g_2x_{11})-p(x_2)) \left(\int_{-L}^L K(x_{31})h(x_2-g_2x_{31})dx_{31} - h(x_2) \right) \\ &\quad \times z_{51}(x_2)h(x_2-g_2x_{11})dx_{11}dx_2 \end{aligned}$$

donde el cambio de variable empleado ha sido $\frac{x_2-x_1}{g_2} = x_{11}$, $\frac{x_2-x_3}{g_2} = x_{31}$ y se supone $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$. Como es habitual, un desarrollo de Taylor de $h(x_2-g_2x_{31})$ en x_2 permite obtener

$$R_1^{1,2,1,3}(g_2) = g_2^2 \frac{1}{2} \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\varepsilon'}{g_2}} p(x_2-g_2x_{11})(1-p(x_2-g_2x_{11}))z_4(x_2-g_2x_{11})K(x_{11})$$

$$\begin{aligned} & \times (p(x_2 - g_2x_{11}) - p(x_2)) h''(x_2) z_{51}(x_2) h(x_2 - g_2x_{11}) dx_{11} dx_2 + o(g_2^2) \\ & = o(g_2^2) \end{aligned}$$

e, igualmente,

$$R^{1,2,1,3}(g_2) = o(g_2^2). \quad (2.226)$$

b) Cuando $\#(I) = 2$, sólo se estudian dos casos, que representan situaciones cualitativamente diferentes.

El primero es aquél en que $i_1 = i_2, i_3 = i_4$. La covarianza es ahora

$$R^{1,1,2,2}(g_2) = R_1^{1,1,2,2}(g_2) - QI_{1324}(g_2)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1^{1,1,2,2}(g_2) &= E[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1) \\ & \quad K_{g_2}(T_1 - T_2)(\delta_2 - p(T_1))(K_{g_2}(T_1 - T_2) - h(T_1))z_{52}(T_1)]. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} R_1^{1,1,2,2}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K_{g_2}(x_1 - x_2)(p(x_2) - p(x_1)) \\ & \quad \times (K_{g_2}(x_1 - x_2) - h(x_1))z_{52}(x_1)h(x_2)h(x_1)dx_2dx_1 \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)K(x_{21})(p(x_1 - g_2x_{21}) - p(x_1)) \\ & \quad \times (K(x_{21}) - g_2h(x_1))z_{51}(x_1)h(x_1 - g_2x_{21})dx_{21}dx_1 \\ &= o(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$. Por tanto, también,

$$R^{1,1,2,2}(g_2) = o(g_2^{-1}). \quad (2.227)$$

El segundo caso que se estudia es $i_1 = i_3 = i_4$, en que la covarianza es

$$\begin{aligned} R^{1,2,1,1}(g_2) &= E[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)w(T_1) \\ & \quad \times K_{g_2}(T_2 - T_1)(\delta_1 - p(T_2))(K_{g_2}(T_2 - T_1) - h(T_2))z_{52}(T_2)] \\ & \quad - E[p(T_1)(1 - p(T_1))z_4(T_1)w(T_1)] \\ & \quad \times E[K_{g_2}(T_2 - T_1)(\delta_1 - p(T_2))(K_{g_2}(T_2 - T_1) - h(T_2))z_{52}(T_2)] \\ &= R_1^{1,2,1,1}(g_2) - QI_{1324}(g_2). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} R_1^{1,2,1,1}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)w(x_1)K_{g_2}(x_2 - x_1)(p(x_1) - p(x_2)) \\ & \quad \times (K_{g_2}(x_2 - x_1) - h(x_2))z_{52}(x_2)h(x_2)h(x_1)dx_2dx_1 \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} p(x_1)(1 - p(x_1))z_4(x_1)w(x_1)K(x_{21})(p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) \\ & \quad \times (K(x_{21}) - g_2h(x_1 - g_2x_{21}))z_{52}(x_1 - g_2x_{21})h(x_1 - g_2x_{21})h(x_1)dx_{21}dx_1 \end{aligned}$$

$$= o(g_2^{-1})$$

donde se ha empleado el mismo cambio de variable del caso anterior. Por tanto, igualmente,

$$R^{1,2,1,1}(g_2) = o(g_2^{-1}). \quad (2.228)$$

c) Si $\#(I) = 1$ es inmediato observar que

$$R^{1,1,1,1}(g_2) = 0. \quad (2.229)$$

De los resultados (2.226)-(2.229) se obtiene

$$Cov [Q_{11}, \widehat{Q}_{132}] = o(n^{-1}g_2^2) + o(n^{-2}g_2^{-1}). \quad (2.230)$$

El resultado (2.220) se obtiene a partir de (2.225) y (2.230), teniendo en cuenta la representación (2.189). ■

Lema 2.2.38 *Bajo las condiciones del lema 2.2.28, se tiene*

$$Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{13}] = O(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}) + O(n^{-3}g_2^{-3}). \quad (2.231)$$

Demostración. Como en la demostración del lema previo, se emplean en ésta resultados probados con anterioridad para los términos $I_{12}(g_2)$ —definido en el lema 2.2.28—, $I_{1313}(g_2)$, $I_{1314}(g_2)$ —del lema 2.2.31—, $I_{1324}(g_2)$ y $I_{1325}(g_2)$ —del lema 2.2.32—.

Teniendo presente la representación (2.189), se considera en primer lugar $Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{131}]$.

$$\begin{aligned} Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{131}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) z_{51}(T_{i_1}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_5=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2}) \right] \\ &= \frac{1}{n^5} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2) \end{aligned}$$

donde para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \leq n$ se define

$$\begin{aligned} M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2) &= Cov [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) z_{51}(T_{i_1}), \\ &\quad K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) z_{51}(T_{i_2})]. \end{aligned}$$

Se discute el orden de estas covarianzas según el cardinal de $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$.

a) Si $\#(I) = 4$ los posibles casos se reducen por simetría a 4, a saber,

$$i_1 = i_2, \quad i_1 = i_4, \quad i_3 = i_2, \quad i_3 = i_4.$$

A efectos de determinar el orden asintótico, es suficiente con examinar en detalle sólo el último caso, ya que es evidente que el orden de convergencia que se obtenga será extensible a los demás casos. Así,

$$M^{1,2,3,3,4}(g_2) = M_1^{1,2,3,3,4}(g_2) - I_{12}(g_2)I_{1314}(g_2)$$

donde

$$M_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) \\ \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_4) (\delta_4 - p(T_2)) z_{41}(T_2)].$$

Ahora,

$$M_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) \\ \times K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_4) (p(x_4) - p(x_2)) \\ \times z_{51}(x_1) z_{41}(x_2) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1$$

y con el cambio de variable $\frac{x_2 - x_1}{g_2} = x_{11}$, $\frac{x_2 - x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_2 - x_4}{g_2} = x_{41}$ y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$,

$$M_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2 x_{11}) - p(x_2)) \\ + p(x_2 - g_2 x_{11}) p(x_2)) K(x_{31} - x_{11}) K(x_{31}) \\ \times K(x_{41}) (p(x_2 - g_2 x_{41}) - p(x_2)) z_5(x_2 - g_2 x_{11}) z_{42}(x_2) \\ \times h(x_2 - g_2 x_{41}) h(x_2 - g_2 x_{31}) dx_{41} dx_{31} dx_{11} dx_2 \\ = g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2 x_{11}) - p(x_2)) \\ + p(x_2 - g_2 x_{11}) p(x_2)) K(x_{31} - x_{11}) K(x_{31}) \\ \times \left(\frac{1}{2} p''(x_2) h(x_2) + p'(x_2) h'(x_2) \right) z_5(x_2 - g_2 x_{11}) z_{42}(x_2) \\ \times h(x_2 - g_2 x_{31}) dx_{31} dx_{11} dx_2 + o(g_2^2) \\ = O(g_2^2)$$

donde, en la segunda igualdad, se han realizado desarrollos de Taylor de $p(x_2 - g_2 x_{41}) - p(x_2)$ y $h(x_2 - g_2 x_{41})$ en x_2 . Por tanto,

$$M_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = O(g_2^2).$$

b) Si $\#(I) = 3$, puede ser debido a que dos pares de índices sean iguales o a que sean tres los índices iguales entre sí. Los casos que se encuadran dentro de la primera posibilidad se reducen por simetría a los 7 siguientes:

$$i_1 = i_2, i_3 = i_4; \quad i_1 = i_2, i_4 = i_5; \quad i_1 = i_4, i_2 = i_3; \quad i_1 = i_4, i_3 = i_5; \\ i_1 = i_4, i_2 = i_5; \quad i_2 = i_3, i_4 = i_5; \quad i_2 = i_5, i_3 = i_4.$$

Para no extender innecesariamente el estudio, de ellos sólo se estudia el caso $i_1 = i_4, i_3 = i_5$. En todo caso, el orden de convergencia que se obtenga será igualmente válido para los casos no estudiados. Así, la covarianza es

$$M_1^{1,2,3,1,3}(g_2) = M_1^{1,2,3,1,3}(g_2) - I_{12}(g_2) I_{1314}(g_2)$$

donde

$$M_1^{1,2,3,1,3}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1)$$

$$\times K_{g_2}(T_2 - T_1) (\delta_1 - p(T_2)) K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) z_{41}(T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,1,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3) (1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) \\ &\quad \times K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_1) (p(x_1) - p(x_2)) K_{g_2}(x_2 - x_3) \\ &\quad \times z_{51}(x_1) z_{41}(x_2) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_3 dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$,

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,1,3}(g_2) &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} (p(x_1 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ &\quad + p(x_1)p(x_1 - g_2 x_{21})) K(x_{31}) K(x_{21}) (p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) \\ &\quad \times K(x_{31} - x_{21}) z_5(x_1) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) h(x_1 - g_2 x_{31}) dx_{31} dx_{21} dx_1 \\ &= o(g_2^{-1}) \end{aligned}$$

y, también,

$$M^{1,2,3,1,3}(g_2) = o(g_2^{-1}).$$

Por otra parte, dentro de la segunda posibilidad los casos se reducen por simetría a los 6 siguientes:

$$\begin{aligned} i_1 = i_2 = i_3, \quad i_1 = i_2 = i_4, \quad i_1 = i_3 = i_4, \\ i_1 = i_4 = i_5, \quad i_2 = i_3 = i_4, \quad i_3 = i_4 = i_5. \end{aligned}$$

Ciñéndose al último de ellos,

$$M^{1,2,3,3,3}(g_2) = M_1^{1,2,3,3,3}(g_2) - I_{12}(g_2) I_{1313}(g_2)$$

donde

$$M_1^{1,2,3,3,3}(g_2) = E \left[K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) K_{g_2}(T_2 - T_3)^2 (\delta_3 - p(T_2))^2 z_{41}(T_2) \right].$$

Se tiene

$$\begin{aligned} M_1^{1,2,3,3,3}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3) (1 - (p(x_1) + p(x_2)) (1 - p(x_2))) - p(x_1)p(x_2)^2) \\ &\quad \times K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_3)^2 z_{51}(x_1) z_{41}(x_2) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} (p(x_1 - g_2 x_{31}) (1 - (p(x_1) + p(x_1 - g_2 x_{21}))) \\ &\quad \times (1 - p(x_1 - g_2 x_{21})) - p(x_1)p(x_1 - g_2 x_{21})^2) K(x_{31}) K(x_{31} - x_{21})^2 \\ &\quad \times z_5(x_1) z_{42}(x_1 - g_2 x_{21}) h(x_1 - g_2 x_{31}) dx_{31} dx_{21} dx_1 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$. Por tanto,

$$M_1^{1,2,3,3,3}(g_2) = O(g_2^{-1})$$

e, igualmente,

$$M^{1,2,3,3,3}(g_2) = O(g_2^{-1}).$$

c) Cuando $\#(I) < 3$, es suficiente con comprobar que

$$M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2) = E [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) z_{51}(T_{i_1}) K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) \\ \times K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) (\delta_{i_5} - p(T_{i_2})) z_{41}(T_{i_2})] - O(g_2^2) O(g_2^{-2})$$

luego, cualesquiera que sean los índices $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \leq n$,

$$|M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2)| \leq \frac{1}{g_2^3} \|K\|_\infty^3 \|z_{51}\|_\infty \|z_{41}\|_\infty + O(1).$$

Reuniendo los resultados anteriores se obtiene

$$Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{131}] = O(n^{-1}g_2^2) + O(n^{-2}g_2^{-1}) + O(n^{-3}g_2^{-3}). \quad (2.232)$$

En cuanto a la covarianza $Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{132}]$,

$$Cov [\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{132}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i_3=1}^n K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) z_{51}(T_{i_1}), \right. \\ \left. \frac{1}{n} \sum_{i_4=1}^n K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) \frac{1}{n} \sum_{i_5=1}^n (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) - h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2}) \right] \\ = \frac{1}{n^5} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2)$$

donde para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \leq n$ se ha definido

$$N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2) = Cov [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3}) (\delta_{i_3} - p(T_{i_1})) z_{51}(T_{i_1}), \\ K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4}) (\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) - h(T_{i_2})) z_{52}(T_{i_2})].$$

Se discute el orden de estas covarianzas según el cardinal del conjunto de índices $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$, de modo completamente análogo a como se hizo con las covarianzas $M^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2)$.

a) Cuando $\#(I) = 4$ hay 6 posibles casos:

$$i_1 = i_2, \quad i_1 = i_4, \quad i_1 = i_5, \quad i_3 = i_2, \quad i_3 = i_4, \quad i_3 = i_5.$$

Sólo se considera el caso $i_3 = i_4$. Para él

$$N^{1,2,3,3,4}(g_2) = N_1^{1,2,3,3,4}(g_2) - I_{12}(g_2)I_{1325}(g_2)$$

donde

$$N_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) \\ \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) (K_{g_2}(T_2 - T_4) - h(T_2)) z_{52}(T_2)].$$

Ahora,

$$N_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3)(1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_3) \\ \times (K_{g_2}(x_2 - x_4) - h(x_2)) z_{51}(x_1) z_{52}(x_2) h(x_4) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3)(1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_3) \\
&\quad \times \left(\int_0^{\infty} K_{g_2}(x_2 - x_4) h(x_4) dx_4 - h(x_2) \right) z_5(x_1) z_{51}(x_2) h(x_3) dx_3 dx_2 dx_1.
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{x_2-x_1}{g_2} = x_{11}$, $\frac{x_2-x_3}{g_2} = x_{31}$, $\frac{x_2-x_4}{g_2} = x_{41}$, y para $g_2 < \frac{\varepsilon'}{L}$

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,3,4}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2 x_{11}) - p(x_2)) + p(x_2 - g_2 x_{11}) p(x_2)) \\
&\quad \times K(x_{31} - x_{11}) K(x_{31}) z_5(x_2 - g_2 x_{11}) \left(\int_{-L}^L K(x_{41}) h(x_2 - g_2 x_{41}) dx_{41} - h(x_2) \right) \\
&\quad \times z_{51}(x_2) h(x_2 - g_2 x_{31}) dx_{31} dx_{11} dx_2 \\
&= \frac{1}{2} g_2^2 \mu_K \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-L}^L (p(x_2 - g_2 x_{31}) (1 - p(x_2 - g_2 x_{11}) - p(x_2)) \\
&\quad + p(x_2 - g_2 x_{11}) p(x_2)) K(x_{31} - x_{11}) K(x_{31}) z_5(x_2 - g_2 x_{11}) \\
&\quad \times h''(x_2) z_{51}(x_2) h(x_2 - g_2 x_{31}) dx_{31} dx_{11} dx_2 + o(g_2^2) \\
&= O(g_2^2)
\end{aligned}$$

donde se ha realizado un desarrollo de Taylor de $h(x_2 - g_2 x_{41})$ en x_2 . Por tanto,

$$N_1^{1,2,3,3,4}(g_2) = O(g_2^2).$$

Es inmediato concluir este mismo orden para las otras cinco covarianzas.

b) Cuando $\#(I) = 3$ hay dos posibles situaciones, una primera en la que dos pares de índices son iguales y otra en la que son tres los índices iguales entre sí. De los 12 casos que se encuadran dentro de la primera posibilidad, a saber,

$$\begin{aligned}
&i_1 = i_2, i_3 = i_4; \quad i_1 = i_2, i_3 = i_5; \quad i_1 = i_2, i_4 = i_5; \quad i_1 = i_4, i_2 = i_3; \\
&i_1 = i_4, i_3 = i_5; \quad i_1 = i_4, i_2 = i_5; \quad i_1 = i_5, i_2 = i_3; \quad i_1 = i_5, i_2 = i_4; \\
&i_1 = i_5, i_3 = i_4; \quad i_2 = i_3, i_4 = i_5; \quad i_2 = i_4, i_3 = i_5; \quad i_2 = i_5, i_3 = i_4;
\end{aligned}$$

será suficiente con estudiar el caso $i_1 = i_5, i_3 = i_4$, para el que la covarianza es

$$N_1^{1,2,3,3,1}(g_2) = N_1^{1,2,3,3,1}(g_2) - I_{12}(g_2) I_{1325}(g_2)$$

donde

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,3,1}(g_2) &= E [K_{g_2}(T_1 - T_3) (\delta_3 - p(T_1)) z_{51}(T_1) \\
&\quad \times K_{g_2}(T_2 - T_3) (\delta_3 - p(T_2)) (K_{g_2}(T_2 - T_1) - h(T_2)) z_{52}(T_2)].
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,3,1}(g_2) &= \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3)(1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2)) K_{g_2}(x_1 - x_3) K_{g_2}(x_2 - x_3) \\
&\quad \times (K_{g_2}(x_2 - x_1) - h(x_2)) z_{51}(x_1) z_{52}(x_2) h(x_3) h(x_2) h(x_1) dx_3 dx_2 dx_1
\end{aligned}$$

y con el cambio de variable $\frac{x_1-x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1-x_3}{g_2} = x_{31}$,

$$N_1^{1,2,3,3,1}(g_2) = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-\varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} (p(x_1 - g_2 x_3) (1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2 x_{21})) + p(x_1) p(x_1 - g_2 x_{21}))$$

$$\begin{aligned}
& \times K(x_{31})K(x_{31} - x_{21})(K(x_{21}) - g_2h(x_1 - g_2x_{21}))z_5(x_1)z_{51}(x_1 - g_2x_{21}) \\
& \times h(x_1 - g_2x_{31})dx_{31}dx_{21}dx_1 \\
= & O(g_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$N^{1,2,3,3,1}(g_2) = O(g_2^{-1}),$$

orden que es también el de los 11 casos restantes.

En la segunda situación hay 9 posibles casos:

$$\begin{aligned}
i_1 = i_2 = i_3, \quad i_1 = i_2 = i_4, \quad i_1 = i_2 = i_5, \quad i_1 = i_3 = i_4, \quad i_1 = i_3 = i_5, \\
i_1 = i_4 = i_5, \quad i_2 = i_3 = i_4, \quad i_2 = i_3 = i_5, \quad i_3 = i_4 = i_5.
\end{aligned}$$

Se calcula a continuación el orden para el último caso, y se extiende posteriormente el resultado a los 8 casos restantes. Así, la covarianza correspondiente a dicho caso es

$$N^{1,2,3,3,3}(g_2) = N_1^{1,2,3,3,3}(g_2) - I_{12}(g_2)I_{1324}(g_2)$$

donde

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,3,3}(g_2) = & E [K_{g_2}(T_1 - T_3)(\delta_3 - p(T_1))z_{51}(T_1) \\
& \times K_{g_2}(T_2 - T_3)(\delta_3 - p(T_2))(K_{g_2}(T_2 - T_3) - h(T_2))z_{52}(T_2)].
\end{aligned}$$

Se tiene,

$$\begin{aligned}
N_1^{1,2,3,3,3}(g_2) = & \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_0^{\infty} (p(x_3)(1 - p(x_1) - p(x_2)) + p(x_1)p(x_2))K_{g_2}(x_1 - x_3)K_{g_2}(x_2 - x_3) \\
& \times (K_{g_2}(x_2 - x_3) - h(x_2))z_{51}(x_1)z_{52}(x_2)h(x_3)h(x_2)h(x_1)dx_3dx_2dx_1 \\
= & \frac{1}{g_2} \int_{\varepsilon'}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - \varepsilon'}{g_2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{g_2}} (p(x_1 - g_2x_3)(1 - p(x_1) - p(x_1 - g_2x_{21})) + p(x_1)p(x_1 - g_2x_{21})) \\
& \times K(x_{31})K(x_{31} - x_{21})(K(x_{31} - x_{21}) - g_2h(x_2))z_5(x_1)z_{51}(x_1 - g_2x_{21}) \\
& \times h(x_1 - g_2x_{31})dx_{31}dx_{21}dx_1
\end{aligned}$$

donde el cambio de variable empleado ha sido $\frac{x_1 - x_2}{g_2} = x_{21}$, $\frac{x_1 - x_3}{g_2} = x_{31}$. Por consiguiente,

$$N_1^{1,2,3,3,3}(g_2) = O(g_2^{-1})$$

y, también,

$$N^{1,2,3,3,3}(g_2) = O(g_2^{-1}).$$

c) Cuando $\#(I) < 3$, como

$$\begin{aligned}
N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2) = & E [K_{g_2}(T_{i_1} - T_{i_3})(\delta_{i_3} - p(T_{i_1}))z_{51}(T_{i_1})K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_4})(\delta_{i_4} - p(T_{i_2})) \\
& \times (K_{g_2}(T_{i_2} - T_{i_5}) - h(T_{i_2}))z_{52}(T_{i_2})] - O(g_2^2) o (g_2^{-1}),
\end{aligned}$$

se empleará la siguiente acotación, válida cualesquiera que sean los índices $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \leq n$,

$$|N^{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}(g_2)| \leq \frac{1}{g_2^3} \|K\|_{\infty}^2 (\|K\|_{\infty} + \|h\|_{\infty}) \|z_{51}\|_{\infty} \|z_{52}\|_{\infty} + o(g_2).$$

A partir de los anteriores resultados se obtiene

$$Cov \left[\widehat{Q}_{12}, \widehat{Q}_{132} \right] = O \left(n^{-1} g_2^2 \right) + O \left(n^{-2} g_2^{-1} \right) + O \left(n^{-3} g_2^{-3} \right). \quad (2.233)$$

Por fin, a partir de los resultados (2.232)-(2.233) y de la representación (2.189) se obtiene el resultado (2.231). ■

Lema 2.2.39 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.2), se tiene*

$$\widetilde{Q}_1 - Q = O_P \left(n^{-1/2} + g_2^2 + n^{-1} g_2^{-1} \right). \quad (2.234)$$

Demostración. De la definición, (2.175) $\widetilde{Q}_1 = Q_{11} + \widehat{Q}_{12} + \widehat{Q}_{13}$. De los lemas 2.2.27, 2.2.28, 2.2.30 y 2.2.36-2.2.38 es inmediato concluir que

$$E \left[\widetilde{Q}_1 - Q \right] = D_1 g_2^2 + \frac{D_2}{n g_2} + o \left(g_2^2 \right) + o \left(n^{-1} g_2^{-1} \right) \quad (2.235)$$

y, tras algunos sencillos cálculos,

$$Var \left[\widetilde{Q}_1 - Q \right] = \frac{D_3}{n} + O \left(n^{-1} g_2^2 \right) + O \left(n^{-2} g_2^{-1} \right) + O \left(n^{-3} g_2^{-4} \right) \quad (2.236)$$

donde se ha definido

$$D_1 = \mu_K \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(1 - 2p(x)) (p'(x)h'(x) + \frac{1}{2}p''(x)h(x)) w(x)}{(1 - H(x))^2} dx, \quad (2.237)$$

$$D_2 = -c_K \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{p(x) (1 - p(x)) w(x)}{(1 - H(x))^2} dx, \quad (2.238)$$

$$D_3 = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{p(x) (1 - p(x)) (1 - 3p(x) (1 - p(x))) h(x) w(x)^2}{(1 - H(x))^4} dx - Q^2. \quad (2.239)$$

Bajo la hipótesis (V.2), la desigualdad de Tchebychev permite obtener para $\widetilde{Q}_1 - Q$ la acotación en probabilidad dada por el resultado (2.234). ■

Conviene recordar que, como ya se observó más arriba, los términos constituyentes de \widetilde{Q}_1 se caracterizan por no tener más de dos factores del tipo $(\widehat{\psi} - \psi)$ o $(\widehat{h} - h)$. Como se enuncia en el siguiente lema, el término restante de la representación (2.175), \widehat{Q}_{14} , en el que aparecen tres o cuatro factores del tipo $(\widehat{p} - p)$, $(\widehat{\psi} - \psi)$ o $(\widehat{h} - h)$, es despreciable respecto a los demás en el sentido de que es posible establecer para él una acotación en probabilidad a una tasa más rápida que la dada en el lema 2.2.39.

Lema 2.2.40 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1) y (V.2), se tiene*

$$\widehat{Q}_{14} = O_P \left(n^{-3/2} g_2^{-3/2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^{3/2} \right). \quad (2.240)$$

Demostración. Se define

$$\widehat{Q}_{141} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{52}(T_i),$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{142} &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{\psi}(T_i) - p(T_i) \widehat{h}(T_i)) (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{41}(T_i), \\ \widehat{Q}_{143} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widehat{p}(T_i) - p(T_i))^2 (\widehat{h}(T_i) - h(T_i))^2 z_{41}(T_i),\end{aligned}$$

de modo que pueda escribirse, de acuerdo con (2.174),

$$\widehat{Q}_{14} = \widehat{Q}_{141} + \widehat{Q}_{142} + \widehat{Q}_{143}.$$

Haciendo uso de la generalización de los teoremas 1.2.1-1.2.3 dada por las observaciones 1.2.1 y 1.2.2 y de las hipótesis **(V.2)**, **(W.1)** y **(H.1)**, es inmediato obtener

$$\widehat{Q}_{141} = O_P \left(n^{-3/2} g_2^{-3/2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^{3/2} \right).$$

Análogamente, escribiendo

$$\widehat{Q}_{142} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\widehat{\psi}(T_i) - \psi(T_i) - p(T_i) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) \right) (\widehat{p}(T_i) - p(T_i)) (\widehat{h}(T_i) - h(T_i)) z_{41}(T_i),$$

se tiene

$$\widehat{Q}_{142} = O_P \left(n^{-3/2} g_2^{-3/2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^{3/2} \right).$$

Por último, es también inmediato obtener bajo las mismas hipótesis

$$\widehat{Q}_{143} = O_P \left(n^{-2} g_2^{-2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^2 \right).$$

Por tanto,

$$\widehat{Q}_{14} = O_P \left(n^{-3/2} g_2^{-3/2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^{3/2} + n^{-2} g_2^{-2} \log \left(\frac{1}{g_2} \right)^2 \right)$$

y el resultado (2.240) se obtiene aplicando nuevamente la condición **(V.2)**. ■

Teorema 2.2.2 *Bajo las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(P.2)**, **(H.1)**, **(W.1)** y **(V.2)**, se tiene*

$$MSE \left(\widetilde{Q}_1 \right) = AMSE \left(\widetilde{Q}_1 \right) + O \left(g_2^6 \right) + o \left(n^{-1} g_2^{-1} \right) + o \left(n^{-2} g_2^{-6} \right)$$

donde

$$AMSE \left(\widetilde{Q}_1 \right) = \left(D_1 g_2^2 + \frac{D_2}{n g_2} \right)^2.$$

Por tanto, la ventana que minimiza el $AMSE \left(\widetilde{Q}_1 \right)$ es

$$g_{2,AMSE} = \frac{D}{n^{1/3}} \tag{2.241}$$

donde

$$D = \begin{cases} \left(\frac{D_2}{2D_1}\right)^{1/3}, & \text{si } D_1 < 0 \\ \left(-\frac{D_2}{D_1}\right)^{1/3}, & \text{si } D_1 > 0 \end{cases}$$

y D_1 y D_2 se definieron en (2.237) y (2.238), respectivamente.

Demostración. De las expresiones (2.235) y (2.236) para la esperanza y la varianza de $\tilde{Q}_1 - Q$, dadas en la demostración del lema 2.2.39 y de la condición (V.2), se deduce que su error cuadrático medio es

$$MSE(\tilde{Q}_1) = \left(D_1 g_2^2 + \frac{D_2}{n g_2}\right)^2 + \frac{D_3}{n} + o(g_2^4) + o(n^{-1} g_2) + o(n^{-2} g_2^{-2}) \quad (2.242)$$

donde D_1, D_2 y D_3 se definieron en (2.237), (2.238) y (2.239), respectivamente.

El valor de g_2 que minimiza la parte dominante de (2.242) dependerá del signo de D_1 (no se considera el caso $D_1 = 0$). En efecto, si $D_1 < 0$ el mínimo se alcanza en el punto en que se anula la derivada respecto a g_2 de $D_1 g_2^2 + D_2 n^{-1} g_2^{-1}$, es decir, en

$$g_2 = \left(\frac{D_2}{2D_1 n}\right)^{1/3},$$

mientras que si $D_1 > 0$ el mínimo se alcanza cuando $D_1 g_2^2 + D_2 n^{-1} g_2^{-1} = 0$, es decir, para

$$g_2 = \left(-\frac{D_2}{D_1 n}\right)^{1/3},$$

con lo que queda probada la tesis del teorema. ■

Teorema 2.2.3 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (P.2), (H.1), (W.1), (V.1) y (V.2), se tiene*

$$\hat{b} - b_{OPT} = O_P(n^{-11/15}) \quad (2.243)$$

y

$$\frac{\hat{b} - b_{OPT}}{b_{OPT}} = O_P(n^{-2/5}). \quad (2.244)$$

Demostración. Empleando las definiciones dadas en (2.28), (2.36), (2.37), (2.168), (2.174) y (2.175),

$$\hat{A} = \tilde{A}_1 + \hat{A}_{14} + \hat{A}_2$$

y

$$\hat{Q} = \tilde{Q}_1 + \hat{Q}_{14} + \hat{Q}_2.$$

En el lema 2.2.24 se probó que

$$\tilde{A}_1 - A = O_P(g_1^2 + n^{-1} g_1^{-3})$$

y según el lema 2.2.25,

$$\widehat{A}_{14} = o_P(n^{-1}g_1^{-3}).$$

Por otra parte, de acuerdo con la observación 2.2.1,

$$\widehat{A}_2 = O_P(n^{-1/2}).$$

Por tanto, supuesta la hipótesis **(V.1)**,

$$\widehat{A} = A + O_P(g_1^2 + n^{-1}g_1^{-3})$$

y cuando $g_1 = g_{1,AMSE}$,

$$\widehat{A} = A + O_P(n^{-2/5}). \quad (2.245)$$

Análogamente, en los lemas 2.2.39 y 2.2.40, respectivamente, se probó

$$\widetilde{Q}_1 - Q = O_P(n^{-1/2} + g_2^2 + n^{-1}g_2^{-1})$$

y

$$\widehat{Q}_{14} = o_P(n^{-1}g_2^{-1}).$$

Además, según (2.169),

$$\widehat{Q}_2 = O_P(n^{-1/2}\widehat{Q}_1),$$

de manera que, bajo la hipótesis **(V.2)**,

$$\widehat{Q} = Q + O_P(n^{-1/2} + g_2^2 + n^{-1}g_2^{-1})$$

y cuando $g_2 = g_{2,AMSE}$,

$$\widehat{Q} = Q + O_P(n^{-1/2} + n^{-2/3}) = Q + O_P(n^{-1/2}). \quad (2.246)$$

Ahora,

$$\widehat{b} - b_{OPT} = \left(\frac{e_K \widehat{Q}}{2\mu_K^2 n \widehat{A}} \right)^{1/3} - \left(\frac{e_K Q}{2\mu_K^2 n A} \right)^{1/3} = \left(\left(\frac{\widehat{Q}}{\widehat{A}} \right)^{1/3} - \left(\frac{Q}{A} \right)^{1/3} \right) \left(\frac{e_K}{2\mu_K^2 n} \right)^{1/3}$$

y teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de la función $g(x) = x^{1/3}$ en el punto $x_0 \geq 0$,

$$g(x) = g(x_0) + O(x - x_0),$$

se tiene

$$\widehat{b} - b_{OPT} = O_P \left(\left(\frac{\widehat{Q}}{\widehat{A}} - \frac{Q}{A} \right) n^{-1/3} \right). \quad (2.247)$$

Mediante sencillos cálculos,

$$\frac{\widehat{Q}}{\widehat{A}} - \frac{Q}{A} = \frac{\widehat{Q} - Q}{A} - \frac{\widehat{Q} \widehat{A} - A}{\widehat{A} A}$$

y, en virtud de (2.245) y (2.246),

$$\frac{\widehat{Q}}{\widehat{A}} - \frac{Q}{A} = O_P(n^{-1/2}) + O_P(1)O_P(n^{-2/5}) = O_P(n^{-2/5}).$$

Al resultado (2.243) se llega sustituyendo este orden en (2.247). En cuanto al resultado (2.244), se obtiene directamente del anterior teniendo en cuenta que $b_{OPT} = O(n^{-1/3})$. ■

2.3 Simulaciones

Se ha realizado un estudio de simulación para evaluar el comportamiento en la práctica del estimador de Nelson-Aalen presuavizado y del selector de ventana ‘plug-in’ propuesto. En todos los modelos simulados, $Y \stackrel{d}{=} W(\alpha_F, \beta_F)$, donde $W(\alpha, \beta)$ denota la distribución de Weibull con parámetro de forma α y parámetro de escala β , cuya densidad es $f(x) = \beta\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha)$, $x > 0$. Por otra parte, para cumplir la condición **(P.2)** se considera para el tiempo de censura una versión de la distribución de Weibull con un desplazamiento de localización: para cierto $\varepsilon > 0$, se define $C \stackrel{d}{=} W^\varepsilon(\alpha_G, \beta_G)$, como equivalente a $C - \varepsilon \stackrel{d}{=} W(\alpha_G, \beta_G)$.

La Tabla 2.1 muestra los parámetros elegidos para estas dos distribuciones en los cuatro modelos considerados.

Tabla 2.1. Parámetros de la distribución del tiempo de vida ($W(\alpha_F, \beta_F)$) y de la variable de censura ($W^\varepsilon(\alpha_G, \beta_G)$).

Modelo	α_F	β_F	α_G	β_G	ε
<i>I</i>	3	1	7	1	0.1
<i>II</i>	6	1	7	1	0.1
<i>III</i>	8	1	7 <td>1</td> <td>0.1</td>	1	0.1
<i>IV</i>	10	1	7	1	0.1

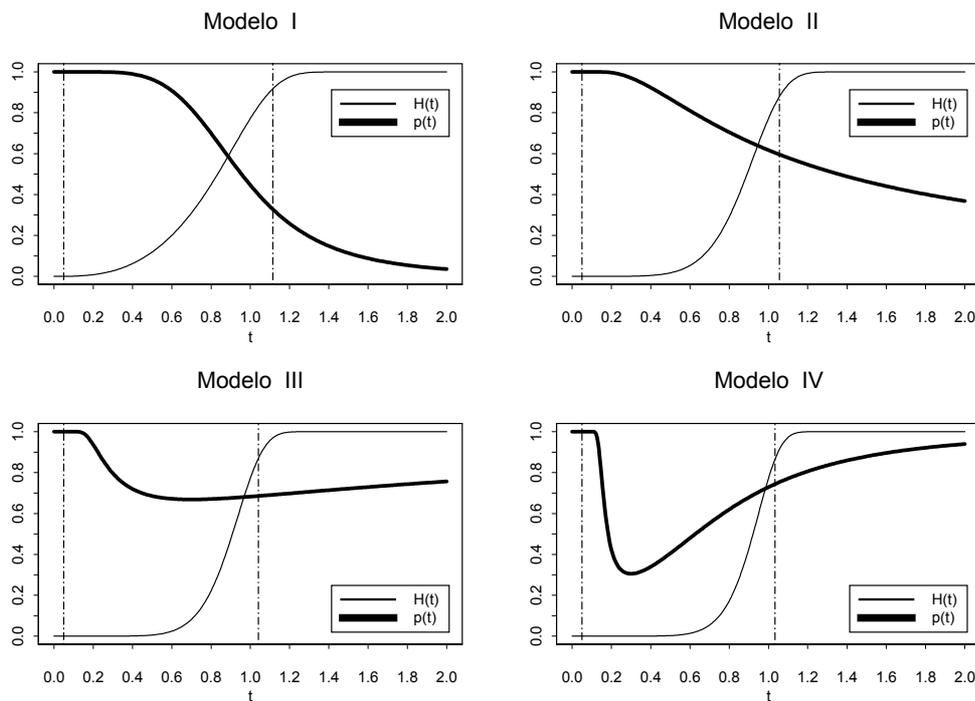


Figura 2.1. Funciones H y p para los modelos *I-IV*. Las líneas discontinuas indican la frontera del soporte de la función de peso, w .

En la Figura 2.1 se representan la función de distribución del tiempo observable, H , y la función de probabilidad condicional de no censura, p , correspondientes a los modelos $I-IV$. En dicha figura, las líneas verticales punteadas indican los extremos del soporte de la función de peso, w , cuyo valor es constante entre esos límites. Estos extremos se han elegido de modo que se verifique la condición **(W.1)**. Para favorecer la comparación, la probabilidad de censura en los cuatro modelos es semejante (entre 0.32 y 0.34).

En todo el estudio de simulación se ha empleado un núcleo tripeso, definido por

$$K(x) = \frac{35}{32} (1 - x^2)^3 \mathbf{1}(|x| < 1).$$

Si Λ_n denota un estimador de la función de riesgo acumulativa, se define el error cuadrático integrado medio ponderado como

$$MISE_w(\Lambda_n) = E \left[\int (\Lambda_n(t) - \Lambda(t))^2 w(t) dt \right].$$

Mediante simulación de Montecarlo se ha aproximado el valor del cociente

$$\frac{MISE_w(\Lambda_n^P)}{MISE_w(\Lambda_n^{NA})}$$

en una rejilla de ventanas. Para cada uno de los modelos se han simulado 500 muestras de tamaños $n = 30, 200$ y 500 . En las Figuras 2.2-2.5 se representa el cociente $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ como función del parámetro de suavizado para los cuatro modelos estudiados. Valores del cociente por debajo de 1 indican que el estimador de Nelson-Aalen presuavizado es mejor que el estimador de Nelson-Aalen ordinario para las ventanas correspondientes.

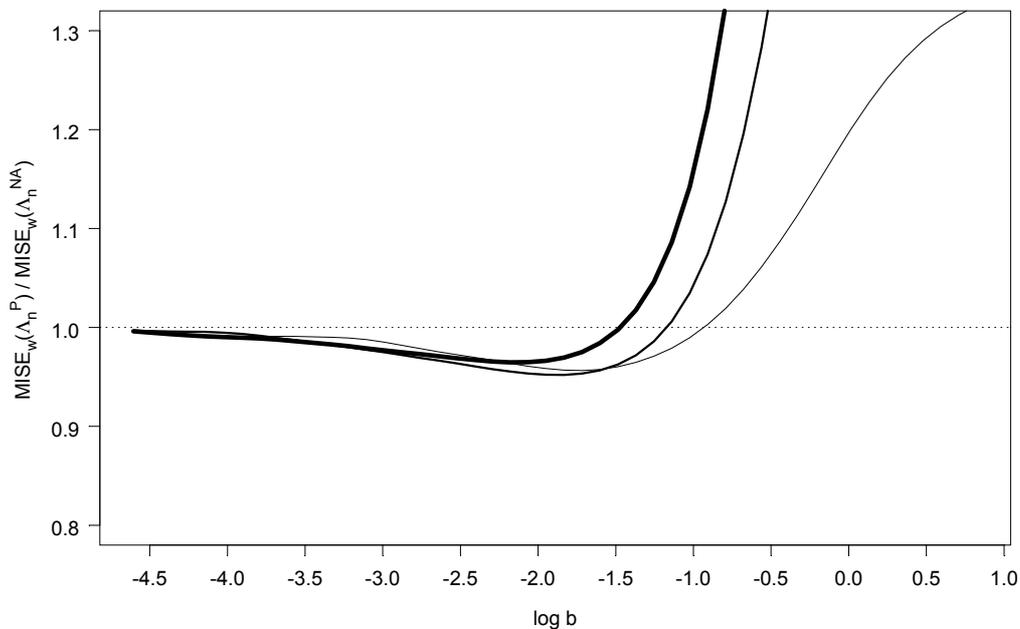


Figura 2.2. $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ para el modelo I con $n = 30$ (línea fina), $n = 200$ (línea media) y $n = 500$ (línea gruesa).

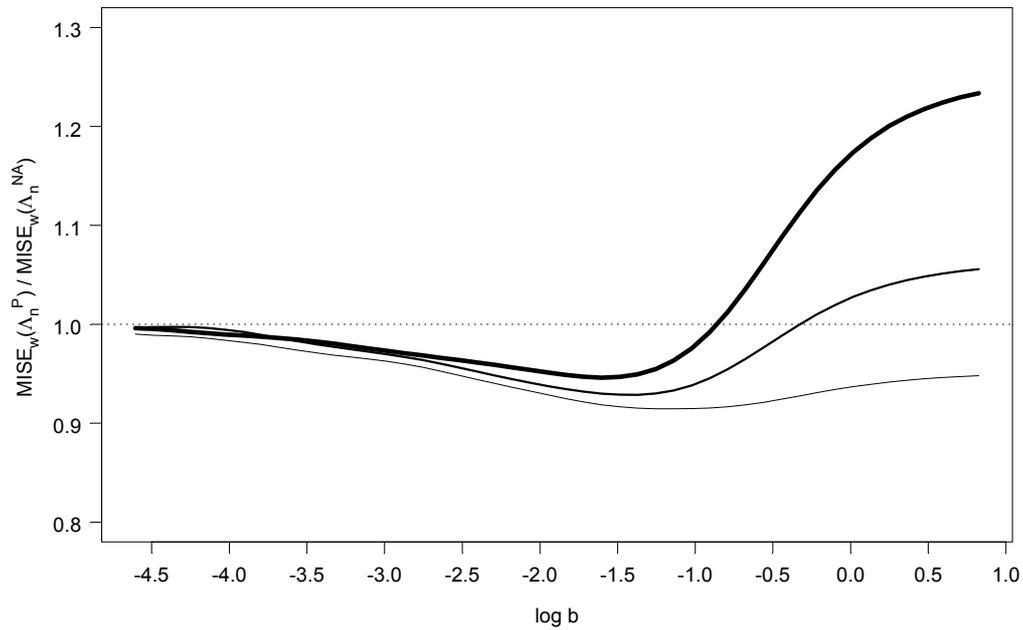


Figura 2.3. $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ para el modelo *II* con $n = 30$ (línea fina), $n = 200$ (línea media) y $n = 500$ (línea gruesa).

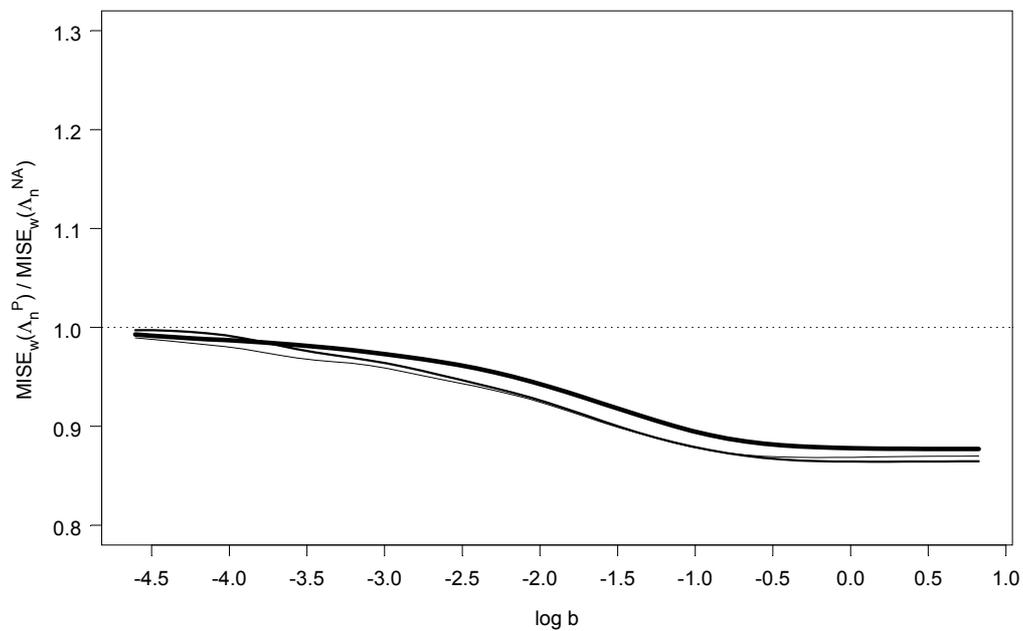


Figura 2.4. $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ para el modelo *III* con $n = 30$ (línea fina), $n = 200$ (línea media) y $n = 500$ (línea gruesa).

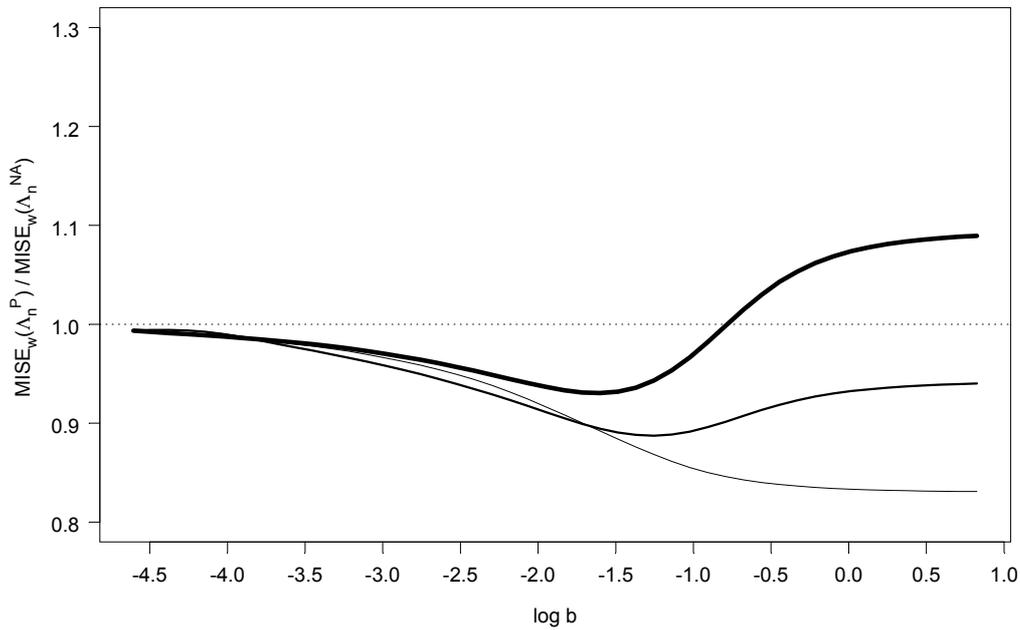


Figura 2.5. $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ para el modelo *IV* con $n = 30$ (línea fina), $n = 200$ (línea media) y $n = 500$ (línea gruesa).

Las Figuras 2.2-2.5 muestran que hay rangos bastante amplios de valores de la ventana para los que el nuevo estimador mejora al estimador de Nelson-Aalen clásico. En la Tabla 2.2 se muestran, clasificados según modelo y tamaño muestral, los valores del mínimo del cociente $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$, que varían de 0.8 a 0.95. Típicamente, su valor se aproxima a 1 a medida que el tamaño muestral aumenta.

Tabla 2.2. Mínimo del cociente de $MISE_w$ del estimador de Nelson-Aalen presuavizado y el estimador de Nelson-Aalen clásico.

Modelo	$n = 30$	$n = 200$	$n = 500$
<i>I</i>	0.956	0.952	0.965
<i>II</i>	0.915	0.929	0.946
<i>III</i>	0.869	0.864	0.877
<i>IV</i>	0.831	0.887	0.930

El caso del modelo *III* es en cierto modo especial, en el sentido de que para él el cociente es inferior a 1 virtualmente para cualquier ventana. Como se puede observar en la Figura 2.1, la función p correspondiente a este modelo es casi constante en el intervalo $[0.6, 1.2]$, en que caen casi todos los datos observados, de modo que se verifica aproximadamente el modelo de Koziol-Green. Ello significa que el estimador ACL de Λ (Abdushukurov (1987), Cheng y Lin (1987)), al que tiende el estimador de Nelson-Aalen presuavizado cuando el parámetro de suavización se hace infinitamente grande, es más eficiente que el estimador de Nelson-Aalen clásico.

Para investigar el comportamiento práctico de la ventana ‘plug-in’ propuesta en la sección 2.2 se calculó el selector de ventana, \hat{b} , para 500 muestras de tamaños $n = 30, 200$ y 500 simuladas de los modelos *I-IV*. La implementación práctica de la ventana ‘plug-in’ requiere seleccionar previamente las ventanas piloto g_1 y g_2 . Para ello, se emplearon las ecuaciones (2.166) y (2.241), estimándose las funciones poblacionales H , p y sus derivadas en (2.154), (2.155), (2.237) y (2.238) suponiendo lognormalidad en el caso de H y mediante el ajuste de un modelo logístico para p .

En las Figuras 2.6-2.8 se representan estimaciones de la densidad de \hat{b} obtenidas con el estimador de Parzen-Rosenblatt con selector de ventana de Sheather-Jones junto a las ventanas $AMISE_w$ óptimas, b_{OPT} , para tamaños muestrales $n = 30, 200$ y 500 . Aunque para los modelos *I* y *III* \hat{b} presenta un evidente sesgo con tamaños muestrales moderadamente elevados, es un selector razonable para b_{OPT} . Los resultados de la simulación para $n = 500$ indican que para el modelo *I* el selector ‘plug-in’ se encuentra a menos de 26% de desviación de la ventana óptima el 90% de las veces. Para el modelo *III* una afirmación similar sólo es válida si se considera un 100% de desviación. En realidad, esto no es sorprendente, ya que incluso una gran fluctuación de la ventana en torno a su valor óptimo se traduce en una pequeña pérdida en términos de $MISE_w$ (véase la forma plana de las funciones de la Figura 2.4 alrededor de su mínimo).

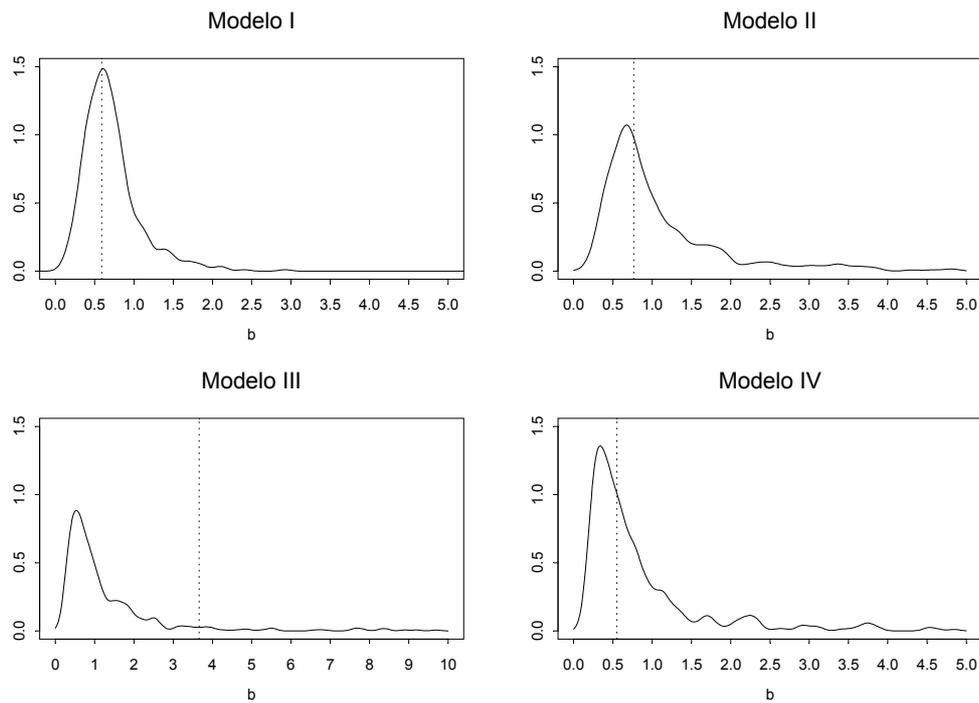


Figura 2.6. Estimación tipo núcleo de la densidad del selector de ventana ‘plug-in’ \hat{b} (línea continua) y ventana b_{OPT} (línea vertical punteada) para los modelos *I-IV* y $n = 30$.

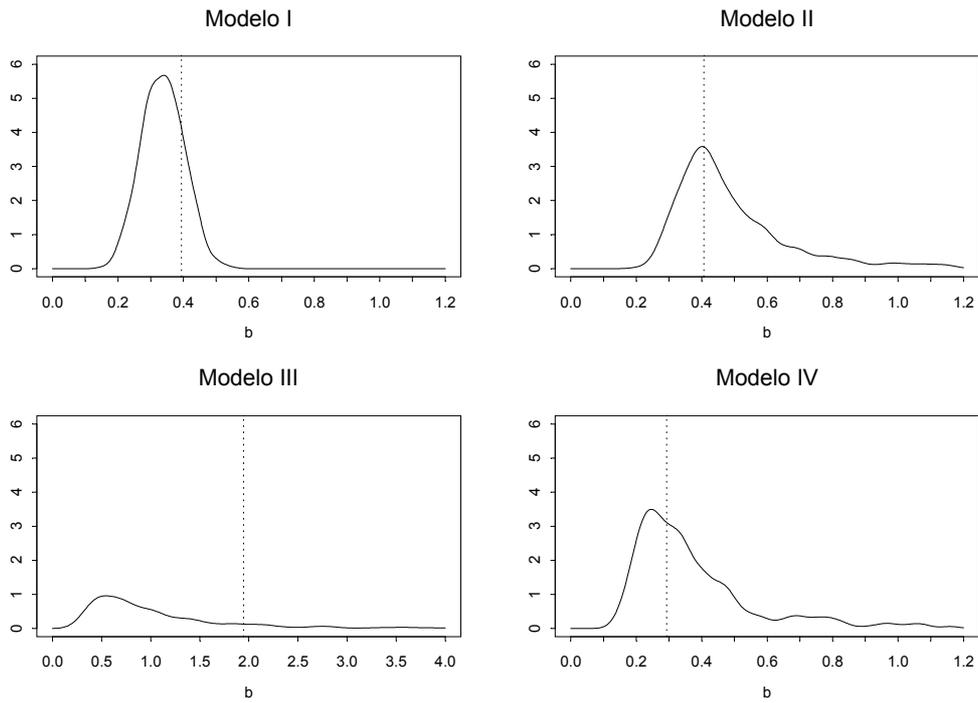


Figura 2.7. Estimación tipo núcleo de la densidad del selector de ventana ‘plug-in’ \hat{b} (línea continua) y ventana b_{OPT} (línea vertical punteada) para los modelos I-IV y $n = 200$.

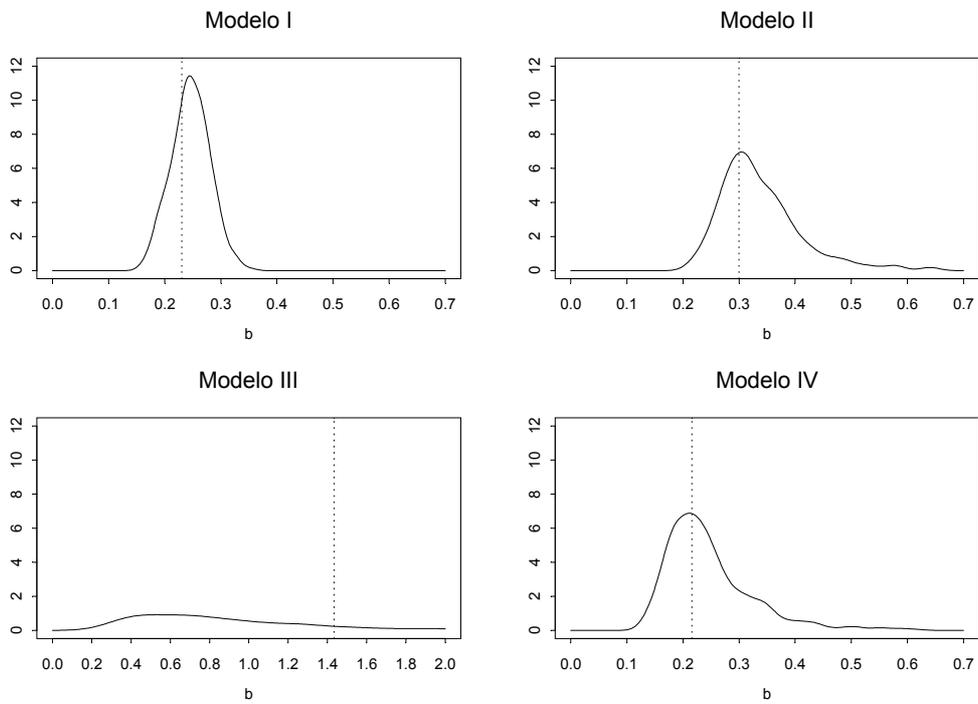


Figura 2.8. Estimación tipo núcleo de la densidad del selector de ventana ‘plug-in’ \hat{b} (línea continua) y ventana b_{OPT} (línea vertical punteada) para los modelos I-IV y $n = 500$.

Se han realizado estudios empíricos similares a los efectuados más arriba para el estimador de Nelson-Aalen presuavizado, pero empleando la ventana ‘plug-in’ en lugar de considerar un rango de valores de la ventana. Denotando por $\Lambda_{n,\hat{b}}^P$ el estimador presuavizado de Nelson-Aalen con ventana ‘plug-in’ calculada a partir de los datos, se ha aproximado el cociente

$$\frac{MISE_w(\Lambda_{n,\hat{b}}^P)}{MISE_w(\Lambda_n^{NA})}$$

mediante simulación de Montecarlo basada en 500 muestras de los modelos *I-IV* y con tamaños muestrales $n = 30, 200, \text{ y } 500$. Los resultados se reúnen en la Tabla 2.3. En ella puede comprobarse que para los modelos *II, III* y *IV* el estimador de Nelson-Aalen presuavizado con ventana ‘plug-in’ automática es aproximadamente de 5% a 12% más eficiente (en términos de $MISE_w$) que el estimador de Nelson-Aalen clásico. Los resultados para el modelo *I* son peores, posiblemente a causa del efecto de sobresuavización de la ventana ‘plug-in’ (ver Figuras 2.2. y 2.6-2.8).

Tabla 2.3. Cociente de $MISE_w$ del estimador de Nelson-Aalen presuavizado con ventana ‘plug-in’ y $MISE_w$ del estimador de Nelson-Aalen clásico.

Modelo	$n = 30$	$n = 200$	$n = 500$
<i>I</i>	1.086	1.032	1.015
<i>II</i>	0.931	0.951	0.967
<i>III</i>	0.877	0.871	0.887
<i>IV</i>	0.854	0.906	0.948

Se ha considerado además otro método de selección de la ventana basado en el ‘bootstrap’. Se ha empleado el plan de remuestreo siguiente:

1. Generar remuestras ‘bootstrap’ de tamaño n , $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$, de H_n , la función de distribución empírica de los tiempos observados.
2. Generar remuestras ‘bootstrap’ de tamaño n , $\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_n^*$, siendo la distribución de δ_i^* condicionada a $T_i^* = T_j$, Bernoulli de parámetro $\hat{p}_{b_A}(T_j)$, donde \hat{p}_{b_A} denota el estimador de Nadaraya-Watson de ventana b_A .

La versión ‘bootstrap’ del estimador $\Lambda_n^P(t)$ es

$$\Lambda_n^{P,*}(t) = \sum_{i:T_{(i)}^* \leq t} \frac{\hat{p}(T_{(i)}^*)}{n - i + 1}$$

y la del $MISE_w(\Lambda_n^P)$

$$MISE_w^*(\Lambda_n^{P,*}) = E^* \left[\int (\Lambda_n^{P,*}(t) - \Lambda_n^P(t))^2 w(t) dt \right]. \tag{2.248}$$

En la práctica se halla una aproximación de Montecarlo del valor de (2.248), en este estudio calculando el promedio de $ISE_w^*(\Lambda_n^{P,*}) = \int (\Lambda_n^{P,*}(t) - \Lambda_n^P(t))^2 w(t) dt$ para 1000 remuestras. El selector de ventana ‘bootstrap’, \hat{b}^* , se define como el minimizador de dicha aproximación, considerada como función de la ventana b . Como algoritmo de minimización se ha empleado el método de Brent, precedido por un procedimiento para encuadrar el mínimo (Press, Teukolsky, Vetterling y Flannery (1992)).

Nótese que además de la ventana piloto b_A se requiere una segunda ventana piloto, b_B , para calcular $\Lambda_n^P(t)$. Una elección razonable para b_B consiste en sustituir en la expresión (2.17) de la ventana óptima b_{OPT} que minimiza $AMISE_w(\overline{\Lambda_n^P})$, las cantidades poblacionales por estimaciones obtenidas suponiendo un modelo paramétrico lognormal para H y realizando una regresión logística para p . En cuanto a b_A , se ha optado de modo heurístico por tomarla con el valor de la ventana piloto de orden dominante del selector ‘plug-in’, $g_{1,AMSE}$.

Para ilustrar el comportamiento del selector de ventana ‘bootstrap’ y asimismo compararlo con el de tipo ‘plug-in’, se ha calculado el selector de ventana \hat{b}^* para 500 muestras de tamaño $n = 200$ simuladas de los modelos *I-IV*.

Se observa en ocasiones que en un ensayo de Montecarlo la aproximación del $MISE_w^*(\Lambda_n^{P,*})$ obtenida no tiene mínimo local. En realidad, por razones relacionadas con el algoritmo numérico empleado, lo más que podrá afirmarse es que incluso si dicho mínimo existiera no se alcanza en valores de la ventana inferiores a cierto valor prefijado, que aquí se ha elegido igual a 100. La frecuencia con que ocurre esta circunstancia varía según el modelo considerado: el 0%, 1.8%, 40% y 34% para los modelos *I, II, III* y *IV*, respectivamente.

Las Figuras 2.9-2.12 muestran diagramas de caja de la distribución estimada del logaritmo natural de los selectores de ventana ‘bootstrap’ y ‘plug-in’, truncada para valores mayores que $\log 100$. La razón para considerar la transformación logarítmica ha sido favorecer la interpretabilidad de los gráficos, tenida en cuenta la fuerte asimetría positiva de las distribuciones de los datos sin transformar (ver Figura 2.7). En dichos gráficos se muestran además los logaritmos de la ventana asintóticamente óptima, b_{OPT} , y de la aproximación de la ventana que minimiza el $MISE_w(\Lambda_n^P)$, obtenida a partir de los resultados de las simulaciones con que se construyeron las Figuras 2.2-2.5.

Las Figuras 2.9-2.12 identifican en principio al modelo *I* como aquél en que se observa la mayor diferencia entre las distribuciones de los selectores de ventana ‘bootstrap’ y ‘plug-in’. Aunque las dispersiones son similares, la mediana del selector ‘bootstrap’ está sensiblemente más próxima a la ventana $MISE_w(\Lambda_n^P)$ -óptima que la mediana del selector ‘plug-in’. Es igualmente en este modelo donde son mayores las diferencias entre las ventanas $MISE_w(\Lambda_n^P)$ -óptima y b_{OPT} —que, como era previsible, es mejor estimada por el selector ‘plug-in’—. Las diferencias entre selectores para los modelos restantes parecen menos importantes según las mismas Figuras 2.9-2.12, si bien no debe olvidarse que sólo se comparan las distribuciones truncadas. Teniendo en cuenta el elevado porcentaje de ventanas descartadas para los modelos *III* y *IV* (40% y 34%, respectivamente), la impresión ofrecida por los gráficos sería bastante diferente si se consideraran las distribuciones originales: un desplazamiento más o menos importante hacia arriba de la caja acompañado de un gran aumento de su amplitud.

No obstante lo anterior, las implicaciones prácticas de esas ‘anomalías’ son menores, como sugiere la representación de $MISE_w(\Lambda_n^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$ considerado como función de la ventana para los modelos *III* y *IV* (ver Figuras 2.4 y 2.5). Para comprobarlo, se han empleado las simulaciones de Montecarlo basadas en 500 muestras de tamaño $n = 200$ de los modelos *I-IV* para aproximar el cociente $MISE_w(\Lambda_{n,\hat{b}^*}^P)/MISE_w(\Lambda_n^{NA})$, donde por Λ_{n,\hat{b}^*}^P se denota el estimador presuavizado de Nelson-Aalen con ventana ‘bootstrap’ calculada a partir de los datos. Los resultados se muestran en la Tabla 2.4, que debe compararse con la Tabla 2.3, análoga para la ventana ‘plug-in’. Puede constatar en la Tabla 2.4 cómo el valor del cociente para los modelos *III* y *IV* es muy semejante al que se obtuvo para el selector ‘plug-in’. La misma tabla refrenda el mejor comportamiento del selector de ventana ‘bootstrap’ frente al ‘plug-in’ para el modelo *I*.

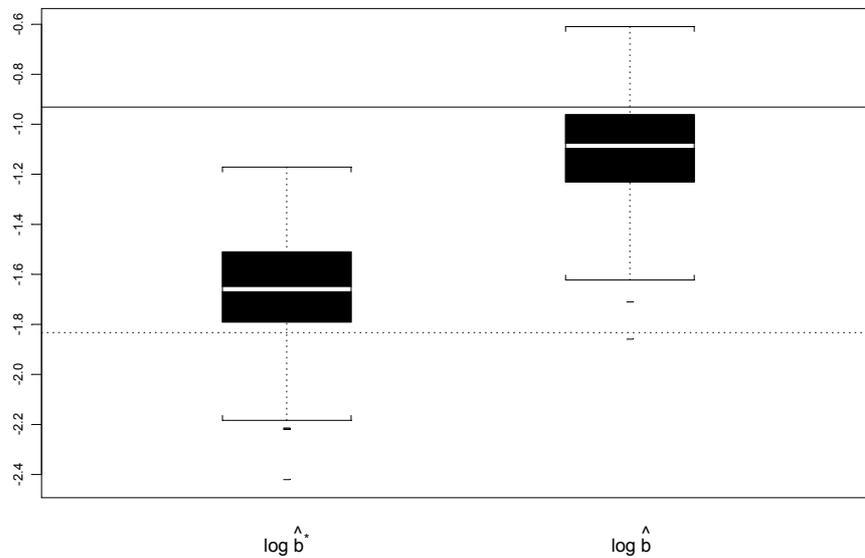


Figura 2.9. Diagrama de caja del logaritmo de las ventanas ‘bootstrap’ (\hat{b}^*) y ‘plug-in’ (\hat{b}) para el modelo *I*. Las líneas horizontales señalan el valor de los logaritmos de b_{OPT} (línea continua) y del verdadero óptimo (línea punteada).

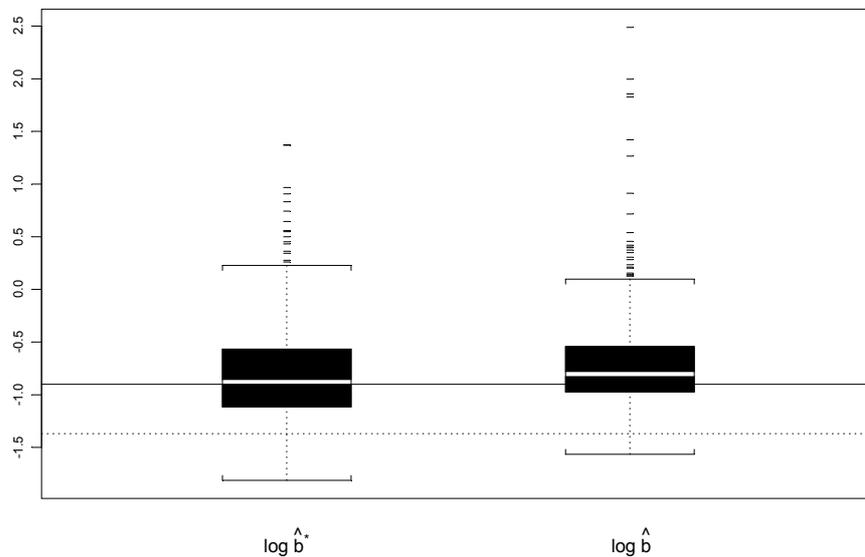


Figura 2.10. Diagrama de caja del logaritmo de las ventanas ‘bootstrap’ (\hat{b}^*) y ‘plug-in’ (\hat{b}) para el modelo *II*. Las líneas horizontales señalan el valor de los logaritmos de b_{OPT} (línea continua) y del verdadero óptimo (línea punteada).

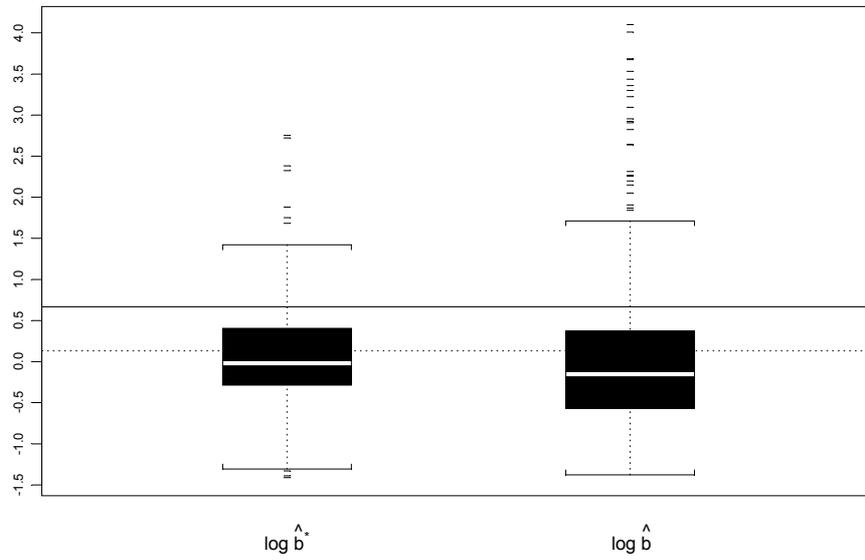


Figura 2.11. Diagrama de caja del logaritmo de las ventanas ‘bootstrap’ (\hat{b}^*) y ‘plug-in’ (\hat{b}) para el modelo *III*. Las líneas horizontales señalan el valor de los logaritmos de b_{OPT} (línea continua) y del verdadero óptimo (línea punteada).

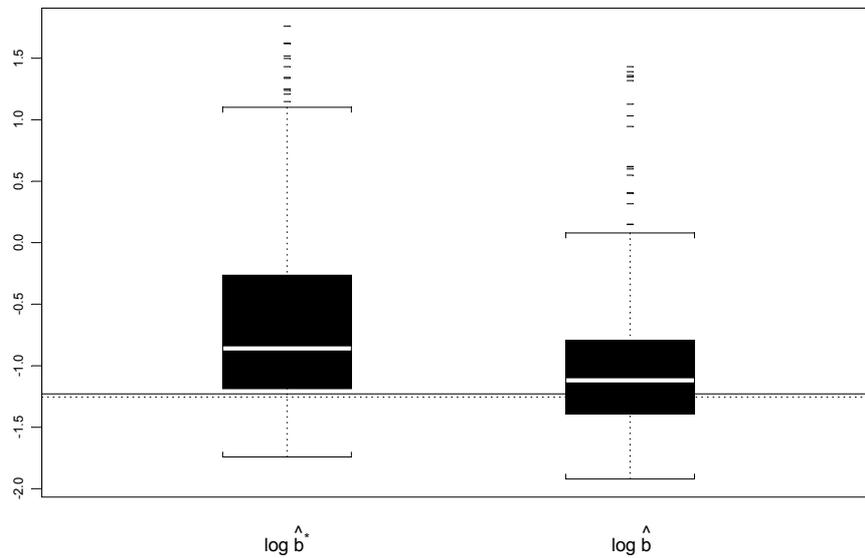


Figura 2.12. Diagrama de caja del logaritmo de las ventanas ‘bootstrap’ (\hat{b}^*) y ‘plug-in’ (\hat{b}) para el modelo *IV*. Las líneas horizontales señalan el valor de los logaritmos de b_{OPT} (línea continua) y del verdadero óptimo (línea punteada).

Tabla 2.4. Cociente de $MISE_w$ del estimador de Nelson-Aalen presuavizado con ventana ‘bootstrap’ y $MISE_w$ del estimador de Nelson-Aalen clásico.

Modelo	$n = 200$
<i>I</i>	0.968
<i>II</i>	0.953
<i>III</i>	0.862
<i>IV</i>	0.911

Capítulo 3

Nuevos estimadores de la función de riesgo

The storm is up, and all is on the hazard.

W. SHAKESPEARE, Julio César, Acto V, Escena I.

Se proponen en este capítulo dos nuevas clases de estimadores de la función de riesgo, cuyas definiciones se dan en la sección 3.1. En la sección 3.2 se obtienen representaciones asintóticas para casos particulares de estimadores de cada clase, que se emplearán en la sección 3.3 para demostrar la normalidad asintótica de los estimadores correspondientes. El capítulo concluye con la sección 3.4, donde se exponen los resultados de un estudio de simulación que pretende ilustrar el comportamiento de los estimadores en la práctica.

3.1 Definición de los estimadores

3.1.1 Estimadores de tipo producto

De la expresión (2.4) del capítulo 2,

$$\Lambda_F(t) = \int_0^t \frac{p(x)}{1 - H(x)} dH(x),$$

se deduce inmediatamente la relación

$$\lambda_F(t) = \lambda_H(t)p(t) \tag{3.1}$$

entre el valor en un punto t de la función de riesgo de la variable de interés, $\lambda_F(t)$, la función de riesgo de la variable observable, $\lambda_H(t)$, y la probabilidad condicional de no censura, $p(t)$. Esta relación es especialmente conveniente desde el punto de vista de la estimación de $\lambda_F(t)$, ya que a la derecha del signo de igualdad sólo aparecen características poblacionales de las variables observables, que por tanto pueden ser estimadas mediante estimadores para datos no censurados.

De este modo, la relación (3.1) sugiere considerar una nueva clase de estimadores de $\lambda_F(t)$, obtenidos multiplicando cualquier estimador de $\lambda_H(t)$ por cualquier estimador de $p(t)$, esto es, la clase

$$\left\{ \widehat{\lambda}_F(t) : \widehat{\lambda}_F(t) = \widehat{\lambda}_H(t)\widehat{p}(t), \text{ con } \widehat{\lambda}_H(t) \text{ y } \widehat{p}(t) \text{ estimadores de } \lambda_H(t) \text{ y } p(t), \text{ respectivamente} \right\}.$$

No obstante, parece lógico restringir la amplitud de la clase así definida exigiendo que los estimadores de $\lambda_H(t)$ y $p(t)$ empleados se basen en una metodología común. En esta memoria el estudio se limita al caso de estimadores no paramétricos $\widehat{\lambda}_H(t)$ y $\widehat{p}(t)$ de tipo núcleo. Concretamente, se consideran como estimadores de $\lambda_H(t)$ los estimadores de Watson-Leadbetter

$$\widehat{\lambda}_{WL}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}$$

y de Rice-Rosenblatt

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H_n(t) + \frac{1}{n}},$$

que ya fueron definidos en (1.11) y (1.12), respectivamente.

En cuanto a la estimación de $p(t)$, se emplearán los estimadores de la función de regresión de Nadaraya-Watson

$$\widehat{p}_{NW}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) \delta_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i)}$$

y local lineal

$$\widehat{p}_{LL}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) (s_{n,2}(t) - (t - T_i)s_{n,1}(t)) \delta_i}{\sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) (s_{n,2}(t) - (t - T_i)s_{n,1}(t))}$$

donde, para $j = 1, 2$, las funciones $s_{n,j}$ están definidas por

$$s_{n,j}(t) = \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) (t - T_i)^j. \tag{3.2}$$

Cruzando entre sí estos dos pares de estimadores, se obtienen cuatro diferentes estimadores de $\lambda_F(t)$, según se detalla en la Tabla 3.1, donde además se hace explícita la notación con la que en adelante se denotarán.

Tabla 3.1. Estimadores de la función de riesgo de tipo producto.

estimador de $\lambda_H(t)$	estimador de $p(t)$	estimador de $\lambda_F(t)$
$\widehat{\lambda}_{WL}(t)$	$\widehat{p}_{NW}(t)$	$\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) = \widehat{\lambda}_{WL}(t)\widehat{p}_{NW}(t)$
$\widehat{\lambda}_{WL}(t)$	$\widehat{p}_{LL}(t)$	$\widehat{\lambda}_{WLLL}(t) = \widehat{\lambda}_{WL}(t)\widehat{p}_{LL}(t)$
$\widehat{\lambda}_{RR}(t)$	$\widehat{p}_{NW}(t)$	$\widehat{\lambda}_{RRNW}(t) = \widehat{\lambda}_{RR}(t)\widehat{p}_{NW}(t)$
$\widehat{\lambda}_{RR}(t)$	$\widehat{p}_{LL}(t)$	$\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) = \widehat{\lambda}_{RR}(t)\widehat{p}_{LL}(t)$

Obsérvese que, cualquiera que sea el estimador de $\lambda_F(t)$ considerado, hay dos parámetros de suavización distintos, b_1 y b_2 , cada uno de ellos aportado por el factor correspondiente de los dos que entran en la formulación del estimador.

Nótese igualmente que los estimadores $\widehat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\widehat{\lambda}_{RRLL}(t)$ estiman la función $\lambda_F(t)$ como una función discontinua, algo que no ocurre con los estimadores $\widehat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\widehat{\lambda}_{WLLL}(t)$ si el núcleo es una función continua.

El estimador $\widehat{\lambda}_{RRNW}(t)$ representa en realidad una generalización del estimador de Blum-Susarla, $\widehat{\lambda}_{BS}(t)$ (definido en (1.7)), que se recupera a partir de aquél cuando se aplica la restricción de que b_1 y b_2 sean iguales.

3.1.2 Estimadores de Tanner-Wong presuavizados

Se define a continuación una nueva clase de estimadores para la función de riesgo del tiempo de vida. Para motivar dichos estimadores y relacionarlos con lo expuesto en el capítulo 2, nótese que el estimador de la función de riesgo de Tanner-Wong, $\widehat{\lambda}_{TW}(t)$ definido en (1.6), puede ser interpretado como resultado de la convolución del núcleo reescalado con el estimador de Nelson-Aalen de la función de riesgo acumulativa. En efecto, como

$$\widehat{\lambda}_{TW}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i}{n - R_i + 1}$$

y

$$\Lambda_n^{NA}(t) = \sum_{i: T_i \leq t}^n \frac{\delta_i}{n - R_i + 1},$$

se tiene

$$\widehat{\lambda}_{TW}(t) = \int K_{b_1}(t - x) d\Lambda_n^{NA}(x) = K_{b_1} * \Lambda_n^{NA}(t).$$

Si la convolución se hace con el estimador de Nelson-Aalen presuavizado, Λ_n^P , en lugar de con el estimador de Nelson-Aalen, se tiene

$$K_{b_1} * \Lambda_n^P(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \widehat{p}(T_i)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}},$$

obteniéndose así una clase de estimadores que pueden denominarse *estimadores de Tanner-Wong presuavizados*. Un caso particular de esta clase de estimadores —el único que se estudia en esta memoria— corresponde al que resulta de estimar $p(\cdot)$ mediante el estimador de Nadaraya-Watson, $\widehat{p}_{NW}(\cdot)$, con ventana b_2 (a fin de distinguirla de la ventana b_1). No obstante, puesto que los resultados sobre la convergencia uniforme de $\widehat{p}_{NW}(\cdot)$ de que se hará uso más adelante requieren que la densidad h esté acotada inferiormente por un número estrictamente positivo en un intervalo compacto, se considerará un estimador ligeramente modificado.

Sean c_1 y c_2 dos constantes tales que $0 < c_1 < t < c_2$ e I el intervalo (c_1, c_2) . Las constantes c_1 y c_2 se eligen de modo que definan un intervalo en que la densidad h esté acotada inferiormente por un número estrictamente positivo y sea $H(c_2) < 1$. Se define el estimador $\widetilde{p}(\cdot)$ de $p(\cdot)$ como

$$\widetilde{p}(u) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u \notin I \text{ y } u < T_{(1)} \\ \delta_{[i]} & , \text{ si } u \notin I \text{ y } u \in [T_{(i)}, T_{(i+1)}) \\ \delta_{[n]} & , \text{ si } u \notin I \text{ y } u \geq T_{(n)} \\ \widehat{p}_{NW}(u) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(u - T_i) \delta_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(u - T_i)} & , \text{ si } u \in I \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\delta_{[i]}$ denota la variable indicadora de no censura concomitante de $T_{(i)}$.

En lo sucesivo, cuando se aluda al estimador de Tanner-Wong presuavizado se hará referencia al estimador $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ definido por

$$\tilde{\lambda}_{TWP}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \tilde{p}(T_i)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}. \quad (3.4)$$

Obsérvese que en relación con este estimador la definición (3.3) de $\tilde{p}(\cdot)$ se reduce a

$$\tilde{p}(T_i) = \begin{cases} \delta_i & , \text{ si } T_i \notin I \\ \hat{p}_{NW}(T_i) & , \text{ si } T_i \in I \end{cases},$$

lo que permite escribir el estimador definido en (3.4) del siguiente modo, que se revelará más conveniente para su estudio,

$$\tilde{\lambda}_{TWP}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \hat{p}_{NW}(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i \mathbf{1}(T_i \notin I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}. \quad (3.5)$$

Como en el caso de los estimadores definidos en la subsección 3.1.1, el estimador $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ depende de dos parámetros de suavización distintos, b_1 y b_2 . En el límite, cuando b_2 tiende a 0, se recupera el estimador de Tanner-Wong, $\hat{\lambda}_{TW}(t)$.

Evidentemente, la misma idea que se ha aplicado al estimador de Tanner-Wong puede extenderse a otros estimadores de la función de riesgo para datos censurados, como por ejemplo el de Blum-Susarla, $\hat{\lambda}_{BS}(t)$, reemplazando el indicador de no censura por un estimador de la probabilidad condicional de no censura y obteniendo así las correspondientes versiones presuavizadas. Por ejemplo, el estimador de Blum-Susarla presuavizado se define como

$$\tilde{\lambda}_{BSP}(t) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_1}(t - T_i) \tilde{p}(T_i)}{1 - H_n(t) + \frac{1}{n}}.$$

Aunque el estudio de $\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$ es similar al de $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, en lo sucesivo no se profundizará en sus propiedades teóricas.

3.2 Representaciones asintóticas

En el resto del capítulo será necesario suponer las siguientes condiciones:

sobre la función núcleo, K ,

(K.1) K es una función no negativa, simétrica, continua, con soporte en el intervalo $[-L, L]$, $L > 0$ y tal que $\int_{-L}^L K(x) dx = 1$.

sobre la probabilidad condicional de no censura, p ,

(P.1) p es tres veces derivable en $[0, \infty)$, con tercera derivada acotada.

sobre la función de distribución, H ,

(H.1) Existe $t_0 > 0$ tal que $H(t_0) < 1$ y H es cuatro veces derivable en $[0, t_0]$, con cuarta derivada acotada. Además, existen $\delta > 0$ y $\varepsilon, 0 < \varepsilon < t_0$, tales que $H'(t) = h(t) > \delta, \forall t \in [\varepsilon, t_0]$.

sobre las ventanas $b_1 = b_1(n)$ y $b_2 = b_2(n)$,

(V.1) $b_1 \rightarrow 0, nb_1^4 \rightarrow \infty$ y $nb_1^5 = O(1)$, cuando $n \rightarrow \infty$.

(V.2) Las sucesiones de ventanas b_1 y b_2 tienen el mismo orden asintótico, es decir,

$$\frac{b_1}{b_2} = a + o(1), \quad \text{para cierto } a \in (0, \infty).$$

Se supone en lo sucesivo que t es un punto del intervalo (ε, t_0) .

Los seis lemas siguientes se necesitan como paso previo a la obtención de sendas representaciones asintóticas de los estimadores $\widehat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRLL}(t)$ y $\widetilde{\lambda}_{TWP}(t)$.

Lema 3.2.1 *Bajo las condiciones (K.1), (H.1) y (V.1) se tiene que*

$$\widehat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t) = A_n + o_P\left(n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right) \quad (3.6)$$

donde se ha definido

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} - \lambda_H(t). \quad (3.7)$$

Además,

$$E[A_n] = \frac{1}{2}b_1^2\mu_K\lambda_H''(t) + o(b_1^2) \quad (3.8)$$

y

$$Var[A_n] = \frac{c_K}{nb_1} \frac{\lambda_H(t)}{1 - H(t)} + o(n^{-1}b_1^{-1}). \quad (3.9)$$

Demostración. Considérese la siguiente linealización de $\widehat{\lambda}_{WL}(t)$,

$$\widehat{\lambda}_{WL}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)(H_n(T_i) - H(T_i))}{(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n})(1 - H(T_i) + \frac{1}{n})}. \quad (3.10)$$

Como, con probabilidad 1,

$$\begin{aligned} 1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n} &= 1 - H(T_i) + \frac{1}{n} - (H_n(T_i) - H(T_i)) \geq 1 - H(T_i) + \frac{1}{n} - |H_n(T_i) - H(T_i)| \\ &\geq 1 - H(T_i) + \frac{1}{n} - \|H_n - H\|_\infty \end{aligned}$$

y

$$\|H_n - H\|_\infty = O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right) \quad c.s.,$$

se tiene que, a partir de cierto n ,

$$1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) \quad c.s.$$

Además, es sabido que

$$\|H_n - H\|_\infty = O_P\left(n^{-1/2}\right). \quad (3.11)$$

Por tanto, para el segundo sumando de (3.10) se verifica

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)(H_n(T_i) - H(T_i))}{\left(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}\right)\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)} \right| \leq \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^2} \right) O_P(n^{-1/2}). \quad (3.12)$$

A continuación se estudia la esperanza y la varianza de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l}$, siendo $l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] &= E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] = \int_0^\infty \frac{K_{b_1}(t - x)h(x)}{\left(1 - H(x) + \frac{1}{n}\right)^l} dx \\ &= \int_{-L}^{\frac{t}{b_1}} \frac{K(x_1)h(t - b_1x_1)}{\left(1 - H(t - b_1x_1) + \frac{1}{n}\right)^l} dx_1 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-x}{b_1} = x_1$. A partir de cierto n , se tiene $b_1 < \frac{t}{L}$, de modo que

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] = \int_{-L}^L \frac{K(x_1)h(t - b_1x_1)}{\left(1 - H(t - b_1x_1) + \frac{1}{n}\right)^l} dx_1.$$

Teniendo en cuenta que para todo u tal que $H(u) < 1$

$$\frac{1}{\left(1 - H(u) + \frac{1}{n}\right)^l} = \frac{1}{\left(1 - H(u)\right)^l} - \frac{\left(1 - H(u) + \frac{1}{n}\right)^l - \left(1 - H(u)\right)^l}{\left(1 - H(u)\right)^l \left(1 - H(u) + \frac{1}{n}\right)^l} = \frac{1}{\left(1 - H(u)\right)^l} + O(n^{-1}), \quad (3.13)$$

como se puede comprobar mediante un desarrollo de Taylor de $f(x_0 + x) = (x_0 + x)^l$ en x_0 , donde $x_0 = 1 - H(u)$, y definiendo para $l \in \mathbb{N}$

$$\varphi_l(x) = \frac{h(x)}{\left(1 - H(x)\right)^l}, \quad (3.14)$$

se tiene que, para $b_1 < \frac{t \wedge (t_0 - t)}{L}$,

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] = \int_{-L}^L K(x_1) \varphi_l(t - b_1x_1) dx_1 + O(n^{-1}).$$

Mediante un desarrollo de Taylor de $\varphi_l(t - b_1x_1)$ en t es inmediato obtener

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] = \varphi_l(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \varphi_l''(t) + o(b_1^2) + O(n^{-1}). \quad (3.15)$$

En cuanto a la varianza,

$$\begin{aligned} &Var \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] \\ &= \frac{1}{n} Var \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right)^l} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} E \left[\left(\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^l} \right)^2 \right] - \frac{1}{n} \left(E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^l} \right] \right)^2$$

y

$$\begin{aligned} E \left[\left(\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^l} \right)^2 \right] &= \int_0^\infty \frac{K_{b_1}(t - x)^2 h(x)}{(1 - H(x) + \frac{1}{n})^{2l}} dx \\ &= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L \frac{K(x_1)^2 h(t - b_1 x_1)}{(1 - H(t - b_1 x_1) + \frac{1}{n})^{2l}} dx_1 \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-x}{b_1} = x_1$ y nuevamente se ha considerado $b_1 < \frac{t}{L}$. Empleando (3.13), la definición de φ_l y un desarrollo de Taylor, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L \frac{K(x_1)^2 h(t - b_1 x_1)}{(1 - H(t - b_1 x_1) + \frac{1}{n})^{2l}} dx_1 &= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L K(x_1)^2 \varphi_{2l}(t - b_1 x_1) dx_1 + O(n^{-1} b_1^{-1}) \\ &= \frac{c_K \varphi_{2l}(t)}{b_1} + O(b_1 + n^{-1} b_1^{-1}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

De (3.15) y (3.16) se concluye que

$$Var \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{(1 - H(T_i) + \frac{1}{n})^l} \right] = \frac{c_K \varphi_{2l}(t)}{n b_1} + O(n^{-1} b_1 + n^{-2} b_1^{-1}) = \frac{c_K \varphi_{2l}(t)}{n b_1} + o(n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.17)$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Tchebychev,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{(1 - H(T_i) + \frac{1}{n})^l} = O(1) + O_P(n^{-1/2} b_1^{-1/2}) = O_P(1) \quad (3.18)$$

y tomando $l = 2$ y volviendo a (3.12) y (3.10), se obtiene (3.6).

Por fin, se obtiene (3.8) y (3.9) teniendo en cuenta los resultados (3.15) y (3.17) para $l = 1$, que, por (V.1), $n b_1^2 \rightarrow \infty$ y que, según (3.14), $\varphi_1 = \lambda_H$ y $\varphi_2 = \frac{\lambda_H}{1-H}$. ■

Lema 3.2.2 *Bajo las condiciones (K.1), (H.1) y (V.1) se tiene que*

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \lambda_H(t) = B_n + o_P(n^{-1/2} b_1^{-1/2}) \quad (3.19)$$

donde se ha definido

$$B_n = \frac{\widehat{h}(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H(t). \quad (3.20)$$

Además,

$$E[B_n] = \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \frac{h''(t)}{1 - H(t)} + o(b_1^2) \quad (3.21)$$

y

$$Var[B_n] = \frac{1}{n b_1} \frac{c_K h(t)}{(1 - H(t))^2} + o(n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.22)$$

Demostración. Procediendo con $\widehat{\lambda}_{RR}(t)$ como se hizo con $\widehat{\lambda}_{WL}(t)$,

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) = \frac{\widehat{h}(t)}{1 - H(t)} \left(1 + \frac{H_n(t) - H(t) - \frac{1}{n}}{1 - H_n(t) + \frac{1}{n}} \right)$$

donde $\widehat{h}(t)$ denota el estimador de Parzen-Rosenblatt de la densidad de T ,

$$\widehat{h}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_1}(t - T_i).$$

Como es bien conocido,

$$H_n(t) - H(t) = O_P(n^{-1/2})$$

y

$$H_n(t) \xrightarrow{c.s.} H(t),$$

lo que permite establecer que

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) = \frac{\widehat{h}(t)}{1 - H(t)} \left(1 + O_P(n^{-1/2}) \right)$$

y obtener así la representación asintótica (3.19).

Los resultados (3.21) y (3.22) son consecuencia inmediata de las conocidas propiedades del estimador de Parzen-Rosenblatt. ■

Lema 3.2.3 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene que*

$$\widehat{p}_{NW}(t) - p(t) = C_n (1 + o_P(1)) \quad (3.23)$$

donde se ha definido

$$C_n = \frac{1}{nh(t)} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) (\delta_i - p(t)). \quad (3.24)$$

Además

$$E[C_n] = b_2^2 \mu_K \left(\frac{1}{2} p''(t) + \frac{h'(t)p'(t)}{h(t)} \right) + o(b_2^2) \quad (3.25)$$

y

$$Var[C_n] = \frac{1}{nb_2} \frac{c_K p(t)(1-p(t))}{h(t)} + o(n^{-1}b_2^{-1}). \quad (3.26)$$

Demostración. Definiendo $\psi(t) = p(t)h(t)$, $\widehat{\psi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) \delta_i$ y denotando por $\widehat{h}(t)$ el estimador de Parzen-Rosenblatt de $h(t)$, se tiene

$$\widehat{p}_{NW}(t) - p(t) = \frac{\widehat{\psi}(t)}{\widehat{h}(t)} - \frac{\psi(t)}{h(t)} = \frac{1}{h(t)} \left(\widehat{\psi}(t) - \psi(t) - \frac{\widehat{\psi}(t)(\widehat{h}(t) - h(t))}{\widehat{h}(t)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\widehat{\psi}(t) - \widehat{h}(t)p(t)}{h(t)} - \frac{\widehat{\psi}(t) - \widehat{h}(t)p(t)}{h(t)} \frac{\widehat{h}(t) - h(t)}{\widehat{h}(t)} \\
&= \frac{\widehat{\psi}(t) - \widehat{h}(t)p(t)}{h(t)} \left(1 - \frac{\widehat{h}(t) - h(t)}{\widehat{h}(t)} \right) \\
&= C_n \left(1 - \frac{\widehat{h}(t) - h(t)}{\widehat{h}(t)} \right).
\end{aligned}$$

El resultado (3.23) se deduce inmediatamente teniendo en cuenta la conocida propiedad del estimador de Parzen-Rosenblatt

$$\widehat{h}(t) - h(t) = O_P \left(b_2^2 + n^{-1/2} b_2^{-1/2} \right),$$

las condiciones (V.1), (V.2) y que $h(t) > 0$.

Respecto al resultado sobre la esperanza de C_n dado por (3.25), es sencillo comprobar mediante desarrollos de Taylor y para $b_2 < \frac{t}{L}$ que

$$\begin{aligned}
E[C_n] &= \frac{1}{h(t)} E(K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))) \\
&= \frac{1}{h(t)} \int_0^\infty K_{b_2}(t - x)(p(x) - p(t))h(x)dx \\
&= \frac{1}{h(t)} \int_{-L}^L K(x_1)(p(t - b_2x_1) - p(t))h(t - b_2x_1)dx_1 \\
&= b_2^2 \mu_K \left(\frac{1}{2} p''(t) + \frac{h'(t)p'(t)}{h(t)} \right) + o(b_2^2).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
Var[C_n] &= \frac{1}{nh^2(t)} Var(K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))) \\
&= \frac{1}{nh^2(t)} E \left((K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t)))^2 \right) - \frac{1}{nh^2(t)} E^2(K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))).
\end{aligned}$$

Ahora, mediante desarrollos de Taylor y una vez más para $b_2 < \frac{t}{L}$,

$$\begin{aligned}
E \left[(K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t)))^2 \right] &= \int_0^\infty K_{b_2}(t - x)^2 (p(x)(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(x)dx \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L K(x_1)^2 (p(t - b_2x_1)(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(t - b_2x_1)dx_1 \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L K(x_1)^2 dx_1 p(t)(1 - p(t))h(t) + o(b_2^{-1}),
\end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta también (3.25), se obtiene el resultado (3.26). ■

Se da en el lema siguiente el orden de la covarianza de A_n y C_n ,

Lema 3.2.4 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene que*

$$Cov[A_n, C_n] = o(n^{-1}). \quad (3.27)$$

Demostración. Tras algunos cálculos, se tiene

$$\begin{aligned}
Cov[A_n, C_n] &= Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} - \lambda_H(t), \frac{1}{nh(t)} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) (\delta_i - p(t)) \right] \\
&= \frac{1}{nh(t)} Cov \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}}, K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t)) \right] \\
&= \frac{1}{nh(t)} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{nh(t)} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] E [K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))]. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Respecto a la esperanza del primer sumando,

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{K_{b_1}(t - x) K_{b_2}(t - x) (p(x) - p(t)) h(x)}{1 - H(x) + \frac{1}{n}} dx \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L \frac{K(x_1) K\left(\frac{x_1 b_1}{b_2}\right) (p(t - b_1 x_1) - p(t)) h(t - b_1 x_1)}{1 - H(t - b_1 x_1) + \frac{1}{n}} dx_1
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-x}{b_1} = x_1$ y se ha considerado $b_1 < \frac{t}{L}$. Empleando (3.13) y la definición (3.14) de $\varphi_l(x)$, se tiene para $b_1 < \frac{t \wedge (t_0 - t)}{L}$,

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L K(x_1) K\left(\frac{x_1 b_1}{b_2}\right) (p(t - b_1 x_1) - p(t)) \varphi_1(t - b_1 x_1) dx_1 + O(n^{-1} b_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Mediante expansiones de Taylor de $p(t - b_1 x_1)$ y $\varphi_1(t - b_1 x_1)$ en t , es inmediato mostrar que

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
&= -\frac{b_1}{b_2} p'(t) \varphi_1(t) \int_{-L}^L K(x_1) K\left(\frac{x_1 b_1}{b_2}\right) x_1 dx_1 + o\left(\frac{b_1}{b_2}\right) + O(n^{-1} b_2^{-1}) \\
&= o\left(\frac{b_1}{b_2}\right),
\end{aligned}$$

pues, por (V.1), $nb_1 \rightarrow \infty$. Por tanto, en virtud de (V.2),

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] = o(1)$$

y empleando este resultado en (3.28), teniendo en cuenta además que $E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] = O(1)$ y $E [K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t))] = o(b_2^2)$, se obtiene (3.27). ■

Lema 3.2.5 Bajo las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(H.1)**, **(V.1)** y **(V.2)** se tiene

$$\widehat{p}_{LL}(t) - p(t) = D_n (1 + o_P(1)) \quad (3.29)$$

donde se ha definido

$$D_n = \frac{\frac{1}{n^2 b_2^2} \sum_{i=1}^n w_i(t) (\delta_i - p(t))}{\mu_K h(t)^2}, \quad (3.30)$$

$$w_i(t) = K_{b_2}(t - T_i) (s_{n,2}(t) - (t - T_i) s_{n,1}(t)) \quad (3.31)$$

y las funciones $s_{n,j}$, $j = 1, 2$, fueron definidas en (3.2).

Además,

$$E[D_n] = \frac{1}{2} b_2^2 \mu_K p''(t) + o(b_2^2) \quad (3.32)$$

y

$$\text{Var}[D_n] = \left(\frac{1}{n b_2} \frac{c_K p(t)(1-p(t))}{h(t)} \right) + o(n^{-1} b_2^{-1}). \quad (3.33)$$

Demostración. Para obtener una representación asintótica de

$$\widehat{p}_{LL}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) \delta_i}{\sum_{i=1}^n w_i(t)}$$

cuyo término dominante esté linealizado, es necesario abordar el estudio de la esperanza y la varianza del denominador. Se tiene

$$E \left[\sum_{i=1}^n w_i(t) \right] = n E[w_1(t)]$$

y, de (3.31) y (3.2),

$$\begin{aligned} w_i(t) &= K_{b_2}(t - T_i) \left(\sum_{j=1}^n K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j)^2 - (t - T_i) \sum_{j=1}^n K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) \right) \\ &= K_{b_2}(t - T_i) \sum_{j=1}^n (K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j)^2 - K_{b_2}(t - T_j) (t - T_i) (t - T_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n K_{b_2}(t - T_i) K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_i - T_j) \end{aligned} \quad (3.34)$$

y

$$E[w_1(t)] = (n-1) E[K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) (t - T_2) (T_1 - T_2)] = (n-1) M_1$$

donde se ha definido

$$M_1 = E[K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) (t - T_2) (T_1 - T_2)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)K_{b_2}(t-t_2)(t-t_2)(t_1-t_2)h(t_1)h(t_2)dt_1dt_2 \\ &= b_2^2 \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} K(t_{11})K(t_{21})t_{21}(t_{21}-t_{11})h(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{21})dt_{11}dt_{21} \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$. Para $b_2 < \frac{t}{L}$,

$$\begin{aligned} M_1 &= b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})K(t_{21})t_{21}(t_{21}-t_{11})h(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{21})dt_{11}dt_{21} \\ &= b_2^2 \mu_K h(t)^2 + O(b_2^4) \end{aligned}$$

donde a la expresión final se llega mediante desarrollos de Taylor de $h(t-b_2t_{11})$ y $h(t-b_2t_{21})$ en t . Por tanto,

$$E \left[\sum_{i=1}^n w_i(t) \right] = n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2 + O(n^2 b_2^4).$$

En cuanto a la varianza de $\sum_{i=1}^n w_i(t)$,

$$\begin{aligned} Var \left[\sum_{i=1}^n w_i(t) \right] &= Cov \left[\sum_{i=1}^n w_i(t), \sum_{i=1}^n w_i(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov [w_i(t), w_j(t)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Cov [K_{b_2}(t-T_i)K_{b_2}(t-T_j)(t-T_j)(T_i-T_j), \\ &\quad K_{b_2}(t-T_k)K_{b_2}(t-T_l)(t-T_l)(T_k-T_l)]. \end{aligned}$$

Se analizan a continuación los términos $M_{i,j,k,l}$, $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$, definidos como

$$M_{i,j,k,l} = Cov [K_{b_2}(t-T_i)K_{b_2}(t-T_j)(t-T_j)(T_i-T_j), K_{b_2}(t-T_k)K_{b_2}(t-T_l)(t-T_l)(T_k-T_l)],$$

teniendo en cuenta la cardinalidad del conjunto de índices $\{i, j, k, l\}$.

Si $\#\{i, j, k, l\} = 3$, hay tres casos, $M_{1,2,1,3}$, $M_{1,2,3,1}$ y $M_{1,2,3,2}$, en los que $M_{i,j,k,l}$ no es trivialmente nulo. Respecto al primero,

$$M_{1,2,1,3} = E [K_{b_2}(t-T_1)^2 K_{b_2}(t-T_2) K_{b_2}(t-T_3)(t-T_2)(T_1-T_2)(t-T_3)(T_1-T_3)] - M_1^2.$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 K_{b_2}(t-t_2) K_{b_2}(t-t_3)(t-t_2)(t_1-t_2)(t-t_3)(t_1-t_3) \\ &\quad \times h(t_1)h(t_2)h(t_3)dt_1dt_2dt_3 \\ &= \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 \left(\int_0^\infty K_{b_2}(t-t_2)(t-t_2)(t_1-t_2)h(t_2)dt_2 \right)^2 h(t_1)dt_1 \end{aligned}$$

$$= b_2^3 \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21}) t_{21} (t_{21} - t_{11}) h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right)^2 K(t_{11})^2 h(t - b_2 t_{11}) dt_{11}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha supuesto $b_2 < \frac{t}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $h(t - b_2 t_{11})$ y $h(t - b_2 t_{21})$ en t

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21}) t_{21} (t_{21} - t_{11}) h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right)^2 K(t_{11})^2 h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\ &= h(t)^3 c_K \mu_K^2 + o(1), \end{aligned}$$

y como $M_1 = O(b_2^2)$, se tiene

$$M_{1,2,1,3} = b_2^3 h(t)^3 c_K \mu_K^2 + o(b_2^3). \quad (3.35)$$

Pasando a $M_{1,2,3,1}$,

$$M_{1,2,3,1} = E [K_{b_2}(t - T_1)^2 K_{b_2}(t - T_2) K_{b_2}(t - T_3) (t - T_2)(T_1 - T_2)(t - T_1)(T_3 - T_1)] - M_1^2.$$

El primer sumando es ahora

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1)^2 K_{b_2}(t - t_2) K_{b_2}(t - t_3) (t - t_2)(t_1 - t_2)(t - t_1)(t_3 - t_1) \\ & \times h(t_1) h(t_2) h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1)^2 K_{b_2}(t - t_2) K_{b_2}(t - t_3) (t - t_2)(t_1 - t_2)(t - t_1)(t_3 - t_1) \\ & \times h(t_1) h(t_2) h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= b_2^3 \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21}) (t_{21} - t_{11}) t_{21} h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right) \\ & \times \left(\int_{-L}^L K(t_{31}) (t_{11} - t_{31}) h(t - b_2 t_{31}) dt_{31} \right) K(t_{11})^2 t_{11} h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, $\frac{t-t_3}{b_2} = t_{31}$ y se ha supuesto $b_2 < \frac{t}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $h(t - b_2 t_{11})$, $h(t - b_2 t_{21})$ y $h(t - b_2 t_{31})$ en t , se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21}) (t_{21} - t_{11}) t_{21} h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right) \left(\int_{-L}^L K(t_{31}) (t_{11} - t_{31}) h(t - b_2 t_{31}) dt_{31} \right) \\ & \times K(t_{11})^2 t_{11} h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\ &= h(t)^3 \mu_K \int_{-L}^L K(u)^2 u^2 du + o(1) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$M_{1,2,3,1} = b_2^3 h(t)^3 \mu_K \int_{-L}^L K(u)^2 u^2 du + o(b_2^3). \quad (3.36)$$

En cuanto a $M_{1,2,3,2}$

$$M_{1,2,3,2} = E [K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2)^2 K_{b_2}(t - T_3) (t - T_2)^2 (T_1 - T_2)(T_3 - T_2)] - M_1^2$$

siendo el primer sumando

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)K_{b_2}(t-t_2)^2K_{b_2}(t-t_3)(t-t_2)^2(t_1-t_2)(t_3-t_2) \\
& \quad \times h(t_1)h(t_2)h(t_3)dt_1dt_2dt_3 \\
& = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)(t_1-t_2)h(t_1)dt_1 \right)^2 K_{b_2}(t-t_2)^2(t-t_2)^2h(t_2)dt_2 \\
& = b_2^3 \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{11})(t_{21}-t_{11})h(t-b_2t_{11})dt_{11} \right)^2 K(t_{21})^2t_{21}^2h(t-b_2t_{21})dt_{21}
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha considerado $b_2 < \frac{t}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $h(t-b_2t_{11})$ y $h(t-b_2t_{21})$ en t , se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{11})(t_{21}-t_{11})h(t-b_2t_{11})dt_{11} \right)^2 K(t_{21})^2t_{21}^2h(t-b_2t_{21})dt_{21} \\
& = h(t)^3 \int_{-L}^L K(u)^2u^4du + o(1)
\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$M_{1,2,3,2} = b_2^3h(t)^3 \int_{-L}^L K(u)^2u^4du + o(b_2^3). \quad (3.37)$$

Si $\#\{i, j, k, l\} = 2$, hay sólo dos casos no nulos, $M_{1,2,1,2}$ y $M_{1,2,2,1}$. El primero de estos es

$$M_{1,2,1,2} = E [K_{b_2}(t-T_1)^2K_{b_2}(t-T_2)^2(t-T_2)^2(T_1-T_2)^2] - M_1^2.$$

Con el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y tomando $b_2 < \frac{t}{L}$, el primer sumando es

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2K_{b_2}(t-t_2)^2(t-t_2)^2(t_1-t_2)^2h(t_1)h(t_2)dt_1dt_2 \\
& = b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})^2K(t_{21})^2t_{21}^2(t_{21}-t_{11})^2h(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{21})dt_{11}dt_{21} \\
& = O(b_2^2),
\end{aligned}$$

por lo que

$$M_{1,2,1,2} = O(b_2^2). \quad (3.38)$$

Análogamente,

$$M_{1,2,2,1} = -E [K_{b_2}(t-T_1)^2K_{b_2}(t-T_2)^2(t-T_1)(t-T_2)(T_1-T_2)^2] - M_1^2$$

y el primero de estos dos términos es

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2K_{b_2}(t-t_2)^2(t-t_1)(t-t_2)(t_1-t_2)^2h(t_1)h(t_2)dt_1dt_2 \\
& = -b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K_{b_2}(t_{11})^2K_{b_2}(t_{21})^2t_{11}t_{21}(t_{21}-t_{11})^2h(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{21})dt_{11}dt_{21} \\
& = O(b_2^2),
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha tomado $b_2 < \frac{t}{L}$. Por tanto,

$$M_{1,2,2,1} = O(b_2^2). \quad (3.39)$$

Por fin, cuando $\#\{i, j, k, l\} = 1$, es inmediato comprobar que el término $M_{1,1,1,1}$ es nulo.

Reuniendo los resultados (3.35)-(3.39),

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n w_i(t) \right] = O(n^3 b_2^3 + n^2 b_2^2) = O(n^3 b_2^3)$$

y, aplicando la desigualdad de Tchebychev,

$$\frac{1}{n^2 b_2^2} \sum_{i=1}^n w_i(t) = \mu_K h(t)^2 + O(b_2^2) + O_P(n^{-1/2} b_2^{-1/2}) = \mu_K h(t)^2 + o_P(1). \quad (3.40)$$

Por tanto, si se escribe

$$\widehat{p}_{LL}(t) - p(t) = D_n + D_n \left(\frac{\mu_K h(t)^2 - \frac{1}{n^2 b_2^2} \sum_{i=1}^n w_i(t)}{\frac{1}{n^2 b_2^2} \sum_{i=1}^n w_i(t)} \right)$$

y se tiene en cuenta (3.40) y que $h(t) > 0$, se obtiene (3.29).

Respecto a la esperanza de D_n ,

$$E[D_n] = \frac{1}{n b_2^2 \mu_K h(t)^2} E(w_1(t) (\delta_1 - p(t))) \quad (3.41)$$

y, de acuerdo con (3.34),

$$\begin{aligned} & E[w_1(t) (\delta_1 - p(t))] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^n K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_1 - T_j) (\delta_1 - p(t)) \right] \\ &= (n-1) E[K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) (t - T_2) (T_1 - T_2) (\delta_1 - p(t))] \\ &= (n-1) E[K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) (t - T_2) (T_1 - T_2) (p(T_1) - p(t))]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Definiendo

$$N_1 = E[K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) (t - T_2) (T_1 - T_2) (p(T_1) - p(t))], \quad (3.43)$$

se tiene

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1) K_{b_2}(t - t_2) (t - t_2) (t_1 - t_2) (p(t_1) - p(t)) h(t_1) h(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21}) t_{21} (t_{21} - t_{11}) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t)) h(t - b_2 t_{11}) h(t - b_2 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha tomado $b_2 < \frac{t}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $p(t - b_2 t_{11})$, $h(t - b_2 t_{11})$ y $h(t - b_2 t_{21})$ en t , se tiene

$$N_1 = -b_2^3 p'(t) h(t)^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21}) t_{21} (t_{21} - t_{11}) t_{11} dt_{11} dt_{21}$$

$$\begin{aligned}
& + b_2^4 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})K(t_{21})t_{21}(t_{21} - t_{11}) \\
& \times \left(t_{11}^2 \left(\frac{1}{2}p''(t)h(t)^2 + p'(t)h'(t)h(t) \right) + t_{11}t_{21}p'(t)h'(t)h(t) \right) dt_{11}dt_{21} + o(b_2^4) \\
= & b_2^4 \left(\frac{1}{2}p''(t)h(t)^2 + p'(t)h'(t)h(t) \right) \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})K(t_{21})t_{11}^2t_{21}^2 dt_{11}dt_{21} \\
& - b_2^4 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})K(t_{21})t_{11}^2t_{21}^2p'(t)h'(t)h(t) dt_{11}dt_{21} + o(b_2^4) \\
= & b_2^4 \frac{1}{2}p''(t)h(t)^2\mu_K^2 + o(b_2^4) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

y, por tanto, (3.32).

En cuanto a la varianza de D_n ,

$$\begin{aligned}
Var[D_n] & = Cov[D_n, D_n] \\
& = \frac{1}{n^4 b_2^4} \frac{1}{\mu_K^2 h(t)^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[w_i(t)(\delta_i - p(t)), w_j(t)(\delta_j - p(t))] \\
& = \frac{1}{n^4 b_2^4} \frac{1}{\mu_K^2 h(t)^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_{i,j,k,l}
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
N_{i,j,k,l} & = Cov[K_{b_2}(t - T_i)K_{b_2}(t - T_j)(t - T_j)(T_i - T_j)(\delta_i - p(t)), \\
& K_{b_2}(t - T_k)K_{b_2}(t - T_l)(t - T_l)(T_k - T_l)(\delta_k - p(t))].
\end{aligned}$$

Procede determinar el orden de $N_{i,j,k,l}$ según la cardinalidad del conjunto de índices $\{i, j, k, l\}$.

Si $\#\{i, j, k, l\} = 3$, hay tres casos, $N_{1,2,1,3}$, $N_{1,2,3,1}$ y $N_{1,2,3,2}$, en los que $N_{i,j,k,l}$ no es trivialmente nulo. Respecto al primero de ellos,

$$\begin{aligned}
N_{1,2,1,3} & = E[K_{b_2}(t - T_1)^2 K_{b_2}(t - T_2)K_{b_2}(t - T_3)(t - T_2)(T_1 - T_2) \\
& \times (t - T_3)(T_1 - T_3)(p(T_1)(1 - 2p(t)) + p(t)^2)] - N_1^2.
\end{aligned}$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1)^2 K_{b_2}(t - t_2)K_{b_2}(t - t_3)(t - t_2)(t_1 - t_2)(t - t_3)(t_1 - t_3) \\
& \times (p(t_1)(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(t_1)h(t_2)h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\
= & \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K_{b_2}(t - t_2)(t - t_2)(t_1 - t_2)h(t_2) dt_2 \right)^2 K_{b_2}(t - t_1)^2 (p(t_1)(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(t_1) dt_1 \\
= & b_2^3 \int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21})t_{21}(t_{21} - t_{11})h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right)^2 K(t_{11})^2 \\
& \times (p(t - b_2 t_{11})(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(t - b_2 t_{11}) dt_{11}
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha tomado $b_2 < \frac{t}{L}$. Mediante desarrollos de Taylor de $h(t - b_2 t_{21})$, $p(t - b_2 t_{11})$ y $h(t - b_2 t_{11})$ en t ,

$$\int_{-L}^L \left(\int_{-L}^L K(t_{21})t_{21}(t_{21} - t_{11})h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \right)^2 K(t_{11})^2$$

$$\begin{aligned} & \times (p(t - b_2 t_{11})(1 - 2p(t)) + p(t)^2) h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\ = & p(t)(1 - p(t))h(t)^3 c_K \mu_K^2 + o(1) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$N_{1,2,1,3} = b_2^3 p(t)(1 - p(t))h(t)^3 c_K \mu_K^2 + o(b_2^3). \quad (3.45)$$

En cuanto a $N_{1,2,3,1}$,

$$\begin{aligned} N_{1,2,3,1} = & E [K_{b_2}(t - T_1)^2 K_{b_2}(t - T_2) K_{b_2}(t - T_3)(t - T_2)(T_1 - T_2) \\ & \times (t - T_1)(T_3 - T_1)(p(t_1) - p(t))(p(t_3) - p(t))] - N_1^2. \end{aligned}$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1)^2 K_{b_2}(t - t_2) K_{b_2}(t - t_3)(t - t_2)(t_1 - t_2)(t - t_1)(t_3 - t_1) \\ & \times (p(t_1) - p(t))(p(t_3) - p(t)) h(t_1)h(t_2)h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ = & b_2^3 \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})^2 K(t_{21}) K(t_{31}) t_{21}(t_{21} - t_{11}) t_{11}(t_{11} - t_{31}) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t)) \\ & \times (p(t - b_2 t_{31}) - p(t)) h(t - b_2 t_{11}) h(t - b_2 t_{21}) h(t - b_2 t_{31}) dt_{11} dt_{21} dt_{31} \\ = & o(b_2^3) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, $\frac{t-t_3}{b_2} = t_{31}$ y se ha supuesto $b_2 < \frac{t}{L}$. Por tanto,

$$N_{1,2,3,1} = o(b_2^3). \quad (3.46)$$

Análogamente, para $N_{1,2,3,2}$

$$\begin{aligned} N_{1,2,3,2} = & E [K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2)^2 K_{b_2}(t - T_3)(t - T_2)^2 (T_1 - T_2) \\ & \times (T_3 - T_1)(p(t_1) - p(t))(p(t_3) - p(t))] - N_1^2 \end{aligned}$$

y el primer sumando es

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t - t_1) K_{b_2}(t - t_2)^2 K_{b_2}(t - t_3)(t - t_2)^2 (t_1 - t_2)(t_3 - t_1) \\ & \times (p(t_1) - p(t))(p(t_3) - p(t)) h(t_1)h(t_2)h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ = & b_2^3 \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21})^2 K(t_{31}) t_{21}^2 (t_{21} - t_{11})(t_{11} - t_{31}) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t)) \\ & \times (p(t - b_2 t_{31}) - p(t)) h(t - b_2 t_{11}) h(t - b_2 t_{21}) h(t - b_2 t_{31}) dt_{11} dt_{21} dt_{31} \\ = & o(b_2^3) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, $\frac{t-t_3}{b_2} = t_{31}$ y se ha supuesto $b_2 < \frac{t}{L}$. Por tanto, como en el caso anterior,

$$N_{1,2,3,2} = o(b_2^3). \quad (3.47)$$

Si $\#\{i, j, k, l\} = 2$, hay dos casos $N_{1,2,1,2}$ y $N_{1,2,2,1}$. Respecto a $N_{1,2,1,2}$,

$$N_{1,2,1,2} = E [K_{b_2}(t - T_1)^2 K_{b_2}(t - T_2)^2 (t - T_2)^2 (T_1 - T_2)^2 (p(T_1)(1 - 2p(t)) + p(t)^2)] - N_1^2.$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 K_{b_2}(t-t_2)^2 (t-t_2)^2 (t_1-t_2)^2 (p(t_1)(1-2p(t)) + p(t)^2) h(t_1)h(t_2) dt_1 dt_2 \\
&= b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})^2 K(t_{21})^2 t_{21}^2 (t_{21}-t_{11})^2 (p(t-b_2 t_{11})(1-2p(t)) + p(t)^2) \\
&\quad \times h(t-b_2 t_{11})h(t-b_2 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \\
&= O(b_2^2)
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha tomado $b_2 < \frac{t}{L}$. Por tanto,

$$N_{1,2,1,2} = O(b_2^2). \quad (3.48)$$

Respecto a $N_{1,2,2,1}$,

$$N_{1,2,2,1} = -E [K_{b_2}(t-T_1)^2 K_{b_2}(t-T_2)^2 (t-T_1)(t-T_2)(T_1-T_2)^2 (p(T_1)-p(t))(p(T_2)-p(t))] - N_1^2.$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 K_{b_2}(t-t_2)^2 (t-t_1)(t-t_2)(t_1-t_2)^2 \\
&\quad \times (p(t_1)-p(t))(p(t_2)-p(t))h(t_1)h(t_2) dt_1 dt_2 \\
&= -b_2^2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11})^2 K(t_{21})^2 t_{11} t_{21} (t_{21}-t_{11})^2 (p(t-b_2 t_{11})-p(t)) \\
&\quad \times (p(t-b_2 t_{21})-p(t))h(t-b_2 t_{11})h(t-b_2 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \\
&= o(b_2^2)
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y se ha tomado $b_2 < \frac{t}{L}$. Por tanto,

$$N_{1,2,2,1} = o(b_2^2). \quad (3.49)$$

Cuando $\#\{i, j, k, l\} = 1$, es inmediato comprobar que el término $N_{1,1,1,1}$ es nulo.

Reuniendo los resultados (3.45)-(3.49) y teniendo en cuenta que, de (V.2) y (V.1), $nb_2 \rightarrow \infty$, se obtiene (3.33). ■

Lema 3.2.6 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene*

$$Cov [A_n, D_n] = o(n^{-1}). \quad (3.50)$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}
Cov [A_n, D_n] &= Cov \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t-T_i)}{1-H(T_i) + \frac{1}{n}} - \lambda_H(t), \frac{1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \sum_{i=1}^n w_i(t) (\delta_i - p(t)) \right] \\
&= \frac{1}{n^3 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov \left[\frac{K_{b_1}(t-T_i)}{1-H(T_i) + \frac{1}{n}}, w_j(t) (\delta_j - p(t)) \right] \\
&= \frac{1}{n^3 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n N_{i,j,k}
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$N_{i,j,k} = Cov \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}}, K_{b_2}(t - T_j)K_{b_2}(t - T_k)(t - T_k)(T_j - T_k)(\delta_j - p(t)) \right].$$

Se estudia a continuación el orden de los términos $N_{i,j,k}$ según la cardinalidad del conjunto de índices $\{i, j, k\}$.

Cuando $\#\{i, j, k\} = 2$, deben considerarse los casos $N_{1,1,2}$ y $N_{1,2,1}$. Respecto al primero de ellos,

$$\begin{aligned} N_{1,1,2} &= E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2)(t - T_2)(T_1 - T_2)(\delta_1 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\ &\quad - E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] N_1 \end{aligned}$$

donde N_1 se definió en (3.43). El primer sumando es

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} K_{b_1}(t - t_1) K_{b_2}(t - t_1) K_{b_2}(t - t_2)(t - t_2)(t_1 - t_2) \\ &\quad \times (p(t_1) - p(t)) h(t_1)h(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{b_1^3}{b_2^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) t_{21}(t_{21} - t_{11}) \\ &\quad \times (p(t - b_1 t_{11}) - p(t)) h(t - b_1 t_{11})h(t - b_1 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$ y se ha tomado $b_1 < \frac{t}{L}$. Ahora, para $b_1 < \frac{t \wedge (t_0 - t)}{L}$

$$\begin{aligned} &\frac{b_1^3}{b_2^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) t_{21}(t_{21} - t_{11}) \\ &\quad \times (p(t - b_1 t_{11}) - p(t)) h(t - b_1 t_{11})h(t - b_1 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \\ &= -\frac{b_1^4}{b_2^2} p'(t) \lambda_H(t) h(t) \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) t_{21} t_{11} (t_{21} - t_{11}) dt_{11} dt_{21} \\ &\quad + o\left(\frac{b_1^4}{b_2^2}\right) + O\left(\frac{b_1^3}{b_2^2 n}\right) \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde se ha tenido en cuenta (3.13), la relación $\lambda_H = \frac{h}{1-H}$ y se han realizado desarrollos de Taylor de $p(t - b_1 t_{11})$, $\lambda_H(t - b_1 t_{11})$ y $h(t - b_1 t_{21})$ en t . Por otra parte, de (3.8),

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} \right] = \lambda_H(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \lambda_H''(t) + o(b_1^2) + O(n^{-1})$$

y, como se probó en (3.44),

$$N_1 = b_2^4 \frac{1}{2} p''(t) h(t)^2 \mu_K^2 + o(b_2^4) = O(b_1^4).$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la integral del primer sumando de (3.51) es nula, las condiciones (V.2) y (V.1), se tiene

$$N_{1,1,2} = o(b_1^2). \tag{3.52}$$

Análogamente, para $N_{1,2,1}$,

$$N_{1,2,1} = E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(t - T_2) K_{b_2}(t - T_1)(t - T_1)(T_2 - T_1)(\delta_2 - p(t))}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\ - E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] N_1,$$

siendo la primera esperanza

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} K_{b_1}(t - t_1) K_{b_2}(t - t_2) K_{b_2}(t - t_1)(t - t_1)(t_2 - t_1) \\ \times (p(t_2) - p(t)) h(t_1)h(t_2) dt_1 dt_2 \\ = \frac{b_1^3}{b_2^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{11}(t_{11} - t_{21}) \\ \times (p(t - b_1 t_{21}) - p(t)) h(t - b_1 t_{11}) h(t - b_1 t_{21}) dt_{11} dt_{21}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$ y se ha tomado $b_1 < \frac{t}{L}$. Si además $b_1 < \frac{t \wedge (t_0 - t)}{L}$,

$$\frac{b_1^3}{b_2^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{11}(t_{11} - t_{21}) \\ \times (p(t - b_1 t_{21}) - p(t)) h(t - b_1 t_{11}) h(t - b_1 t_{21}) dt_{11} dt_{21} \\ = -\frac{b_1^4}{b_2^2} p'(t) \lambda_H(t) h(t) \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(\frac{t_{21} b_1}{b_2}\right) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{21} t_{11}(t_{11} - t_{21}) dt_{11} dt_{21} \\ + o\left(\frac{b_1^4}{b_2^2}\right) + O\left(\frac{b_1^3}{b_2^2 n}\right) \quad (3.53)$$

donde se ha tenido en cuenta (3.13), la relación $\lambda_H = \frac{h}{1-H}$ y se han realizado desarrollos de Taylor de $p(t - b_1 t_{11})$, $\lambda_H(t - b_1 t_{11})$ y $h(t - b_1 t_{21})$ en t . Por tanto, teniendo en cuenta que la integral del primer sumando de (3.53) es nula, las condiciones (V.2) y (V.1) y los resultados (3.8) y (3.44), se tiene

$$N_{1,2,1} = o(b_1^2). \quad (3.54)$$

Es evidente que $N_{1,1,1} = 0$, por lo que reuniendo los resultados (3.51) y (3.53) se obtiene (3.50). ■

En los teoremas siguientes se dan representaciones asintóticas de $\widehat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRLl}(t)$ y $\widetilde{\lambda}_{TWP}(t)$, respectivamente.

Teorema 3.2.1 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene*

$$\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) + o_P\left(n^{-1/2} b_1^{-1/2}\right) \quad (3.55)$$

donde se ha definido

$$\bar{\lambda}_{WLNW}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_{b_1}(t - T_i) p(t)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{K_{b_2}(t - T_i) (\delta_i - p(t))}{1 - H(t)} \right). \quad (3.56)$$

Además,

$$E [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)] = \lambda_F(t) + \frac{1}{2}b_1^2\mu_K \left(\lambda_H''(t)p(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2 (\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) \right) + o(b_1^2) \quad (3.57)$$

y

$$Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)] = \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_H(t)p(t) (p(t) + a(1-p(t)))}{1-H(t)} + o(n^{-1}b_1^{-1}). \quad (3.58)$$

Demostración. A partir de la siguiente descomposición de $\hat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)$,

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) &= \hat{\lambda}_{WL}(t)\hat{p}_{NW}(t) - \lambda_H(t)p(t) \\ &= p(t)(\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t)) + \lambda_H(t)(\hat{p}_{NW}(t) - p(t)) \\ &\quad + (\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t))(\hat{p}_{NW}(t) - p(t)) \end{aligned}$$

se obtiene (3.55) empleando las representaciones asintóticas de $\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t)$ y $\hat{p}_{NW}(t) - p(t)$ dadas en los lemas 3.2.1 y 3.2.3, respectivamente, teniendo en cuenta que $\bar{\lambda}_{WLNW}(t) = p(t)A_n + \lambda_H(t)C_n + \lambda_F(t)$, donde A_n y C_n se definieron en (3.7) y (3.24), aplicando la desigualdad de Tchebychev a A_n y C_n basándose en los resultados (3.8), (3.9), (3.25) y (3.26) y suponiendo **(V.2)** y que, por **(V.1)**, $nb_1^9 \rightarrow 0$.

El resultado (3.57) se deriva inmediatamente de (3.8) y (3.25), teniendo en cuenta que

$$\frac{h'(t)p'(t)}{1-H(t)} = (\lambda_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)$$

y la condición **(V.2)**

Por último, como.

$$Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)] = p(t)^2 Var [A_n] + \lambda_H(t)^2 Var [C_n] + 2\lambda_H(t)p(t)Cov [A_n, C_n],$$

se obtiene (3.58) a partir de los resultados (3.9), (3.26) y (3.27), teniendo nuevamente en cuenta **(V.2)**.

■

En el teorema siguiente se da una representación asintótica para $\hat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t)$.

Teorema 3.2.2 *Bajo las condiciones **(K.1)**, **(P.1)**, **(H.1)**, **(V.1)** y **(V.2)** se tiene*

$$\hat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) = \hat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) + \frac{1}{2}b_1^2\mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t)p(t) + o_P \left(n^{-1/2}b_1^{-1/2} \right). \quad (3.59)$$

Equivalentemente, definiendo

$$\bar{\lambda}_{RRNW}(t) = \bar{\lambda}_{WLNW}(t) + \frac{1}{2}b_1^2\mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t)p(t) \quad (3.60)$$

donde $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$ se definió en 3.56, se tiene

$$\hat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) + o_P \left(n^{-1/2}b_1^{-1/2} \right). \quad (3.61)$$

Demostración. Considérese la siguiente expresión expandida,

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) &= \widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) + E[B_n - A_n] \widehat{p}_{NW}(t) \\ &\quad + \left(\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] \right) \widehat{p}_{NW}(t)\end{aligned}\quad (3.62)$$

donde A_n y B_n se definieron en (3.7) y (3.20), respectivamente.

Aplicando la desigualdad de Tchebychev al término C_n definido en (3.24) de la representación (3.23), $\widehat{p}_{NW}(t) - p(t) = C_n(1 + o_P(1))$, empleando las expresiones para $E[C_n]$ y $Var[C_n]$ dadas en (3.25) y (3.26), respectivamente, se tiene

$$\widehat{p}_{NW}(t) = p(t) + O_P\left(b_2^2 + n^{-1/2}b_2^{-1/2}\right). \quad (3.63)$$

Por otra parte, de acuerdo con (3.8) y (3.21), se tiene

$$E[B_n - A_n] = \frac{1}{2}b_1^2\mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) + o(b_1^2), \quad (3.64)$$

por lo que, teniendo en cuenta (3.63) y (3.64), se tiene para el segundo sumando de (3.62)

$$E[B_n - A_n] \widehat{p}_{NW}(t) = \frac{1}{2}b_1^2\mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) p(t) + o_P(b_1^2) + O_P\left(b_1^2 \left(b_2^2 + n^{-1/2}b_1^{-1/2} \right)\right)$$

y, por (V.1) y (V.2),

$$E[B_n - A_n] \widehat{p}_{NW}(t) = \frac{1}{2}b_1^2\mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) p(t) + o_P\left(n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right). \quad (3.65)$$

De acuerdo con (3.6) y (3.19), para el factor entre paréntesis del último sumando de (3.62) se verifica

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] &= \widehat{\lambda}_{RR}(t) - \lambda_H(t) - \left(\widehat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t) \right) - E[B_n - A_n] \\ &= B_n - A_n - E[B_n - A_n] + o_P\left(n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}&E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) \left(H(t) - H(T_1) + \frac{1}{n} \right)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{K_{b_1}(t - x) \left(H(t) - H(x) + \frac{1}{n} \right) h(x)}{1 - H(x) + \frac{1}{n}} dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{K(x_1) \left(H(t) - H(t - b_1x_1) + \frac{1}{n} \right) h(t - b_1x_1)}{1 - H(t - b_1x_1) + \frac{1}{n}} dx_1 \\ &= \int_{-L}^L K(x_1) \left(H(t) - H(t - b_1x_1) \right) \varphi_1(t - b_1x_1) dx_1 + O(n^{-1}) \\ &= b_1^2\mu_K \left(h(t)\varphi_1'(t) + \frac{1}{2}h'(t)\varphi_1(t) \right) + o(b_1^2) + O(n^{-1}) \\ &= O(b_1^2)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1)^2 (H(t) - H(T_1) + \frac{1}{n})^2}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{K_{b_1} (t - x)^2 (H(t) - H(x) + \frac{1}{n})^2 h(x)}{(1 - H(x) + \frac{1}{n})^2} dx \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L \frac{K(x_1)^2 (H(t) - H(t - b_1 x_1) + \frac{1}{n})^2 h(t - b_1 x_1)}{(1 - H(t - b_1 x_1) + \frac{1}{n})^2} dx_1 \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L K(x_1)^2 (H(t) - H(t - b_1 x_1))^2 \varphi_2(t - b_1 x_1) dx_1 + O(n^{-1} b_1^{-1}) \\
&= b_1 \int_{-L}^L K(x_1)^2 x_1^2 dx_1 h'(t)^2 \varphi_2(t) + O(n^{-1} b_1^{-1}) \\
&= O(b_1)
\end{aligned}$$

donde, para las dos esperanzas anteriores se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-x}{b_1} = x_1$, se ha considerado $b_1 < \frac{t}{L}$, se han realizado desarrollos de Taylor de $H(t - b_1 x_1)$ en t y se ha tenido en cuenta (3.13) y que, por (V.1), $nb_1^2 \rightarrow \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Var} [(B_n - A_n - E[B_n - A_n])] &= \text{Var} [B_n - A_n] \\
&= \text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1} (t - T_i) (H(t) - H(T_i) + \frac{1}{n})}{(1 - H(t)) (1 - H(T_i) + \frac{1}{n})} \right] \\
&= \frac{1}{n (1 - H(t))^2} \text{Var} \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1) (H(t) - H(T_1) + \frac{1}{n})}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
&= \frac{1}{n (1 - H(t))^2} \left(E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1)^2 (H(t) - H(T_1) + \frac{1}{n})^2}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1) (H(t) - H(T_1) + \frac{1}{n})}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \right)^2 \right) \\
&= O(n^{-1} b_1)
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$B_n - A_n - E[B_n - A_n] = O_P(n^{-1/2} b_1^{1/2}).$$

Por consiguiente,

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] = O_P(n^{-1/2} b_1^{1/2}) \quad (3.66)$$

y

$$\left(\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] \right) \widehat{p}_{NW}(t) = O_P(n^{-1/2} b_1^{1/2}) O_P(1) = o_P(n^{-1/2} b_1^{-1/2}), \quad (3.67)$$

y se obtiene el resultado (3.59) inmediatamente a partir de (3.65) y (3.67) teniendo en cuenta que

$$\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) = (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t).$$

Al resultado (3.61) se llega a partir de (3.59), con sólo considerar la representación (3.55) del teorema 3.2.1 y la definición (3.60) de $\bar{\lambda}_{RRNW}(t)$. ■

Para $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ se tiene el teorema siguiente.

Teorema 3.2.3 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene*

$$\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) + o_P\left(n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right) \quad (3.68)$$

donde se ha definido

$$\bar{\lambda}_{WLLL}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) p(t)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2 b_2^2} \sum_{i=1}^n \frac{w_i(t) (\delta_i - p(t))}{\mu_K h(t) (1 - H(t))} \quad (3.69)$$

y $w_i(t)$ se definió en (3.31).

Además,

$$E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)] = \lambda_F(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \left(\lambda_H''(t) p(t) + \frac{\lambda_H(t) p''(t)}{a^2} \right) + o(b_1^2) \quad (3.70)$$

y

$$Var[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)] = \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_H(t) p(t) (p(t) + a(1 - p(t)))}{1 - H(t)} + o(n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.71)$$

Demostración. Partiendo de la siguiente descomposición de $\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t)$,

$$\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) = p(t)(\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t)) + \lambda_H(t)(\hat{p}_{LL}(t) - p(t)) + (\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t))(\hat{p}_{LL}(t) - p(t))$$

se obtiene (3.68) empleando las representaciones asintóticas de $\hat{\lambda}_{WL}(t) - \lambda_H(t)$ y $\hat{p}_{LL}(t) - p(t)$ dadas en los lemas 3.2.1 y 3.2.5, teniendo en cuenta que $\bar{\lambda}_{WLLL}(t) = p(t)A_n + \lambda_H(t)D_n + \lambda_F(t)$, donde A_n y D_n se definieron en (3.7) y (3.30), aplicando la desigualdad de Tchebychev a A_n y D_n basándose en los resultados (3.8), (3.9), (3.32) y (3.33) y teniendo en cuenta las hipótesis (V.2) y (V.1).

El resultado (3.70) sobre $E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]$ es consecuencia inmediata de (3.8), (3.32) y (V.2).

Por último se deduce (3.71) directamente a partir de (3.9), (3.33), (3.50) y (V.2). ■

Partiendo de la representación anterior, el teorema siguiente da una representación para $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$.

Teorema 3.2.4 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) se tiene*

$$\hat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) = \hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t) p(t) + o_P\left(n^{-1/2} b_1^{-1/2}\right). \quad (3.72)$$

Equivalentemente, definiendo

$$\bar{\lambda}_{RRLL}(t) = \bar{\lambda}_{WLLL}(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t) p(t) \quad (3.73)$$

donde $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$ se definió en (3.69), se tiene

$$\hat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) + o_P\left(n^{-1/2} b_1^{-1/2}\right). \quad (3.74)$$

Demostración. Expandiendo la diferencia $\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t)$, puede escribirse

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) &= \widehat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) + E[B_n - A_n] \widehat{p}_{LL}(t) \\ &\quad + \left(\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] \right) \widehat{p}_{LL}(t) \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde A_n y B_n fueron definidas en (3.7) y (3.20), respectivamente.

La desigualdad de Tchebychev aplicada al término D_n , definido en (3.30), de la representación (3.29), empleando las expresiones para $E[D_n]$ y $Var[D_n]$ dadas en (3.32) y (3.33), respectivamente, permite obtener

$$\widehat{p}_{LL}(t) = p(t) + O_P \left(b_2^2 + n^{-1/2} b_2^{-1/2} \right). \quad (3.76)$$

Por otra parte, como se probó en (3.64),

$$E[B_n - A_n] = \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) + o(b_1^2). \quad (3.77)$$

Por tanto, de (3.76) y (3.77) se tiene

$$E[B_n - A_n] \widehat{p}_{LL}(t) = \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) p(t) + o_P(b_1^2) + O_P \left(b_1^2 \left(b_2^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right) \right)$$

y, por (V.1) y (V.2),

$$E[B_n - A_n] \widehat{p}_{LL}(t) = \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \left(\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) \right) p(t) + o_P \left(n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right). \quad (3.78)$$

Igualmente, de acuerdo con el resultado (3.66) obtenido en la demostración del susodicho teorema,

$$\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] = O_P \left(n^{-1/2} b_1^{1/2} \right),$$

con lo cual

$$\left(\widehat{\lambda}_{RR}(t) - \widehat{\lambda}_{WL}(t) - E[B_n - A_n] \right) \widehat{p}_{LL}(t) = o_P \left(n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right). \quad (3.79)$$

Sustituyendo las expresiones (3.78) y (3.79) en (3.75) y teniendo en cuenta que

$$\frac{h''(t)}{1 - H(t)} - \lambda_H''(t) = (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t)$$

se obtiene (3.72). Finalmente, se obtiene (3.74) de (3.72) considerando la representación (3.68) del teorema 3.2.3 y la definición (3.73) de $\bar{\lambda}_{RRLL}(t)$. ■

Termina la sección con un resultado similar para $\widetilde{\lambda}_{TWP}(t)$.

Teorema 3.2.5 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y para $I = (\varepsilon, t_0)$ se tiene*

$$\widetilde{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) + o_P \left(b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right) \quad (3.80)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{TWP}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \left(\psi(T_i) + \hat{\psi}(T_i) - \hat{h}(T_i)p(T_i) \right) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) h(T_i)}, \\ \psi(t) &= p(t)h(t) \\ \hat{\psi}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t - T_i) \delta_i.\end{aligned}\quad (3.81)$$

Además,

$$\begin{aligned}E \left[\bar{\lambda}_{TWP}(t) \right] &= \lambda_F(t) + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K \left(\lambda_H''(t)p(t) + 2\lambda_H'(t)p'(t) + \lambda_H(t)p''(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^2} \left(\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2)p'(t) \right) \right) + o(b_1^2)\end{aligned}\quad (3.82)$$

y

$$\begin{aligned}Var \left[\bar{\lambda}_{TWP}(t) \right] &= \frac{1}{nb_1} \frac{\lambda_H(t)p(t)}{1 - H(t)} \left(p(t)c_K + (1 - p(t))a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v - ua) du \right)^2 dv \right) \\ &\quad + o(n^{-1}b_1^{-1}).\end{aligned}\quad (3.83)$$

Demostración. En (3.5) se dio para $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ la expresión alternativa

$$\tilde{\lambda}_{TWP}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \hat{p}_{NW}(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i \mathbf{1}(T_i \notin I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}.\quad (3.84)$$

Es fácil demostrar la despreciabilidad asintótica del segundo término de la representación (3.84) de $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, respecto al primer término. Para ello, defínase $\alpha = (t_0 - t) \wedge (t - \varepsilon)$. Claramente, $\alpha > 0$. Para $i = 1, 2, \dots, n$, si $\mathbf{1}(T_i \notin I) = 1$ entonces $|t - T_i| \geq \alpha$, por lo que a partir de cierto n tal que $b_1 < \frac{\alpha}{L}$, se verifica $\frac{|t - T_i|}{b_1} > L$, $K_{b_1}(t - T_i) = 0$ y $\frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i \mathbf{1}(T_i \notin I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} = 0$. Por otra parte, si $\mathbf{1}(T_i \notin I) = 0$, entonces, obviamente, $\frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i \mathbf{1}(T_i \notin I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} = 0$. De todo ello se deduce que a partir de cierto n la sucesión

$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \delta_i \mathbf{1}(T_i \notin I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}$ es nula con probabilidad 1.

Respecto al primer término de (3.84), linealizando su denominador y empleando la siguiente descomposición de $\hat{p}_{NW}(t) - p(t)$

$$\hat{p}_{NW}(t) - p(t) = \frac{\hat{\psi}(t) - \hat{h}(t)p(t)}{h(t)} - \frac{(\hat{p}_{NW}(t) - p(t))(\hat{h}(t) - h(t))}{h(t)},$$

se puede dar la siguiente representación para dicho término

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \hat{p}_{NW}(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4\quad (3.85)$$

donde se define

$$J_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) p(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}},$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \left(\widehat{\psi}(T_i) - \widehat{h}(T_i)p(T_i) \right) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) h(T_i)}, \\
J_3 &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \left(\widehat{p}_{NW}(T_i) - p(T_i) \right) \left(\widehat{h}(T_i) - h(T_i) \right) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) h(T_i)}, \\
J_4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \widehat{p}_{NW}(T_i) \left(H_n(T_i) - H(T_i) \right) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}\right) \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Para J_3 se verifica que

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq \sup_{t \in I} |\widehat{p}_{NW}(t) - p(t)| \sup_{t \in I} |\widehat{h}(t) - h(t)| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) h(T_i)} \\
&\leq \sup_{t \in I} |\widehat{p}_{NW}(t) - p(t)| \sup_{t \in I} |\widehat{h}(t) - h(t)| \delta^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

donde, por $\delta > 0$ se denota una cota inferior para la densidad h en el intervalo I . Por tanto, teniendo en cuenta los teoremas 1.2.1-1.2.2 y (3.18),

$$J_3 = O_P \left(n^{-1/2} b_1^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_1} \right)^{1/2} \right) O_P \left(b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_1} \right)^{1/2} \right) O_P(1) = o_P \left(b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right)$$

siendo suficiente para obtener el orden dado en la última igualdad que $n b_1^2 \rightarrow \infty$, lo que se verifica como consecuencia de la condición **(V.1)**. En efecto, si $n b_1^2 \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_1} \right)^{1/2} \right) n^{-1/2} b_1^{-1/2} \left(\log \frac{1}{b_1} \right)^{1/2}}{b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2}} \\
&= \frac{\left(b_1^2 \left(\log \frac{1}{b_1} \right)^{-1/2} + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right) n^{-1/2} b_1^{-1/2} \log \frac{1}{b_1}}{b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2}} = O \left(n^{-1/2} b_1^{-1/2} \log \frac{1}{b_1} \right) = O \left(\frac{b_1^{1/2} \log \frac{1}{b_1}}{(n b_1^2)^{1/2}} \right) \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

puesto que $\sqrt{b_1} \log \frac{1}{b_1} \rightarrow 0$.

En cuanto a J_4 ,

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leq \frac{\sup_{t \in I} |H_n(t) - H(t)|}{1 - H(t_0)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \widehat{p}_{NW}(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}} \\
&\leq \frac{\sup_{t \in I} |H_n(t) - H(t)|}{1 - H(t_0)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Ahora, si se recuerda que, como se mencionó en (3.11),

$$\sup_{t \in I} |H_n(t) - H(t)| = O_P \left(n^{-1/2} \right)$$

y que el factor $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t-T_i)}{1-H_n(T_i) + \frac{1}{n}}$ coincide con la definición del estimador $\widehat{\lambda}_{WL}$, para el que de acuerdo con (3.6), (3.8) y (3.9) se verifica $\widehat{\lambda}_{WL} = O_P(1)$, se tiene

$$J_4 = O_P\left(n^{-1/2}\right) = o_P\left(b_1^2 + n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right)$$

donde, en la última igualdad, se ha tenido en cuenta la condición **(V.1)**.

De los resultados anteriores, observando que $\bar{\lambda}_{TWP}(t) = J_1 + J_2$, se obtiene (3.80).

A continuación, se consideran los términos J_1 y J_2 que forman parte de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$. La esperanza de J_1 es

$$\begin{aligned} E[J_1] &= E\left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)p(T_1)\mathbf{1}(T_1 \in I)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}}\right] = \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1)p(t_1)h(t_1)}{1-H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \\ &= \int_{\frac{t-\varepsilon}{b_1}}^{\frac{t-t_0}{b_1}} \frac{K(t_{11})p(t-b_1t_{11})h(t-b_1t_{11})}{1-H(t-b_1t_{11}) + \frac{1}{n}} dt_{11} = \int_{-L}^L K(t_{11})\lambda_F(t-b_1t_{11})dt_{11} + O(n^{-1}) \\ &= \lambda_F(t) + \frac{1}{2}b_1^2\mu_K(\lambda_H''(t)p(t) + 2\lambda_H'(t)p'(t) + \lambda_H(t)p''(t)) + o(b_1^2) \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde se ha realizado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t$, se ha tomado $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)}{L}$, se ha hecho uso de (3.13), se han efectuado desarrollos de Taylor de la función λ_F en t , se ha expresado λ_F'' en función de $\lambda_H(t), p(t)$ y sus derivadas y se ha tenido en cuenta que, como consecuencia de **(V.1)**, $nb_1^2 \rightarrow \infty$.

En cuanto a su varianza,

$$\begin{aligned} Var[J_1] &= \frac{1}{n} E\left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)^2 p(T_1)^2 \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n})^2}\right] - \frac{1}{n} (E[U_1])^2 \\ &= \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1)^2 p(t_1)^2 h(t_1)}{(1-H(t_1) + \frac{1}{n})^2} dt_1 - \frac{1}{n} (E[U_1])^2 \\ &= \frac{1}{nb_1} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} \frac{K(t_{11})^2 p(t-b_1t_{11})^2 h(t-b_1t_{11})}{(1-H(t-b_1t_{11}) + \frac{1}{n})^2} dt_{11} - \frac{1}{n} (E[U_1])^2 \\ &= \frac{1}{nb_1} \frac{c_K p(t)^2 h(t)}{(1-H(t))^2} + o(nb_1^{-1}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Respecto a J_2 , como

$$J_2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{K_{b_1}(t-T_i) K_{b_2}(T_i-T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1-H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)}$$

su esperanza es

$$\begin{aligned} E[J_2] &= \frac{n-1}{n} E\left[\frac{K_{b_1}(t-T_1) K_{b_2}(T_1-T_2) (p(T_2) - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)}\right] \\ &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-t_2) (p(t_2) - p(t_1)) h(t_2)}{1-H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Si se efectúa el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$,

$$E[J_2] = \frac{n-1}{n} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11}b_1}{b_2}\right) (p(t-b_2t_{21}) - p(t-b_1t_{11}))$$

$$\begin{aligned}
& \times h(t - b_2 t_{21}) \left(1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^{-1} dt_{11} dt_{21} \\
= & \frac{n-1}{n} \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) (p(t - b_2 t_{21}) - p(t - b_1 t_{11})) \\
& \times h(t - b_2 t_{21}) \left(1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^{-1} dt_{11} dt_{21} \tag{3.88}
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha tomado $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)\wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$. Estas condiciones sobre b_1 y b_2 garantizan que $\frac{t}{b_2} > L\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)$, lo que permite reducir el recinto de integración efectivo de la integral exterior de $\left(-\infty, \frac{t}{b_2}\right]$ a $\left[-L\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right), L\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)\right]$ al anularse fuera de este último intervalo el valor de $K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right)$. Definiendo $\zeta = \frac{1}{1-H}$, teniendo en cuenta (3.13) y realizando desarrollos de Taylor de $p(t - b_2 t_{21})$, $p(t - b_1 t_{11})$, $h(t - b_2 t_{21})$ y $\zeta(t - b_1 t_{11})$ en t , la integral de (3.88) es

$$\begin{aligned}
& p'(t)h(t)\zeta(t) (b_1 J_{21} - b_2 J_{22}) + \frac{1}{2} p''(t)h(t)\zeta(t) (b_2^2 J_{24} - b_1^2 J_{23}) + p'(t)h'(t)\zeta(t) (b_2^2 J_{24} - b_1 b_2 J_{25}) \\
& + p'(t)h(t)\zeta'(t) (b_1 b_2 J_{25} - b_1^2 J_{23}) + o((b_1 + b_2)^2) + O(n^{-1})
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
J_{21} &= \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{11} dt_{11} dt_{21}, \\
J_{22} &= \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{21} dt_{11} dt_{21}, \\
J_{23} &= \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{11}^2 dt_{11} dt_{21}, \\
J_{24} &= \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{21}^2 dt_{11} dt_{21}, \\
J_{25} &= \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11}) t_{11} K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) t_{21} dt_{11} dt_{21}
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $t_{11} = u$, $t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2} = v$ y dado que para $u \in [-L, L]$ se verifica $-L\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right) - \frac{u b_1}{b_2} \leq -L$ y $L\left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right) - \frac{u b_1}{b_2} \geq L$, se tiene

$$J_{21} = \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2}) - \frac{u b_1}{b_2}}^{L(1+\frac{b_1}{b_2}) - \frac{u b_1}{b_2}} K(u) K(v) u v du = \int_{-L}^L K(u) u du \int_{-L}^L K(v) dv = 0, \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
J_{22} &= \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2}) - \frac{u b_1}{b_2}}^{L(1+\frac{b_1}{b_2}) - \frac{u b_1}{b_2}} K(u) K(v) \left(\frac{u b_1}{b_2} + v\right) dv du \\
&= \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right) \int_{-L}^L K(u) du \int_{-L}^L K(v) v dv = 0, \tag{3.90}
\end{aligned}$$

$$J_{23} = \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}} K(u) K(v) u^2 dv du = \int_{-L}^L K(u) u^2 du \int_{-L}^L K(v) dv = \mu_K, \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} J_{24} &= \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}} K(u) K(v) \left(\frac{ub_1}{b_2} + v\right)^2 dv du \\ &= \frac{b_1^2}{b_2^2} \int_{-L}^L K(u) u^2 du \int_{-L}^L K(v) dv + \frac{2b_1}{b_2} \int_{-L}^L K(u) u du \int_{-L}^L K(v) v dv \\ &\quad + \int_{-L}^L K(u) du \int_{-L}^L K(v) v^2 dv \\ &= \mu_K \left(\frac{b_1^2}{b_2^2} + 1\right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

y

$$\begin{aligned} J_{25} &= \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})-\frac{ub_1}{b_2}} K(u) K(v) \left(\frac{ub_1}{b_2} + v\right) u dv du \\ &= \frac{b_1}{b_2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L K(u) K(v) u^2 dv du + \int_{-L}^L K(u) u du \int_{-L}^L K(v) v dv \\ &= \frac{\mu_K b_1}{b_2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.89)-(3.93),

$$\begin{aligned} E[J_2] &= b_2^2 \mu_K \left(\frac{1}{2} h(t) p''(t) \zeta(t) + h'(t) p'(t) \zeta(t) \right) + o((b_1 + b_2)^2) + O(n^{-1}) \\ &= \frac{b_1^2 \mu_K}{a^2} \left(\frac{1}{2} \lambda_H(t) p''(t) + (\lambda_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t) \right) + o(b_1^2) \end{aligned} \quad (3.94)$$

donde, en la última igualdad, se ha tenido en cuenta que

$$\frac{h'(t) p'(t)}{1 - H(t)} = (\lambda_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)$$

y las condiciones **(V.2)** y **(V.1)**.

Para la varianza de J_2 , se tiene

$$\begin{aligned} Var[J_2] &= Cov[J_2, J_2] = \frac{1}{n^4} (nM_{1,1,1,1} + n(n-1)(2M_{1,2,2,2} + 2M_{1,2,1,1} + M_{1,2,1,2} + M_{1,2,2,1}) \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(M_{1,2,1,3} + M_{1,2,3,1} + M_{1,2,2,3} + M_{1,2,3,2})) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{i,j,k,l} &= Cov \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{K_{b_1}(t - T_k) K_{b_2}(T_k - T_l) (\delta_l - p(T_k)) \mathbf{1}(T_k \in I)}{(1 - H(T_k) + \frac{1}{n}) h(T_k)} \right]. \end{aligned}$$

Se comienza el estudio de estas covarianzas por los casos en que $\#\{i, j, k, l\} = 3$. Para $M_{1,2,3,2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{K_{b_1}(t - T_3) K_{b_2}(T_3 - T_2) (\delta_2 - p(T_3)) \mathbf{1}(T_3 \in I)}{(1 - H(T_3) + \frac{1}{n}) h(T_3)} \right] \\
&= \int_{\varepsilon}^{t_0} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{1}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} \frac{1}{1 - H(t_3) + \frac{1}{n}} K_{b_1}(t - t_1) K_{b_2}(t_1 - t_2) K_{b_1}(t - t_3) K_{b_2}(t_3 - t_2) \\
& \quad \times (p(t_2)(1 - p(t_1) - p(t_3)) + p(t_1)p(t_3)) h(t_2) dt_1 dt_2 dt_3 \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{\frac{t-\varepsilon}{b_1}}^{\frac{t-t_0}{b_1}} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{\frac{t-\varepsilon}{b_1}}^{\frac{t-t_0}{b_1}} \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{31}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) K(t_{31}) \\
& \quad \times K\left(t_{21} - \frac{t_{31} b_1}{b_2}\right) (p(t - b_2 t_{21})(1 - p(t - b_1 t_{11}) - p(t - b_1 t_{31})) + p(t - b_1 t_{11})p(t - b_1 t_{31})) \\
& \quad \times h(t - b_2 t_{21}) dt_{11} dt_{21} dt_{31}
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, $\frac{t-t_3}{b_1} = t_{31}$. Si se toma $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)\wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$, la última expresión equivale a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} \frac{1}{1 - H(t - b_1 t_{31}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) K(t_{31}) \\
& \quad \times K\left(t_{21} - \frac{t_{31} b_1}{b_2}\right) (p(t - b_2 t_{21})(1 - p(t - b_1 t_{11}) - p(t - b_1 t_{31})) + p(t - b_1 t_{11})p(t - b_1 t_{31})) \\
& \quad \times h(t - b_2 t_{21}) dt_{11} dt_{21} dt_{31} \\
&= \frac{1}{b_2} \frac{p(t)(1 - p(t))h(t)}{(1 - H(t))^2} \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(b_2^{-1}) + O(b_2^{-1} n^{-1}) \\
&= \frac{1}{b_1} \frac{ap(t)(1 - p(t))h(t)}{(1 - H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - t_{11}a) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(b_1^{-1})
\end{aligned}$$

donde se han empleado desarrollos de Taylor y, en la última igualdad, se ha tenido en cuenta **(V.2)** y que, aplicando el teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned}
& \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(t_{21} - \frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) dt_{11} \right)^2 dt_{21} \\
&= \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - t_{11}a) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(1).
\end{aligned}$$

Considerando además (3.94), se tiene finalmente

$$M_{1,2,3,2} = \frac{1}{b_1} \frac{ap(t)(1 - p(t))h(t)}{(1 - H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - t_{11}a) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(b_1^{-1}). \quad (3.95)$$

Para $M_{1,2,1,3}$, se tiene

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)^2 K_{b_2}(T_1 - T_2) K_{b_2}(T_1 - T_3) (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_3 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2 h(T_1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_\varepsilon^{t_0} K_{b_1}(t-t_1)^2 K_{b_2}(t_1-t_2) K_{b_2}(t_1-t_3) (p(t_2) - p(t_1)) \\
&\quad \times (p(t_3) - p(t_1)) \left(1 - H(t_1) + \frac{1}{n}\right)^{-2} h(t_1)^{-1} h(t_2) h(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} K(t_{11})^2 K\left(t_{21} - \frac{t_{11}b_1}{b_2}\right) K\left(t_{31} - \frac{t_{11}b_1}{b_2}\right) \\
&\quad \times (p(t - b_2t_{21}) - p(t - b_1t_{11})) (p(t - b_2t_{31}) - p(t - b_1t_{11})) \\
&\quad \times \left(1 - H(t - b_1t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^{-2} h(t - b_1t_{11})^{-1} h(t - b_2t_{21}) h(t - b_2t_{31}) dt_{11} dt_{21} dt_{31} \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} K(t_{11})^2 \left(1 - H(t - b_1t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^{-2} h(t - b_1t_{11})^{-1} \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} K\left(t_{21} - \frac{t_{11}b_1}{b_2}\right) (p(t - b_2t_{21}) - p(t - b_1t_{11})) h(t - b_2t_{21}) dt_{21}\right)^2 dt_{11} \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L K(t_{11})^2 \left(1 - H(t - b_1t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^{-2} h(t - b_1t_{11})^{-1} \\
&\quad \times \left(\int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} K\left(t_{21} - \frac{t_{11}b_1}{b_2}\right) (p(t - b_2t_{21}) - p(t - b_1t_{11})) h(t - b_2t_{21}) dt_{21}\right)^2 dt_{11}
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, $\frac{t-t_3}{b_2} = t_{31}$ y, en la penúltima expresión, se toma $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)\wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$. Ahora, aplicando el teorema de la convergencia dominada y teniendo en cuenta **(V.2)**,

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)^2 K_{b_2}(T_1 - T_2) K_{b_2}(T_1 - T_3) (\delta_2 - p(T_1)) (\delta_3 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right)^2 h(T_1)^2} \right] = o(b_1^{-1}).$$

Además, como según (3.94)

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right) h(T_1)} \right] = O(b_1^2),$$

se concluye que

$$M_{1,2,1,3} = o(b_1^{-1}). \quad (3.96)$$

Un razonamiento similar permite obtener para $M_{1,2,3,1}$ y $M_{1,2,2,3}$,

$$M_{1,2,3,1} = o(b_1^{-1}) \quad (3.97)$$

y

$$M_{1,2,2,3} = o(b_1^{-1}). \quad (3.98)$$

Para los casos en que $\#\{i, j, k, l\} < 3$, es suficiente con la siguiente acotación

$$|M_{i,j,k,l}| \leq \left| E \left[K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(T_i - T_j) K_{b_1}(t - T_k) K_{b_2}(T_k - T_l) (\delta_j - p(T_i)) (\delta_l - p(T_k)) \right] \right|$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 - H(T_k) + \frac{1}{n}\right)^{-1} h(T_i)^{-1} h(T_k)^{-1} \mathbf{1}(T_i \in I) \mathbf{1}(T_k \in I) \Bigg] \Bigg| \\ & + \left| E \left[K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}\right) h(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I) \right] \right|^2 \\ & \leq \frac{1}{b_1^2 b_2^2} \frac{2 \|K\|_\infty^4}{(1 - H(t_0))^2 \delta^2} \end{aligned}$$

donde, por $\delta > 0$ se denota una cota inferior para la densidad h en el intervalo I .

Así pues, teniendo en cuenta **(V.2)**, para i, j, k, l cualesquiera se verifica

$$M_{i,j,k,l} = O(b_1^{-4}). \quad (3.99)$$

Reuniendo los resultados (3.95)-(3.99), se tiene

$$Var[J_2] = \frac{1}{nb_1} \frac{a \int_{-L}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - t_{11}a) dt_{11} \right)^2 dt_{21} p(t) (1 - p(t)) h(t)}{(1 - H(t))^2} + o(n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.100)$$

Por último, la covarianza de J_1 y J_2 es

$$\begin{aligned} Cov[J_1, J_2] &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Cov \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i) p(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}}, \right. \\ & \quad \left. \frac{K_{b_1}(t - T_j) K_{b_2}(T_j - T_k) (\delta_k - p(T_j)) \mathbf{1}(T_j \in I)}{(1 - H(T_j) + \frac{1}{n}) h(T_j)} \right] \\ &= \frac{1}{n^3} (nM_{1,1,1} + n(n-1)M_{1,2,1} + n(n-1)M_{1,1,2}) \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$M_{i,j,k} = Cov \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i) p(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}}, \frac{K_{b_1}(t - T_j) K_{b_2}(T_j - T_k) (\delta_k - p(T_j)) \mathbf{1}(T_j \in I)}{(1 - H(T_j) + \frac{1}{n}) h(T_j)} \right].$$

Como

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right] = 0$$

y

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)^2 K_{b_2}(0) p(T_1) (\delta_1 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2 h(T_1)} \right] = 0,$$

se tiene

$$M^{1,1,1} = 0. \quad (3.101)$$

Para $M_{1,1,2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1)^2 K_{b_2} (T_1 - T_2) p(T_1) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right)^2 h(T_1)} \right] \\
&= \int_0^\infty \int_\varepsilon^{t_0} \frac{K_{b_1} (t - t_1)^2 K_{b_2} (t_1 - t_2) p(t_1) (p(t_2) - p(t_1)) h(t_2)}{\left(1 - H(t_1) + \frac{1}{n}\right)^2} dt_1 dt_2 \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} K(t_{11})^2 K\left(t_{21} - \frac{b_1 t_{11}}{b_2}\right) p(t - b_1 t_{11}) (p(t - b_2 t_{21}) - p(t - b_1 t_{11})) \\
&\quad \times \frac{h(t - b_2 t_{21})}{\left(1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^2} dt_{11} dt_{21} \\
&= \frac{1}{b_1} \int_{-L}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \int_{-L}^L K(t_{11})^2 K\left(t_{21} - \frac{b_1 t_{11}}{b_2}\right) p(t - b_1 t_{11}) (p(t - b_2 t_{21}) - p(t - b_1 t_{11})) \\
&\quad \times \frac{h(t - b_2 t_{21})}{\left(1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}\right)^2} dt_{11} dt_{21} \\
&= o(b_1^{-1})
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$, se ha supuesto a continuación $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)\wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$ y se ha aplicado el teorema de la convergencia dominada teniendo en cuenta **(V.2)**. Como, según se probó en (3.86) y (3.94), respectivamente,

$$E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1) p(T_1) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] = O(1)$$

y

$$E \left[\frac{K_{b_1} (t - T_1) K_{b_2} (T_1 - T_2) (p(T_2) - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{\left(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}\right) h(T_1)} \right] = O(b_1),$$

se tiene

$$M_{1,1,2} = o(b_1^{-1}). \quad (3.102)$$

Razonando de modo similar, es sencillo concluir que

$$M_{1,2,1} = o(b_1^{-1}). \quad (3.103)$$

De los resultados (3.101)-(3.103), se concluye que

$$Cov [J_1, J_2] = o(n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.104)$$

Por fin, de (3.86) y (3.94), se obtiene inmediatamente (3.82) y, como

$$Var [\bar{\lambda}_{TWP}(t)] = Var [J_1] + 2Cov [J_1, J_2] + Var [J_2],$$

de (3.87), (3.100) y (3.104) se obtiene (3.83). ■

Observación 3.2.1 Cuando la función núcleo, K , además de cumplir la condición **(K.1)** es cóncava, se verifica que

$$\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du = \int_0^L K(u)(K(v+ua) + K(v-ua)) du \leq 2 \int_0^L K(u)K(v) du = K(v).$$

Por tanto,

$$\int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du \right)^2 dv \leq \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} K(v)^2 dv = c_K,$$

de modo que el término dominante de la varianza de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$ es menor o igual que los correspondientes términos de las varianzas de $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\bar{\lambda}_{RLLL}(t)$.

Observación 3.2.2 Como se señaló en la sección 3.1.2, cuando el parámetro de suavización b_2 se aproxima a 0 el estimador de Tanner-Wong presuavizado se aproxima al estimador de Tanner-Wong. En consonancia con ello, los términos dominantes del sesgo y de la varianza de $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ coinciden con el límite cuando a tiende a ∞ de los términos dominantes del sesgo y de la varianza de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$, respectivamente. En efecto, en lo relativo a la varianza, haciendo el cambio de variable $au = u_1$,

$$\begin{aligned} a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du \right)^2 dv &= a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(u)K(v-au) du \right)^2 dv \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_a(u_1)K(v-u_1) du_1 \right)^2 dv \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} K_a * K(v)^2 dv. \end{aligned}$$

Denotando por \tilde{f} la transformada de Fourier de f , $\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx$ y aplicando la identidad de Parseval para transformadas de Fourier y otras propiedades elementales

$$\begin{aligned} a \int_{-\infty}^{\infty} K_a * K(v)^2 dv &= \sqrt{2\pi} a \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K_a * K}(v)^2 dv = \sqrt{2\pi} a \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K_a}(v)^2 \tilde{K}(v)^2 dv \\ &= \sqrt{2\pi} a \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(av)^2 \tilde{K}(v)^2 dv = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(v_1)^2 \tilde{K}\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 dv_1 \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, se ha efectuado el cambio de variable $av = v_1$. Ahora, como

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{K}\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(v_1)^2 \tilde{K}\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 dv_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(v_1)^2 dv_1 = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(v_1)^2 dv_1 = \sqrt{2\pi} c_K,$$

por el teorema de la convergencia dominada, se tiene

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du \right)^2 dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(v_1)^2 dv_1 = c_K.$$

Así, el límite cuando $a \rightarrow \infty$ del término dominante de la varianza de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$ es

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{nb_1} \frac{\lambda_F(t)}{1 - H(t)} \left(p(t)c_K + (1 - p(t))a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v - ua) du \right)^2 dv \right) = \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_F(t)}{1 - H(t)},$$

que es el término dominante de la varianza del estimador de Tanner-Wong (Tanner y Wong (1983)).

3.3 Normalidad asintótica

En esta sección se hará uso del siguiente resultado, que puede encontrarse en la monografía de van der Vaart (1998).

Teorema 3.3.1 Sean $\mathcal{S}_n, n = 1, 2, \dots$, espacios vectoriales de variables aleatorias con segundo momento finito que contienen las constantes. Sean T_n variables aleatorias con proyecciones \widehat{S}_n sobre \mathcal{S}_n . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Var [T_n]}{Var [\widehat{S}_n]} = 1,$$

entonces

$$\frac{T_n - E [T_n]}{\sqrt{Var [T_n]}} - \frac{\widehat{S}_n - E [\widehat{S}_n]}{\sqrt{Var [\widehat{S}_n]}} \xrightarrow{P} 0.$$

En los teoremas 3.3.2-3.3.6 se demuestra la normalidad asintótica de los estimadores $\widehat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\widehat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\widehat{\lambda}_{RRLL}(t)$ y $\widehat{\lambda}_{TWP}(t)$ convenientemente normalizados.

Teorema 3.3.2 Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5$, se tiene

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_1(t), \xi_2(t)) \tag{3.105}$$

donde

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} \mu_K \left(\lambda_H''(t)p(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2 (\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) \right), \tag{3.106}$$

$$\xi_2(t) = \sqrt{\frac{c_K \lambda_F(t) (p(t) + a(1 - p(t)))}{1 - H(t)}} \tag{3.107}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5 = l_0^2, \quad l_0 \in [0, \infty). \tag{3.108}$$

Demostración. En el teorema 3.2.1 se dio la expresión asintótica

$$\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) + o_P\left(n^{-1/2}b_1^{-1/2}\right), \quad (3.109)$$

donde $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$ fue definido en (3.56).

Definiendo

$$U_{n,i} = \frac{1}{n} \left(\frac{K_{b_1}(t - T_i)p(t)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{K_{b_2}(t - T_i)(\delta_i - p(t))}{1 - H(t)} \right),$$

de modo que

$$\bar{\lambda}_{WLNW}(t) = \sum_{i=1}^n U_{n,i},$$

las variables aleatorias $U_{n,i}, i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$, constituyen un esquema triangular de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Se prueba a continuación la normalidad asintótica de $\frac{\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - E[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}}$. De acuerdo con el teorema de Liapunov basta para este fin con probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE\left[|U_{n,1} - E(U_{n,1})|^3\right]}{(\text{Var}[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)])^{3/2}} = 0.$$

Como por la desigualdad c_p , para $p \geq 1$ se verifica

$$E\left[|U_{n,1} - E(U_{n,1})|^p\right] \leq 2^{p-1} (E\left[|U_{n,1}|^p\right] + |E[U_{n,1}]|^p)$$

y, asimismo, para $1 \leq q \leq r$

$$(E\left[|U_{n,1}|^q\right])^{\frac{1}{q}} \leq (E\left[|U_{n,1}|^r\right])^{\frac{1}{r}},$$

se tiene

$$\frac{nE\left[|U_{n,1} - E(U_{n,1})|^3\right]}{(\text{Var}[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)])^{3/2}} \leq \frac{8nE\left[|U_{n,1}|^3\right]}{(\text{Var}[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)])^{3/2}}. \quad (3.110)$$

Como el núcleo K tiene soporte en $[-L, L]$, se tiene

$$\begin{aligned} U_{n,1} &= \frac{1}{n} \left(\frac{K_{b_1}(t - T_1)p(t)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} + \frac{K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))}{1 - H(t)} \right) \mathbf{1}\{T_1 \leq t + b_1L\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{K_{b_1}(t - T_1)p(t)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} + \frac{K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))}{1 - H(t)} \right) \mathbf{1}\{T_1 > t + b_1L\} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{K_{b_1}(t - T_1)p(t)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} + \frac{K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))}{1 - H(t)} \right) \mathbf{1}\{T_1 \leq t + b_1L\} \\ &\quad + \frac{1}{n} \frac{K_{b_2}(t - T_1)(\delta_1 - p(t))}{1 - H(t)} \mathbf{1}\{T_1 > t + b_1L\}. \end{aligned}$$

Si $b_1 < \frac{t_0-t}{L}$, de manera que $t + b_1 L < t_0$,

$$|U_{n,1}| \leq \frac{\|K\|_\infty}{n} \left(\frac{1}{b_1(1-H(t_0))} + \frac{2}{b_2(1-H(t))} \right) \leq \frac{1}{n} \frac{\|K\|_\infty}{1-H(t_0)} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} \right) \quad c.s.$$

y

$$E \left[|U_{n,1}|^3 \right] \leq \frac{1}{n^3} \frac{\|K\|_\infty^3}{(1-H(t_0))^3} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} \right)^3.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, **(V.2)** y (3.58),

$$\frac{nE \left[|U_{n,1} - E(U_{n,1})|^3 \right]}{(Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)])^{3/2}} = O(n)O \left(n^{3/2}b_1^{3/2} \right) O \left(n^{-3}b_1^{-3} \right) = O \left(n^{-1/2}b_1^{-3/2} \right).$$

y como, por **(V.1)**, $nb_1^3 \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE \left[|U_{n,1} - E(U_{n,1})|^3 \right]}{(Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)])^{3/2}} = 0.$$

Se ha probado, por tanto, que

$$\frac{\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - E [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}{\sqrt{Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}} = \frac{\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - E [\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)]}{\sqrt{Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Teniendo en cuenta (3.57), (3.58) y las definiciones (3.106) y (3.107) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - E [\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)]}{\sqrt{Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}} &= \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t) + o(b_1^2)}{\xi_2(t) + o(1)} \\ &= \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t)}{\xi_2(t) + o(1)} \\ &\quad + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t)}{\xi_2(t)} \frac{\xi_2(t)}{\xi_2(t) + o(1)} \\ &\quad + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t)}{\xi_2(t)} &= \frac{\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - E [\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)]}{\sqrt{Var [\bar{\lambda}_{WLNW}(t)]}} \frac{\xi_2(t) + o(1)}{\xi_2(t)} \\ &\quad + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right) O(1). \end{aligned}$$

Como, por (3.108), $nb_1^5 = O(1)$ y puesto que $\frac{\xi_2(t)+o(1)}{\xi_2(t)} \rightarrow 1$, se concluye como consecuencia del teorema de Slutsky que

$$\frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t)}{\xi_2(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Una nueva aplicación del teorema de Slutsky a la representación (3.109) permite obtener

$$\sqrt{nb_1} \frac{\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_1(t)}{\xi_2(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

y, finalmente, (3.105). ■

Teorema 3.3.3 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5$, se tiene*

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_3(t), \xi_2(t)) \quad (3.111)$$

donde $\xi_2(t)$ y l_0 se definieron en (3.107) y (3.108), respectivamente, y

$$\xi_3(t) = \frac{1}{2} \mu_K \left(\lambda_H''(t) p(t) + (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t) p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) \right). \quad (3.112)$$

Demostración. En virtud de la representación asintótica (3.59) dada por el teorema 3.2.2, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) \right) &= \sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{nb_1^5} \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) + o_P(1). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Por el teorema 3.3.2

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_1(t), \xi_2(t))$$

donde $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ se definieron en (3.106) y (3.107), respectivamente.

Aplicando el teorema de Slutsky a la representación (3.113), se tiene

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N \left(l_0 \left(\xi_1(t) + \frac{1}{2} \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) \right), \xi_2(t) \right),$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta que según la definición (3.112) de $\xi_3(t)$,

$$\xi_3(t) = \xi_1(t) + \frac{1}{2} \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t),$$

el resultado (3.111). ■

En la demostración del teorema 3.3.4 se hará uso del lema siguiente.

Lema 3.3.1 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2), si se denota por $\overline{\lambda}_{WLLL}^*(t)$ la proyección de Hájek del término $\overline{\lambda}_{WLLL}(t)$, definido en (3.69), se tiene*

$$\frac{Var \left[\overline{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right]}{Var \left[\overline{\lambda}_{WLLL}(t) \right]} \rightarrow 1. \quad (3.114)$$

Demostración. Defínase $Z_i = (T_i, \delta_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$. La proyección de Hájek de $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$ sobre el espacio vectorial \mathcal{S}_n formado por todas las variables de la forma $\sum_{i=1}^n \tau_{ni}(Z_i)$, para funciones medibles arbitrarias τ_{ni} con $E[\tau_{ni}(Z_i)^2] < \infty$, viene dada por

$$\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) = \sum_{i=1}^n E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) | Z_i] - (n-1)E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)].$$

Como $\bar{\lambda}_{WLLL}(t) = p(t)A_n + \lambda_H(t)D_n + \lambda_F(t)$ y $p(t)A_n + \lambda_F(t)$ es ya un elemento de \mathcal{S}_n , bastará con hallar la proyección de Hájek de D_n ,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n E[D_n | Z_i] - (n-1)E[D_n],$$

y la proyección de Hájek de $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$ será

$$\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) = p(t)A_n + \lambda_F(t) + \lambda_H(t)D_n^*.$$

Definiendo

$$D_{n,k} = \frac{1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \sum_{j=1}^n K_{b_2}(t - T_k) K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_k - T_j) (\delta_k - p(t))$$

de modo que sea

$$D_n = \sum_{k=1}^n D_{n,k},$$

se tiene, para $k \neq i$,

$$\begin{aligned} E[D_{n,k} | Z_i] &= \frac{n-2}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E[K_{b_2}(t - T_k) (\delta_k - p(t)) K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_k - T_j)] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_i) (t - T_i) E[K_{b_2}(t - T_k) (\delta_k - p(t)) (T_k - T_i) | Z_i] \\ &= \frac{n-2}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E[K_{b_2}(t - T_k) (\delta_k - p(t)) K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_k - T_j)] \\ &\quad + \frac{1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_i) (t - T_i) \\ &\quad \times (E[K_{b_2}(t - T_k) (\delta_k - p(t)) T_k] - T_i E[K_{b_2}(t - T_k) (\delta_k - p(t))]) \end{aligned} \quad (3.115)$$

y, para $k = i$,

$$\begin{aligned} E[D_{n,i} | Z_i] &= \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_i) (\delta_i - p(t)) E[K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) (T_i - T_j) | Z_i] \\ &= \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_i) (\delta_i - p(t)) \\ &\quad \times (T_i E[K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j)] - E[K_{b_2}(t - T_j) (t - T_j) T_j]) \end{aligned} \quad (3.116)$$

donde, tanto en (3.115) como en (3.116), $i \neq j$.

Así,

$$E[D_n | Z_i] = \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} ((n-2) E[K_{b_2}(t-T_1)(\delta_1-p(t))K_{b_2}(t-T_2)(t-T_2)(T_1-T_2)] \\ + K_{b_2}(t-T_i)(t-T_i)(M_{101}(b_2) - T_i M_{100}(b_2)) \\ - K_{b_2}(t-T_i)(\delta_i-p(t))(M_{011}(b_2) - T_i M_{010}(b_2)))$$

donde, para $r, s, t = 0, 1$, se ha definido

$$M_{rst}(b_2) = E[K_{b_2}(t-T_1)(\delta_1-p(t))^r (t-T_1)^s T_1^t].$$

Como, de acuerdo con (3.41) y (3.42),

$$E[D_n] = \frac{n-1}{n b_2^2 \mu_K h(t)^2} E[K_{b_2}(t-T_1)K_{b_2}(t-T_2)(t-T_2)(T_1-T_2)(\delta_1-p(t))],$$

la proyección de Hájek de D_n es

$$D_n^* = \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \sum_{i=1}^n K_{b_2}(t-T_i) ((t-T_i)(M_{101}(b_2) - T_i M_{100}(b_2)) \\ - (\delta_i-p(t))(M_{011}(b_2) - T_i M_{010}(b_2))) - E[D_n]$$

y la proyección de Hájek de $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$,

$$\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p(t)}{n} \frac{K_{b_1}(t-T_i)}{1-H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{(n-1)\lambda_H(t)}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t-T_i) \right. \\ \left. \times ((t-T_i)(M_{101}(b_2) - T_i M_{100}(b_2)) - (\delta_i-p(t))(M_{011}(b_2) - T_i M_{010}(b_2))) \right) \\ - \lambda_H(t) E[D_n]. \quad (3.117)$$

Respecto a la varianza de $\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)$,

$$Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)] = p(t)^2 Var[A_n] + 2p(t)\lambda_H(t)Cov[A_n, D_n^*] + \lambda_H(t)^2 Var[D_n^*].$$

Empezando por la varianza de D_n^* , si se define

$$D_{1,i}^* = \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t-T_i)(t-T_i)(M_{101}(b_2) - T_i M_{100}(b_2)), \\ D_{2,i}^* = \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t-T_i)(\delta_i-p(t))(M_{011}(b_2) - T_i M_{010}(b_2)),$$

se tiene

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n (D_{1,i}^* - D_{2,i}^*) - E[D_n]$$

y, por tanto,

$$Var[D_n^*] = n (Var[D_{1,1}^*] - 2Cov[D_{1,1}^*, D_{2,1}^*] + Var[D_{2,1}^*]). \quad (3.118)$$

Antes de pasar a estudiar cada una de estas varianzas y covarianzas, procede analizar el orden de los términos $M_{rst}(b_2)$. Haciendo el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, suponiendo $b_2 < \frac{t}{L}$ y haciendo desarrollos de Taylor,

$$\begin{aligned} M_{010}(b_2) &= E[K_{b_2}(t-T_1)(t-T_1)] = \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)(t-t_1)h(t_1)dt_1 \\ &= b_2 \int_{-L}^L K(t_{11})t_{11}h(t-b_2t_{11})dt_{11} = -b_2^2\mu_K h'(t) + o(b_2^2), \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} M_{011}(b_2) &= E[K_{b_2}(t-T_1)(t-T_1)T_1] = \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)(t-t_1)t_1h(t_1)dt_1 \\ &= b_2 \int_{-L}^L K(t_{11})t_{11}(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{11})dt_{11} \\ &= -b_2^2\mu_K (th'(t) + h(t)) + o(b_2^2), \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} M_{100}(b_2) &= E[K_{b_2}(t-T_1)(\delta_1 - p(t))] = \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)(p(t_1) - p(t))h(t_1)dt_1 \\ &= \int_{-L}^L K(t_{11})(p(t-b_2t_{11}) - p(t))h(t-b_2t_{11})dt_{11} \\ &= b_2^2\mu_K \left(\frac{1}{2}p''(t)h(t) + h'(t)p'(t) \right) + o(b_2^2) \end{aligned} \quad (3.121)$$

y

$$\begin{aligned} M_{101}(b_2) &= E[K_{b_2}(t-T_1)(\delta_1 - p(t))T_1] = \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)(p(t_1) - p(t))t_1h(t_1)dt_1 \\ &= \int_{-L}^L K(t_{11})(p(t-b_2t_{11}) - p(t))(t-b_2t_{11})h(t-b_2t_{11})dt_{11} \\ &= b_2^2\mu_K \left(\frac{1}{2}p''(t)h(t)t + p'(t)h'(t)t + p'(t)h(t) \right) + o(b_2^2). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Volviendo a la primera varianza a la derecha de la igualdad en (3.118),

$$\begin{aligned} Var[D_{1,1}^*] &= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1)^2 (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))^2 \right] \\ &\quad - \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} (E[K_{b_2}(t-T_1)(t-T_1)(M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))])^2 \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1)^2 (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))^2 \right] \\ &\quad - \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} (M_{010}(b_2)M_{101}(b_2) - M_{011}(b_2)M_{100}(b_2))^2 \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1)^2 (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))^2 \right] - O(n^{-2}b_2^4), \end{aligned}$$

donde la última acotación se basa en los resultados (3.119)-(3.122). Ahora, procediendo como de costumbre haciendo el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, desarrollos de Taylor y volviendo a emplear los resultados (3.119)-(3.122),

$$E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1)^2 (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2(t-t_1)^2 (M_{101}(b_2) - t_1 M_{100}(b_2))^2 h(t_1) dt_1 \\
&= b_2 \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11}^2 (M_{101}(b_2) - t M_{100}(b_2) + b_2 t_{11} M_{100}(b_2))^2 h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\
&= b_2^5 \mu_K^2 \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11}^2 dt_{11} p'(t)^2 h(t)^3 + o(b_2^5)
\end{aligned}$$

y, por tanto, para $Var [D_{1,1}^*]$ se tiene

$$Var [D_{1,1}^*] = \frac{b_2}{n^2} \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11}^2 dt_{11} p'(t)^2 h(t)^{-1} + o(n^{-2} b_2). \quad (3.123)$$

Respecto a la segunda varianza a la derecha de la igualdad en (3.118),

$$\begin{aligned}
Var [D_{2,1}^*] &= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (\delta_1 - T_1)^2 (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))^2 \right] \\
&\quad - \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} (E [K_{b_2}(t-T_1)(\delta_1 - T_1)(M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))])^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (\delta_1 - T_1)^2 (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))^2 \right] \\
&\quad - \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} (M_{100}(b_2) M_{011}(b_2) - M_{101}(b_2) M_{010}(b_2))^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (\delta_1 - T_1)^2 (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))^2 \right] - O(n^{-2} b_2^4)
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de los resultados (3.119)-(3.122). Procediendo como en el caso anterior,

$$\begin{aligned}
&E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (\delta_1 - T_1)^2 (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))^2 \right] \\
&= \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 (p(t_1)(1-2p(t)) + p(t)^2) (M_{011}(b_2) - t_1 M_{010}(b_2))^2 h(t_1) dt_1 \\
&= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L K(t_{11})^2 (p(t - b_2 t_{11})(1-2p(t)) + p(t)^2) \\
&\quad \times (M_{011}(b_2) - t M_{010}(b_2) + b_2 t_{11} M_{010}(b_2))^2 h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\
&= b_2^3 \mu_K^2 c_K p(t)(1-p(t)) h(t)^3 + o(b_2^3)
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$Var [D_{2,1}^*] = \frac{1}{n^2 b_2} c_K p(t)(1-p(t)) h(t)^{-1} + o(n^{-2} b_2^{-1}). \quad (3.124)$$

Por último, en cuanto a la covarianza de la expresión (3.118),

$$\begin{aligned}
Cov [D_{1,1}^*, D_{2,1}^*] &= \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E \left[K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1)(\delta_1 - p(t)) \right. \\
&\quad \times (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2))(M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] \\
&\quad - \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} (M_{010}(b_2) M_{101}(b_2) - M_{011}(b_2) M_{100}(b_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (M_{100}(b_2)M_{011}(b_2) - M_{101}(b_2)M_{010}(b_2)) \\
& = \frac{(n-1)^2}{n^4 b_2^4 \mu_K^2 h(t)^4} E [K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1) (\delta_1 - p(t)) \\
& \quad \times (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] - O(n^{-2} b_2^4)
\end{aligned}$$

donde una vez más se emplean los resultados (3.119)-(3.122). Ahora, repitiendo el razonamiento de los casos anteriores

$$\begin{aligned}
& E [K_{b_2}(t-T_1)^2 (t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] \\
& = \int_0^\infty K_{b_2}(t-t_1)^2 (t-t_1) (p(t_1) - p(t)) (M_{101}(b_2) - t_1 M_{100}(b_2)) \\
& \quad \times (M_{011}(b_2) - t_1 M_{010}(b_2)) h(t_1) dt_1 \\
& = \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11} (p(t - b_2 t_{11}) - p(t)) (M_{101}(b_2) - t M_{100}(b_2) + b_2 t_{11} M_{100}(b_2)) \\
& \quad \times (M_{011}(b_2) - t M_{010}(b_2) + b_2 t_{11} M_{010}(b_2)) h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \\
& = b_2^5 \mu_K^2 p'(t)^2 h(t)^3 \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11}^2 dt_{11} + o(b_2^5),
\end{aligned}$$

por lo que

$$Cov [D_{1,1}^*, D_{2,1}^*] = \frac{b_2}{n^2} \int_{-L}^L K(t_{11})^2 t_{11}^2 dt_{11} p'(t)^2 h(t)^3 + o(n^{-2} b_2). \quad (3.125)$$

Reuniendo los resultados (3.123), (3.124) y (3.125), se obtiene finalmente

$$Var [D_n^*] = \frac{1}{n b_2} \frac{c_K p(t) (1-p(t))}{h(t)} + o(n^{-1} b_2^{-1}). \quad (3.126)$$

Respecto a la covarianza de A_n y D_n^* ,

$$Cov [A_n, D_n^*] = Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{1,i}^* \right] - Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{2,i}^* \right].$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left| Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{1,i}^* \right] \right| \leq \left(Var [A_n] Var \left[\sum_{i=1}^n D_{1,i}^* \right] \right)^{1/2} = (Var [A_n] n Var [D_{1,1}^*])^{1/2}$$

y, teniendo nuevamente en cuenta (V.2),

$$Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{1,i}^* \right] = O(n^{-1/2} b_1^{-1/2}) O(n^{1/2}) O(n^{-1} b_1^{1/2}) = O(n^{-1}). \quad (3.127)$$

Además,

$$\begin{aligned}
Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{2,i}^* \right] & = n Cov \left[\frac{1}{n} \frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}}, \right. \\
& \quad \left. \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right. \\
 &\quad \left. \times K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2)) \right] \\
 &\quad - \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\
 &\quad \times E [K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] .
 \end{aligned}$$

Procediendo del modo acostumbrado efectuando el cambio de variable $\frac{t-T_1}{b_1} = t_{11}$, tomando $b_1 < \frac{t \wedge (t_0-t)}{L}$ y mediante desarrollos de Taylor,

$$\begin{aligned}
 &E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2)) \right] \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{1-H(t_1) + \frac{1}{n}} K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t-t_1) (p(t_1) - p(t)) (M_{011}(b_2) - t_1 M_{010}(b_2)) h(t_1) dt_1 \\
 &= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L \frac{1}{1-H(t-b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} K(t_{11}) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) (p(t-b_1 t_{11}) - p(t)) \\
 &\quad \times (M_{011}(b_2) - (t-b_1 t_{11}) M_{010}(b_2)) h(t-b_1 t_{11}) dt_{11} \\
 &= \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L K(t_{11}) K\left(\frac{t_{11} b_1}{b_2}\right) (p(t-b_1 t_{11}) - p(t)) \\
 &\quad \times (M_{011}(b_2) - (t-b_1 t_{11}) M_{010}(b_2)) \varphi_1(t-b_1 t_{11}) dt_{11} + O(n^{-1} b_2) \\
 &= b_1 b_2 \mu_K \int_{-L}^L K(t_{11}) K(ct_{11}) dt_{11} p'(t) \varphi_1(t) h(t) + o(b_1 b_2) + O(n^{-1} b_2) \\
 &= O(b_2^2)
 \end{aligned}$$

donde se han tenido en cuenta **(V.2)**, **(V.1)**, (3.13), la definición (3.14) de φ_l y los resultados (3.119) y (3.120).

Por otra parte, empleando (3.8),

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] = E [A_n + \lambda_H(t)] = \lambda_H(t) + o(1)$$

y, de acuerdo con los resultados (3.119)-(3.122),

$$\begin{aligned}
 E [K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] &= M_{100}(b_2) M_{011}(b_2) - M_{101}(b_2) M_{010}(b_2) \\
 &= O(b_2^4) = O(b_1^4),
 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
 Cov \left[A_n, \sum_{i=1}^n D_{2,i}^* \right] &= \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right. \\
 &\quad \left. \times K_{b_2}(t-T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2)) \right] \\
 &\quad - \frac{n-1}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E [K_{b_2}(t - T_1) (\delta_1 - p(t)) (M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2))] \\ & = O(n^{-1}) + O(n^{-1}b_1^2) = O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (3.128)$$

De (3.127) y (3.128) se concluye que

$$Cov[A_n, D_n^*] = O(n^{-1}). \quad (3.129)$$

Reuniendo los resultados (3.9), (3.126) y (3.129) se tiene la siguiente expresión asintótica para la varianza de $\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)$

$$Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)] = \frac{1}{nb_1} \frac{c_K p(t)^2 h(t)}{(1 - H(t))^2} + \frac{1}{nb_2} \frac{c_K \lambda_H(t)^2 p(t) (1 - p(t))}{h(t)} + O(n^{-1})$$

y, por (V.2),

$$Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)] = \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_F(t) (p(t) + a(1 - p(t)))}{1 - H(t)} + O(n^{-1}). \quad (3.130)$$

De las expresiones asintóticas para las varianzas de $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$ y de su proyección de Hájek, $\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)$, dadas por el teorema 3.2.3 y por (3.130), respectivamente, se deduce inmediatamente (3.114). ■

Teorema 3.3.4 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5$, se tiene*

$$\sqrt{nb_1} (\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t)) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_4(t), \xi_2(t)) \quad (3.131)$$

donde $\xi_2(t)$ y l_0 se definieron en (3.107) y (3.108), respectivamente, y

$$\xi_4(t) = \frac{1}{2} \mu_K \left(\lambda_H''(t) p(t) + \frac{\lambda_H(t) p''(t)}{a^2} \right). \quad (3.132)$$

Demostración. En el teorema 3.2.3 se dio la expresión asintótica

$$\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) + o_P(n^{-1/2} b_1^{-1/2}) \quad (3.133)$$

donde $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$ fue definido en (3.69).

Según el lema 3.3.1 la proyección de Hájek de $\bar{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)$, verifica

$$\frac{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]} \rightarrow 1.$$

Por tanto, el teorema 3.3.1 permite concluir que

$$\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]}} - \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}} = o_P(1).$$

De este modo, la normalidad asintótica de $\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - E[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}(t)]}}$ se deduce por el teorema de Slutsky

de la de $\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}}$, que se prueba a continuación.

Si, teniendo en cuenta (3.117), se define

$$V_{n,i}^* = \frac{1}{n} \frac{p(t)K_{b_1}(t - T_i)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} + \frac{(n-1)\lambda_H(t)}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_i) ((t - T_i)(M_{101}(b_2) - T_i M_{100}(b_2)) - (\delta_i - p(t))(M_{011}(b_2) - T_i M_{010}(b_2))) - \frac{1}{n} E[D_n],$$

puede escribirse

$$\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) = \sum_{i=1}^n V_{n,i}^*$$

donde $V_{n,i}^*, i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$, constituye un esquema triangular de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por el teorema de Liapunov, basta para probar la normalidad asintótica de $\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t)]}}$ con comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE \left[|V_{n,1}^* - E(V_{n,1}^*)|^3 \right]}{\left(Var \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right] \right)^{3/2}} = 0. \quad (3.134)$$

Los mismos razonamientos empleados para obtener la desigualdad (3.110) permiten concluir que

$$\frac{nE \left[|V_{n,1}^* - E(V_{n,1}^*)|^3 \right]}{\left(Var \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right] \right)^{3/2}} \leq \frac{8nE \left[|V_{n,1}^*|^3 \right]}{\left(Var \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right] \right)^{3/2}}. \quad (3.135)$$

Como el núcleo tiene soporte en $[-L, L]$, se tiene

$$\begin{aligned} V_{n,1}^* &= V_{n,1}^* \mathbf{1}\{T_1 \leq t + b_1 L\} + V_{n,1}^* \mathbf{1}\{T_1 > t + b_1 L\} \\ &= \frac{1}{n} \frac{p(t)K_{b_1}(t - T_1)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \mathbf{1}\{T_1 \leq t + b_1 L\} \\ &\quad + \frac{(n-1)\lambda_H(t)}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} K_{b_2}(t - T_1) \left((t - T_1)(M_{101}(b_2) - T_1 M_{100}(b_2)) \right. \\ &\quad \left. - (\delta_1 - p(t))(M_{011}(b_2) - T_1 M_{010}(b_2)) \right) - \frac{1}{n} E(D_n) \end{aligned}$$

y si se supone $b_1 < \frac{t_0 - t}{L}$, de manera que $t + b_1 L < t_0$,

$$\begin{aligned} |V_{n,1}^*| &\leq \|K\|_\infty \left(\frac{1}{nb_1} \frac{1}{1 - H(t_0)} + \frac{(n-1)\lambda_H(t)}{n^2 b_2^2 \mu_K h(t)^2} \right. \\ &\quad \left. \times (2t_0 (|M_{101}(b_2)| + t_0 |M_{100}(b_2)|) + |M_{011}(b_2)| + t_0 |M_{010}(b_2)|) \right) + \frac{1}{n} |E(D_n)| \quad c.s. \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta **(V.2)**, (3.32) y (3.119)-(3.122),

$$E \left[|V_{n,1}^*|^3 \right] = O(n^{-3} b_1^{-3}) + O(n^{-3} b_1^6) = O(n^{-3} b_1^{-3})$$

y, por (3.135) y (3.130),

$$\frac{nE \left[|V_{n,1}^* - E(V_{n,1}^*)|^3 \right]}{\left(\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right] \right)^{3/2}} = O(n)O \left(n^{3/2}b_1^{3/2} \right) O \left(n^{-3}b_1^{-3} \right) = O \left(n^{-1/2}b_1^{-3/2} \right),$$

con lo cual, y dado que, por **(V.1)**, $nb_1^3 \rightarrow \infty$, se cumple la condición de Liapunov (3.134) y, por tanto,

$$\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) - E \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right]}{\sqrt{\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}^*(t) \right]}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Igualmente, como se razonaba más arriba, se tiene

$$\frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - E \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) \right]}{\sqrt{\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) \right]}} = \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - E \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) \right]}{\sqrt{\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) \right]}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Ahora, teniendo en cuenta las definiciones (3.107) y (3.132) de ξ_2 y ξ_4 , respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - E \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) \right]}{\sqrt{\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) \right]}} &= \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t) + o(b_1^2)}{\xi_2(t) + o(1)} \\ &= \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t)}{\xi_2(t) + o(1)} + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right) \\ &= \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t)}{\xi_2(t)} \frac{\xi_2(t)}{\xi_2(t) + o(1)} \\ &\quad + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t)}{\xi_2(t)} &= \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - E \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) \right]}{\sqrt{\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{WLLL}(t) \right]}} \frac{\xi_2(t) + o(1)}{\xi_2(t)} \\ &\quad + o \left(n^{1/2} b_1^{5/2} \right) O(1), \end{aligned}$$

por lo que, al ser $nb_1^5 = O(1)$ por **(V.1)** y dado que $\frac{\xi_2(t)+o(1)}{\xi_2(t)} \rightarrow 1$, se concluye como consecuencia del teorema de Slutsky que

$$\sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t)}{\xi_2(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Una aplicación ulterior del teorema de Slutsky a la representación (3.133) permite obtener

$$\sqrt{nb_1} \frac{\hat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_4(t)}{\xi_2(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta la definición de l_0 , el resultado (3.131). ■

Teorema 3.3.5 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5$, se tiene*

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_5(t), \xi_2(t)) \quad (3.136)$$

donde $\xi_2(t)$ y l_0 se definieron en (3.107) y (3.108), respectivamente, y

$$\xi_5(t) = \frac{1}{2} \mu_K \left(\lambda_H''(t) p(t) + (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) + \frac{\lambda_H(t) p''(t)}{a^2} \right). \quad (3.137)$$

Demostración. Multiplicando por $\sqrt{nb_1}$ la representación (3.72) de $\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t)$ obtenida en el teorema 3.2.4, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) \right) &= \sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{nb_1^5} \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) \\ &\quad + o_P(1). \end{aligned} \quad (3.138)$$

En el teorema 3.3.4 se demuestra que

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{WLLL}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_4(t), \xi_2(t))$$

donde $\xi_4(t)$ y $\xi_2(t)$ se definieron en (3.132) y (3.107), respectivamente.

Aplicando el teorema de Slutsky a la representación (3.138) se obtiene

$$\sqrt{nb_1} \left(\widehat{\lambda}_{RRLL}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N \left(l_0 \left(\xi_4(t) + \frac{1}{2} \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_F(t) \right), \xi_2(t) \right)$$

y, teniendo en cuenta la definición (3.137) de $\xi_5(t)$, finalmente (3.136). ■

En la demostración del teorema 3.3.6 se necesitará el lema siguiente.

Lema 3.3.2 *Bajo las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2), si se denota por $\overline{\lambda}_{TWP}^*(t)$ la proyección de Hájek del término $\lambda_{TWP}(t)$, definido en (3.81), se tiene*

$$\frac{\text{Var} \left[\overline{\lambda}_{TWP}^*(t) \right]}{\text{Var} \left[\overline{\lambda}_{TWP}(t) \right]} \rightarrow 1. \quad (3.139)$$

Demostración. En la demostración del teorema 3.2.5 se expresó $\overline{\lambda}_{TWP}(t)$ como suma de dos términos,

$$J_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) p(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}}$$

y

$$J_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_i) \left(\widehat{\psi}(T_i) - \widehat{h}(T_i) p(T_i) \right) \mathbf{1}(T_i \in I)}{\left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n} \right) h(T_i)}.$$

Como J_1 es una suma de variables aleatorias i.i.d., la proyección de Hájek de $\overline{\lambda}_{TWP}(t)$ es

$$\overline{\lambda}_{TWP}^*(t) = J_1 + J_2^*$$

donde por J_2^* se denota la proyección de Hájek de J_2 , dada por la siguiente expresión

$$J_2^* = \sum_{i=1}^n E[J_2 | Z_i] - (n-1)E[J_2]$$

donde Z_i denota el vector aleatorio (T_i, δ_i) .

Definiendo

$$J_{2,k} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \frac{K_{b_1}(t - T_k) K_{b_2}(T_k - T_j) (\delta_j - p(T_k)) \mathbf{1}(T_k \in I)}{(1 - H(T_k) + \frac{1}{n}) h(T_k)},$$

puede escribirse

$$J_2 = \sum_{k=1}^n J_{2,k}.$$

Ahora, para $k \neq i$,

$$\begin{aligned} E[J_{2,k} | Z_i] &= \frac{n-2}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_k) K_{b_2}(T_k - T_j) (\delta_j - p(T_k)) \mathbf{1}(T_k \in I)}{(1 - H(T_k) + \frac{1}{n}) h(T_k)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_k) K_{b_2}(T_k - T_i) (\delta_i - p(T_k)) \mathbf{1}(T_k \in I)}{(1 - H(T_k) + \frac{1}{n}) h(T_k)} \mid Z_i \right] \end{aligned} \quad (3.140)$$

y para $k = i$,

$$\begin{aligned} E[J_{2,i} | Z_i] &= \frac{n-1}{n^2} E \left[K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I) \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n} \right)^{-1} h(T_i)^{-1} \mid Z_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2} K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(0) (\delta_i - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I) \\ &\quad \times \left(1 - H(T_i) + \frac{1}{n} \right)^{-1} h(T_i)^{-1} \end{aligned} \quad (3.141)$$

donde, tanto en (3.140) como en (3.141), $i \neq j$.

Así,

$$\begin{aligned} E[J_2 | Z_i] &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right] \\ &\quad + \frac{n-1}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_j) K_{b_2}(T_j - T_i) (\delta_i - p(T_j)) \mathbf{1}(T_j \in I)}{(1 - H(T_j) + \frac{1}{n}) h(T_j)} \mid Z_i \right] \\ &\quad + \frac{n-1}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(T_i - T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} \mid Z_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \frac{K_{b_1}(t - T_i) K_{b_2}(0) (\delta_i - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1 - H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} \end{aligned}$$

donde $i \neq j$.

Como

$$E[J_2] = \frac{n-1}{n} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1) K_{b_2}(T_1-T_2) (p(T_2) - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right],$$

la proyección de Hájek de J_2 es

$$J_2^* = J_{2,1}^* + J_{2,2}^* + J_{2,3}^* - E[J_2]$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} J_{2,1}^* &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_j) K_{b_2}(T_j-T_i) (\delta_i - p(T_j)) \mathbf{1}(T_j \in I)}{(1-H(T_j) + \frac{1}{n}) h(T_j)} \mid Z_i \right], \\ J_{2,2}^* &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_i) K_{b_2}(T_i-T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1-H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} \mid Z_i \right], \\ J_{2,3}^* &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{K_{b_1}(t-T_i) K_{b_2}(0) (\delta_i - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1-H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} \end{aligned}$$

y se supone $i \neq j$.

Evidentemente, la varianza de $\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)$ es

$$Var \left[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) \right] = Var[J_1] + 2Cov[J_1, J_2^*] + Var[J_2^*],$$

y a continuación se tratará de hallar expresiones asintóticas para $Var[J_2^*]$ y $Cov[J_1, J_2^*]$ —en (3.87) se obtuvo la expresión correspondiente a $Var[J_1]$ —. Obviamente,

$$\begin{aligned} Var[J_2^*] &= Var[J_{2,1}^*] + Var[J_{2,2}^*] + Var[J_{2,3}^*] \\ &\quad + 2Cov[J_{2,1}^*, J_{2,2}^*] + 2Cov[J_{2,1}^*, J_{2,3}^*] + 2Cov[J_{2,2}^*, J_{2,3}^*]. \end{aligned}$$

Ahora, si se define adicionalmente,

$$\begin{aligned} M_1 &= Var \left[E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1) K_{b_2}(T_1-T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \mid Z_2 \right] \right], \\ M_2 &= Var \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1) K_{b_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right], \\ M_3 &= Var \left[E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2) K_{b_2}(T_2-T_1) (\delta_1 - p(T_2)) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1-H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \mid Z_2 \right] \right], \end{aligned}$$

se tiene

$$Var[J_{2,1}^*] = \frac{(n-1)^2}{n^4} ((n-1)M_1 + M_2), \quad (3.142)$$

$$Var[J_{2,2}^*] = \frac{(n-1)^2}{n^4} ((n-1)M_3 + M_2) \quad (3.143)$$

y

$$Var[J_{2,3}^*] = \frac{1}{n^3} M_2. \quad (3.144)$$

Se estudia a continuación cada uno de los términos M_1, M_2 y M_3 . Para M_1 , se tiene

$$M_1 = E \left[\left(\int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2) (\delta_2 - p(t_1))}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right)^2 \right] - \left(E \left[\int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2) (\delta_2 - p(t_1))}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right] \right)^2 \quad (3.145)$$

y la primera de estas dos esperanzas es igual a

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\delta_2 \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 - \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2) p(t_1)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right)^2 \right] \\ = & E \left[p(T_2) \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right. \\ & \times \left(\int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 - 2 \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2) p(t_1)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right) \\ & \left. + \left(\int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-T_2) p(t_1)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right)^2 \right] \\ = & \int_0^{\infty} \left(p(t_2) \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-t_2)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-t_2) (1-2p(t_1))}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right. \\ & \left. + \left(\int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-t_2) p(t_1)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 \right)^2 \right) h(t_2) dt_2. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_2} = t_{21}$ y tomando $b_1 < \frac{(t_0-t) \wedge (t-\varepsilon) \wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$, esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_2} \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} \left(p(t - b_2 t_{21}) \int_{-L}^L \frac{K(t_{11}) K(t_{21} - \frac{b_1 t_{11}}{b_2})}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} dt_{11} \right. \\ & \times \int_{-L}^L \frac{K(t_{11}) K(t_{21} - \frac{b_1 t_{11}}{b_2}) (1 - 2p(t - b_1 t_{11}))}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} dt_{11} \\ & \left. + \left(\int_{-L}^L \frac{K(t_{11}) K(t_{21} - \frac{b_1 t_{11}}{b_2}) p(t - b_1 t_{11})}{1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n}} dt_{11} \right)^2 \right) h(t - b_2 t_{21}) dt_{21} \\ = & \frac{1}{b_1} \frac{ap(t) (1 - p(t)) h(t)}{(1 - H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - at_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(b_1^{-1}) \end{aligned}$$

donde se llega a la última expresión empleando desarrollos de Taylor y teniendo en cuenta **(V.2)**. Por otra parte, respecto a la segunda esperanza de (3.145), se vio al estudiar la esperanza de J_2 en la demostración del teorema 3.2.5 que

$$\int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1) K_{b_2}(t_1-t_2) (p(t_2) - p(t_1)) h(t_2)}{1 - H(t_1) + \frac{1}{n}} dt_1 dt_2 = O(b_1^2),$$

por lo cual, se tiene

$$M_1 = \frac{1}{b_1} \frac{ap(t)(1-p(t))h(t)}{(1-H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - at_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21} + o(b_1^{-1}). \quad (3.146)$$

Pasando a M_2 ,

$$M_2 = E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)^2 K_{b_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2 h(T_1)^2} \right] - \left(E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right] \right)^2$$

y, mediante un razonamiento habitual, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1)^2 K_{b_2}(0)^2 (\delta_1 - p(T_1))^2 \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n})^2 h(T_1)^2} \right] \\ &= \frac{K(0)^2}{b_2^2} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t - t_1)^2 p(t_1) (1 - p(t_1))}{(1 - H(t_1) + \frac{1}{n})^2 h(t_1)} dt_1 \\ &= \frac{K(0)^2}{b_1 b_2^2} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} \frac{K(t_{11})^2 p(t - b_1 t_{11}) (1 - p(t - b_1 t_{11}))}{(1 - H(t - b_1 t_{11}) + \frac{1}{n})^2 h(t - b_1 t_{11})} dt_{11} \\ &= \frac{1}{b_1^3} \frac{a^2 K(0)^2 p(t) (1 - p(t))}{(1 - H(t))^2 h(t)} c_K + o(b_1^{-3}) \end{aligned}$$

y que

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(0) (\delta_1 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \right] = 0,$$

por lo que

$$M_2 = O(b_1^{-3}). \quad (3.147)$$

Respecto M_3 , como se hizo con M_1 , puede escribirse

$$M_3 = E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_2)^2 \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1 - H(T_2) + \frac{1}{n})^2 h(T_2)^2} \left(\int_0^\infty K_{b_2}(T_2 - t_1) (p(t_1) - p(T_2)) h(t_1) dt_1 \right)^2 \right] - \left(E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_2) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1 - H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \int_0^\infty K_{b_2}(T_2 - t_1) (p(t_1) - p(T_2)) h(t_1) dt_1 \right] \right)^2.$$

Ahora, la primera esperanza es

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t - t_2)^2}{(1 - H(t_2) + \frac{1}{n})^2 h(t_2)} \left(\int_0^\infty K_{b_2}(t_2 - t_1) (p(t_1) - p(t_2)) h(t_1) dt_1 \right)^2 dt_2 \\ &= \frac{1}{b_2} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} \frac{K(t_{21})^2}{(1 - H(t - b_1 t_{21}) + \frac{1}{n})^2 h(t - b_1 t_{21})} \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} K \left(t_{11} - \frac{b_1 t_{21}}{b_2} \right) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t - b_1 t_{21})) h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$. Para $b_1 < \frac{(t_0-t) \wedge (t-\varepsilon) \wedge t/2}{L}$ y $b_2 < \frac{t}{2L}$, esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L \frac{K(t_{21})^2}{(1 - H(t - b_1 t_{21}) + \frac{1}{n})^2 h(t - b_1 t_{21})} \\ & \times \left(\int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} K \left(t_{11} - \frac{b_1 t_{21}}{b_2} \right) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t - b_1 t_{21})) h(t - b_2 t_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21} \\ & = o(b_1^{-1}) \end{aligned}$$

donde para obtener el orden se ha aplicado el teorema de convergencia dominada y **(V.2)**. Por otra parte, tal como se probó al estudiar la esperanza de J_2 ,

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_2) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1 - H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \int_0^\infty K_{b_2}(T_2 - t_1) (p(t_1) - p(T_2)) dt_1 \right] \\ & = \int_\varepsilon^{t_0} \frac{K_{b_1}(t - t_2)}{1 - H(t_2) + \frac{1}{n}} \int_0^\infty K_{b_2}(t_2 - t_1) (p(t_1) - p(t_2)) h(t_1) dt_1 dt_2 = O(b_1^2), \end{aligned}$$

con lo cual, se tiene

$$M_3 = o(b_1^{-1}). \quad (3.148)$$

Trasladando los resultados (3.146), (3.147) y (3.148) a (3.142), (3.143) y (3.144) y teniendo en cuenta que, por **(V.1)**, $nb_1^2 \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} Var [J_{2,1}^*] & = \frac{1}{nb_1} \frac{ap(t)(1-p(t))h(t)}{(1-H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - at_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21} \\ & + o(n^{-1}b_1^{-1}), \end{aligned}$$

$$Var [J_{2,2}^*] = o(n^{-1}b_1^{-1})$$

y

$$Var [J_{2,3}^*] = o(n^{-1}b_1^{-1}).$$

Además, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$Cov [J_{2,1}^*, J_{2,2}^*] = o(n^{-1}b_1^{-1}),$$

$$Cov [J_{2,1}^*, J_{2,3}^*] = o(n^{-1}b_1^{-1})$$

y

$$Cov [J_{2,2}^*, J_{2,3}^*] = o(n^{-1}b_1^{-1}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var} [J_2^*] &= \frac{1}{nb_1} \frac{ap(t)(1-p(t))h(t)}{(1-H(t))^2} \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(t_{11}) K(t_{21} - at_{11}) dt_{11} \right)^2 dt_{21} \\ &\quad + o(n^{-1}b_1^{-1}). \end{aligned} \quad (3.149)$$

Debe considerarse igualmente la covarianza de J_1 y J_2^* . Obviamente,

$$\text{Cov} [J_1, J_2^*] = \text{Cov} [J_1, J_{2,1}^*] + \text{Cov} [J_1, J_{2,2}^*] + \text{Cov} [J_1, J_{2,3}^*] \quad (3.150)$$

y, definiendo

$$\begin{aligned} M_4 &= \text{Cov} \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2)p(T_2)\mathbf{1}(T_2 \in I)}{1-H(T_2) + \frac{1}{n}}, \right. \\ &\quad \left. E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(T_1-T_2)(\delta_2 - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n})h(T_1)} \middle| Z_2 \right] \right], \\ M_5 &= \text{Cov} \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)p(T_1)\mathbf{1}(T_1 \in I)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}}, \frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(0)(\delta_1 - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n})h(T_1)} \right], \\ M_6 &= \text{Cov} \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2)p(T_2)\mathbf{1}(T_2 \in I)}{1-H(T_2) + \frac{1}{n}}, \right. \\ &\quad \left. E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2)K_{b_2}(T_2-T_1)(\delta_1 - p(T_2))\mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1-H(T_2) + \frac{1}{n})h(T_2)} \middle| Z_2 \right] \right], \end{aligned}$$

se tiene

$$\text{Cov} [J_1, J_{2,1}^*] = \frac{n-1}{n^3} ((n-1)M_4 + M_5), \quad (3.151)$$

$$\text{Cov} [J_1, J_{2,2}^*] = \frac{n-1}{n^3} ((n-1)M_6 + M_5) \quad (3.152)$$

y

$$\text{Cov} [J_1, J_{2,3}^*] = \frac{1}{n^2} M_5. \quad (3.153)$$

Se estudia a continuación el orden asintótico de los términos M_4 , M_5 y M_6 . Escribiendo

$$\begin{aligned} M_4 &= E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2)p(T_2)\mathbf{1}(T_2 \in I)}{1-H(T_2) + \frac{1}{n}} \right. \\ &\quad \times E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(T_1-T_2)(\delta_2 - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n})h(T_1)} \middle| Z_2 \right] \Big] \\ &\quad - E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)p(T_1)\mathbf{1}(T_1 \in I)}{1-H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\ &\quad \times E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(T_1-T_2)(p(T_2) - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n})h(T_1)} \right], \end{aligned}$$

el primer sumando es

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_2)p(t_2)h(t_2)}{1-H(t_2)+\frac{1}{n}} \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_1)K_{b_2}(t_1-t_2)(p(t_2)-p(t_1))}{1-H(t_1)+\frac{1}{n}} dt_1 dt_2 \\ = & \frac{1}{b_2} \int_{\frac{t-\varepsilon}{b_1}}^{\frac{t-t_0}{b_1}} \frac{K(t_{21})p(t-b_1t_{21})h(t-b_1t_{21})}{1-H(t-b_1t_{21})+\frac{1}{n}} \\ & \times \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} \frac{K(t_{11})K\left(\frac{b_1(t_1-t_2)}{b_2}\right)(p(t-b_1t_{21})-p(t-b_1t_{11}))}{1-H(t-b_1t_{11})+\frac{1}{n}} dt_{11} dt_{21} \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_1} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$. Tomando $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)}{L}$ la última integral es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_2} \int_{-L}^L \frac{K(t_{21})p(t-b_1t_{21})h(t-b_1t_{21})}{1-H(t-b_1t_{21})+\frac{1}{n}} \\ & \times \int_{-L}^L \frac{K(t_{11})K\left(\frac{b_1(t_1-t_2)}{b_2}\right)(p(t-b_1t_{21})-p(t-b_1t_{11}))}{1-H(t-b_1t_{11})+\frac{1}{n}} dt_{11} dt_{21} \\ = & o(b_1^{-1}) \end{aligned}$$

donde, para establecer el orden, se ha aplicado el teorema de convergencia dominada y **(V.2)**. Ahora, teniendo en cuenta que, según se probó al estudiar las esperanzas de J_1 y J_2 en la demostración del teorema 3.2.5,

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)p(T_1)\mathbf{1}(T_1 \in I)}{1-H(T_1)+\frac{1}{n}} \right] = O(1)$$

y

$$E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(T_1-T_2)(p(T_2)-p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1)+\frac{1}{n})h(T_1)} \right] = O(b_1^2),$$

se tiene

$$M_4 = o(b_1^{-1}). \quad (3.154)$$

En cuanto a M_5 ,

$$\begin{aligned} M_5 = & E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)^2 K_{b_2}(0)p(T_1)(\delta_1 - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1)+\frac{1}{n})^2 h(T_1)} \right] \\ & - E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)p(T_1)\mathbf{1}(T_1 \in I)}{1-H(T_1)+\frac{1}{n}} \right] E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1)K_{b_2}(0)(\delta_1 - p(T_1))\mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1)+\frac{1}{n})h(T_1)} \right] \end{aligned}$$

y es inmediato comprobar que

$$M_5 = O(b_1^2). \quad (3.155)$$

Por último, en el caso de M_6 ,

$$M_6 = E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2)p(T_2)\mathbf{1}(T_2 \in I)}{1-H(T_2)+\frac{1}{n}} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_2) K_{b_2}(T_2 - T_1) (\delta_1 - p(T_2)) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1 - H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \Big| Z_2 \right] \\ & - E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) p(T_1) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{1 - H(T_1) + \frac{1}{n}} \right] \\ & \times E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_2) K_{b_2}(T_2 - T_1) (\delta_1 - p(T_2)) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1 - H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \right] \end{aligned}$$

y el primer sumando es

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t - t_2)^2 p(t_2) \int_0^{\infty} K_{b_2}(t_2 - t_1) (p(t_1) - p(t_2)) h(t_1) dt_1}{(1 - H(t_2) + \frac{1}{n})^2} dt_2 \\ & = \frac{1}{b_1} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} K(t_{21})^2 p(t - b_1 t_{21}) \int_{-\infty}^{\frac{t}{b_2}} K\left(t_{11} - \frac{b_1 t_{21}}{b_2}\right) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t - b_1 t_{21})) \\ & \quad \times \frac{h(t - b_2 t_{11})}{(1 - H(t - b_1 t_{21}) + \frac{1}{n})^2} dt_{11} dt_{21} \\ & = \frac{1}{b_1} \int_{-L}^L K(t_{21})^2 p(t - b_1 t_{21}) \int_{-L(1+\frac{b_1}{b_2})}^{L(1+\frac{b_1}{b_2})} K\left(t_{11} - \frac{b_1 t_{21}}{b_2}\right) (p(t - b_2 t_{11}) - p(t - b_1 t_{21})) \\ & \quad \times \frac{h(t - b_2 t_{11})}{(1 - H(t - b_1 t_{21}) + \frac{1}{n})^2} dt_{11} dt_{21} \\ & = o(b_1^{-1}) \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_1}{b_2} = t_{11}$, $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$, en la penúltima igualdad se ha tomado $b_1 < \frac{(t_0-t)\wedge(t-\varepsilon)\wedge t/2}{L}$, $b_2 < \frac{t}{2L}$ y el orden asintótico se ha obtenido aplicando el teorema de la convergencia dominada. Si se tienen en cuenta una vez más los resultados relativos a las esperanzas de J_1 y J_2 , se tiene finalmente

$$M_6 = o(b_1^{-1}). \tag{3.156}$$

Llevando los resultados (3.154), (3.155) y (3.156) a las expresiones (3.151), (3.152), (3.153) y (3.150), se tiene

$$Cov [J_1, J_2^*] = o(n^{-1}b_1^{-1}). \tag{3.157}$$

Finalmente, reuniendo los resultados (3.87), (3.149) y (3.157), se tiene

$$\begin{aligned} Var \left[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) \right] & = \frac{1}{nb_1} \frac{\lambda_F(t)}{1 - H(t)} \left(p(t)c_K + (1 - p(t)) a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u) K(v - au) du \right)^2 dv \right) \\ & \quad + o(n^{-1}b_1^{-1}). \end{aligned} \tag{3.158}$$

De las expresiones asintóticas para las varianzas de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$ y de su proyección de Hájek, $\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)$, dadas por el teorema 3.2.5 y por (3.158), respectivamente, se deduce inmediatamente (3.139). ■

Concluye la sección con un resultado similar al de los teoremas previos para el estimador $\lambda_{TWP}(t)$.

Teorema 3.3.6 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (V.2) y la existencia del límite $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_1^5$, se tiene*

$$\sqrt{nb_1} \left(\tilde{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) \right) \xrightarrow{d} N(l_0 \xi_6(t), \xi_7(t)) \quad (3.159)$$

donde l_0 se definió en (3.108),

$$\xi_6(t) = \frac{1}{2} \mu_K \left(\lambda_F''(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t) p''(t) + 2 (\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) \right) \quad (3.160)$$

y

$$\xi_7(t) = \sqrt{\frac{\lambda_F(t)}{1-H(t)} \left(p(t) c_K + (1-p(t)) a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u) K(v-ua) du \right)^2 dv \right)}. \quad (3.161)$$

Demostración. En el teorema 3.2.5 se obtuvo la expresión asintótica

$$\tilde{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) = \bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) + o_P \left(b_1^2 + n^{-1/2} b_1^{-1/2} \right) \quad (3.162)$$

donde $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$ se definió en (3.81).

En el lema 3.3.2 se probó la equivalencia asintótica de $\bar{\lambda}_{TWP}(t)$ y su proyección de Hájek, $\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)$. Por tanto, por el teorema 3.3.1,

$$\frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} - \frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}} = o_P(1).$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} &= \frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}} \\ &+ \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} - \frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}}, \end{aligned}$$

es fácil ver que, aplicando el teorema de Slutsky, la normalidad asintótica de $\frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}}$ se deduciría de la de $\frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}}$.

A continuación se prueba que la distribución de $\frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}}$ es asintóticamente normal. Si se define

$$\begin{aligned} W_{n,i}^* &= \frac{1}{n} \frac{K_{b_1}(t - T_i) p(T_i) \mathbf{1}(T_i \in I)}{1 - H(T_i) + \frac{1}{n}} \\ &+ \frac{n-1}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_j) K_{b_2}(T_j - T_i) (\delta_i - p(T_j)) \mathbf{1}(T_j \in I)}{(1 - H(T_j) + \frac{1}{n}) h(T_j)} \mid Z_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n-1}{n^2} E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_i) K_{b_2}(T_i-T_j) (\delta_j - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1-H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} \mid Z_i \right] \\
& + \frac{1}{n^2} \frac{K_{b_1}(t-T_i) K_{b_2}(0) (\delta_i - p(T_i)) \mathbf{1}(T_i \in I)}{(1-H(T_i) + \frac{1}{n}) h(T_i)} - \frac{1}{n} E[J_2]
\end{aligned} \tag{3.163}$$

donde j es un índice arbitrario distinto de i , se tiene que

$$\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) = \sum_{i=1}^n W_{n,i}^*$$

donde $W_{n,i}^*$, $i = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$, es un esquema triangular de variables aleatorias i.i.d.. Por el teorema de Liapunov, para demostrar que $\frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}}$ es asintóticamente normal es suficiente con probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nE \left[|W_{n,1}^* - E(W_{n,1}^*)|^3 \right]}{\left(\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) \right] \right)^{3/2}} = 0. \tag{3.164}$$

Los mismos razonamientos que permitieron obtener la desigualdad (3.110) permiten concluir que

$$\frac{nE \left[|W_{n,1}^* - E(W_{n,1}^*)|^3 \right]}{\left(\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) \right] \right)^{3/2}} \leq \frac{8nE \left[|W_{n,1}^*|^3 \right]}{\left(\text{Var} \left[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) \right] \right)^{3/2}}. \tag{3.165}$$

Para el segundo sumando de (3.163), se tiene

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2) K_{b_2}(T_2-T_1) (\delta_1 - p(T_2)) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1-H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \mid Z_1 \right] \\
& = \int_{\varepsilon}^{t_0} \frac{K_{b_1}(t-t_2) K_{b_2}(t_2-T_1) (\delta_1 - p(t_2))}{1-H(t_2) + \frac{1}{n}} dt_2 \\
& = \frac{1}{b_2} \int_{\frac{t-t_0}{b_1}}^{\frac{t-\varepsilon}{b_1}} \frac{K(t_{21}) K\left(\frac{t-b_1 t_{21}-T_1}{b_2}\right) (\delta_1 - p(t-b_1 t_{21}))}{1-H(t-b_1 t_{21}) + \frac{1}{n}} dt_{21}
\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{t-t_2}{b_1} = t_{21}$, y, por consiguiente,

$$\left| E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_2) K_{b_2}(T_2-T_1) (\delta_1 - p(T_2)) \mathbf{1}(T_2 \in I)}{(1-H(T_2) + \frac{1}{n}) h(T_2)} \mid Z_1 \right] \right| \leq \frac{1}{b_2} \frac{\|K\|_{\infty} \int_{-l}^L K(u) du}{1-H(t_0)}. \quad c.s.$$

Análogamente, para el tercer sumando de (3.163),

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{K_{b_1}(t-T_1) K_{b_2}(T_1-T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \mid Z_1 \right] \\
& = \frac{K_{b_1}(t-T_1) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} E [K_{b_2}(T_1-T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mid Z_1] \\
& = \frac{K_{b_1}(t-T_1) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1-H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \int_0^{\infty} K_{b_2}(T_1-t_2) (p(t_2) - p(T_1)) dt_2
\end{aligned}$$

$$= \frac{K_{b_1}(t - T_1) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \int_{-\infty}^{\frac{T_1}{b_2}} K(t_{21}) (p(t - b_2 t_{21}) - p(T_1)) dt_{21}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $\frac{T_1 - t_2}{b_2} = t_{21}$, y, por tanto,

$$\left| E \left[\frac{K_{b_1}(t - T_1) K_{b_2}(T_1 - T_2) (\delta_2 - p(T_1)) \mathbf{1}(T_1 \in I)}{(1 - H(T_1) + \frac{1}{n}) h(T_1)} \middle| Z_1 \right] \right| \leq \frac{1}{b_1} \frac{\|K\|_\infty \int_{-L}^L K(u) du}{(1 - H(t_0)) \delta} \quad c.s.$$

donde $\delta > 0$ es un número tal que $h(t) > \delta$ para $t \in I$.

Así

$$\begin{aligned} |W_{n,1}^*| &\leq \frac{1}{nb_1} \frac{\|K\|_\infty}{1 - H(t_0)} + \frac{n-1}{n^2 b_2} \frac{\|K\|_\infty}{1 - H(t_0)} + \frac{n-1}{n^2 b_1} \frac{\|K\|_\infty}{(1 - H(t_0)) \delta} \\ &\quad + \frac{1}{n^2 b_1 b_2} \frac{\|K\|_\infty^2}{(1 - H(t_0)) \delta} + \frac{1}{n} |E[J_2]| \quad c.s.. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta **(V.2)** y (3.94),

$$E[|W_{n,1}^*|^3] = O(n^{-1} b_1^{-1} + n^{-2} b_1^{-2} + n^{-1} b_1^2) = O(n^{-1} b_1^{-1})$$

y, por (3.158) y (3.165),

$$\frac{nE[|W_{n,1}^* - E(W_{n,1}^*)|^3]}{(Var[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)])^{3/2}} = O(n)O(n^{-3} b_1^{-3})O(n^{3/2} b_1^{3/2}) = O(n^{-1/2} b_1^{-3/2}),$$

razón por la cual (ya que por **(V.1)** se verifica $nb_1^3 \rightarrow \infty$), se cumple la condición de Liapunov (3.164).

Se ha probado, por tanto, que

$$\frac{\bar{\lambda}_{TWP}^*(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{TWP}^*(t)]}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

y, por tanto, como se justificó en los párrafos iniciales de la demostración, se tiene

$$\frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} = \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Teniendo en cuenta las definiciones (3.160) y (3.161) de $\xi_6(t)$ y $\xi_7(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t)]}{\sqrt{Var[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]}} &= \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t) + o(b_1^2)}{\xi_7(t) + o(1)} \\ &= \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t)}{\xi_7(t) + o(1)} + o(n^{1/2} b_1^{5/2}) \\ &= \sqrt{nb_1} \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t)}{\xi_7(t)} \frac{\xi_7(t)}{\xi_7(t) + o(1)} \\ &\quad + o(n^{1/2} b_1^{5/2}), \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t)}{\xi_7(t)} &= \frac{\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - E[\bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t)] \xi_7(t) + o(1)}{\sqrt{\text{Var}[\bar{\lambda}_{TWP}(t)]} \xi_7(t)} \\ &\quad + o\left(n^{1/2} b_1^{5/2}\right) O(1) \end{aligned}$$

por lo que, como por **(V.1)** es $nb_1^5 = O(1)$ y dado que $\frac{\xi_7(t)+o(1)}{\xi_7(t)} \rightarrow 1$, se concluye como consecuencia del teorema de Slutsky que

$$\frac{\sqrt{nb_1} \bar{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t)}{\xi_7(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Aplicando una vez más el teorema de Slutsky a la representación (3.162) (teniendo nuevamente presente que $nb_1^5 = O(1)$), se tiene

$$\frac{\sqrt{nb_1} \tilde{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) - b_1^2 \xi_6(t)}{\xi_7(t)} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

o, equivalentemente, teniendo en cuenta la definición de l_0 , el resultado (3.159). ■

Observación 3.3.1 Cuando la función núcleo es cóncava, de acuerdo con la observación 3.2.1 se verifica que

$$\begin{aligned} \xi_7^2(t) &= \frac{\lambda_F(t)}{1-H(t)} \left(p(t)c_K + (1-p(t))a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du \right)^2 dv \right) \\ &\leq \frac{c_K \lambda_F(t) (p(t) + (1-p(t))a)}{1-H(t)} = \xi_2^2(t). \end{aligned}$$

En palabras, la distribución normal límite a la que converge $\sqrt{nb_1} \left(\tilde{\lambda}_{TWP}(t) - \lambda_F(t) \right)$ tiene varianza menor o igual que la de la distribución límite de $\sqrt{nb_1} \left(\hat{\lambda}(t) - \lambda_F(t) \right)$ donde $\hat{\lambda}(t)$ es uno de los estimadores $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ o $\hat{\lambda}_{RLLL}(t)$.

3.4 Ventanas asintóticamente óptimas

Los teoremas 3.2.1-3.2.5 de la sección 3.2 permiten deducir expresiones asintóticas para el error cuadrático medio integrado de la parte dominante de las representaciones de los estimadores que allí se dan. Bajo ciertas condiciones sobre las ventanas, es posible obtener expresiones explícitas para las ventanas asintóticamente óptimas, en el sentido de minimizar el error cuadrático medio integrado.

Si $\hat{\lambda}$ denota un estimador genérico de la función de riesgo y $b = (b_1, b_2)$ el vector de ventanas empleado, se define el error cuadrático medio integrado del estimador, $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$, como

$$MISE_w(\hat{\lambda}; b) = E \left[\int_0^\infty \left(\hat{\lambda}(t) - \lambda(t) \right)^2 w(t) dt \right]$$

donde w es una función de peso.

En el resto del capítulo se requerirá, además de las condiciones exigidas hasta ahora, una condición adicional sobre la función de peso w :

(W.1) w es una función no negativa, con soporte compacto contenido en el intervalo (ε, t_0) y acotada.

El primer resultado de esta sección se refiere a la parte dominante del estimador $\lambda_{WLNW}(t)$.

Teorema 3.4.1 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (W.1) y que $\frac{b_1}{b_2} = a \in (0, \infty)$, se tiene*

$$MISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b) = AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b) + o(AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b)) \quad (3.166)$$

donde

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b) = \frac{b_1^4 \mu_K^2 I_1(a)}{4} + \frac{c_K I_2(a)}{nb_1} \quad (3.167)$$

y

$$I_1(a) = \int_0^\infty \left(\lambda_H''(t)p(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2)p'(t)) \right)^2 w(t) dt,$$

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\lambda_H(t)p(t)(p(t) + a(1-p(t))) w(t)}{1-H(t)} dt.$$

Además, el par de ventanas que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b)$ es

$$b_{AMISE_w}(a) = (b_{1,AMISE_w}(a), b_{2,AMISE_w}(a))$$

donde

$$b_{1,AMISE_w}(a) = \left(\frac{c_K I_2(a)}{n \mu_K^2 I_1(a)} \right)^{1/5} \quad (3.168)$$

y

$$b_{2,AMISE_w}(a) = \frac{b_{1,AMISE_w}(a)}{a}, \quad (3.169)$$

verificándose

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b_{AMISE_w}(a)) = \frac{5}{4} n^{-4/5} \mu_K^{2/5} c_K^{4/5} I_1(a)^{1/5} I_2(a)^{4/5}. \quad (3.170)$$

Demostación. Empleando las expresiones (3.57) y (3.58) del teorema 3.2.1 para la esperanza y la varianza de $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} MSE(\bar{\lambda}_{WLNW}(t)) &= (E[\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)])^2 + Var[\bar{\lambda}_{WLNW}(t)] \\ &= \frac{1}{4} b_1^4 \mu_K^2 \left(\lambda_H''(t)p(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2)p'(t)) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_H(t)p(t)(p(t) + a(1-p(t)))}{1-H(t)} + o(b_1^4 + n^{-1}b_1^{-1}). \end{aligned} \quad (3.171)$$

Se obtiene (3.167) definiendo $AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b)$ como el resultado de integrar la suma de los dos primeros términos de la expresión anterior de $MSE(\bar{\lambda}_{WLNW}(t))$ con función de peso w respecto a t .

El término despreciable de la representación (3.166) procede de la integración de los términos despreciables de (3.171). Su despreciable respecto a $AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLNW}; b)$ puede probarse aplicando el teorema de convergencia acotada teniendo en cuenta la condición (W.1) y que los términos de orden $o(b_1^4 + n^{-1}b_1^{-1})$ de (3.171) están constituidos por restos de desarrollos de Taylor en que, como consecuencia de las hipótesis (K.1), (P.1) y (H.1), intervienen funciones acotadas.

Mediante el clásico balance entre sesgo y varianza integrados, es inmediato obtener de (3.167) las ventanas óptimas (3.168) y (3.169). Finalmente, se obtiene (3.170) sustituyendo (3.168) en (3.167). ■

Los cuatro teoremas siguientes dan resultados similares al anterior para las partes dominantes de los estimadores $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TWP}(t)$, respectivamente.

Teorema 3.4.2 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (W.1) y que $\frac{b_1}{b_2} = a \in (0, \infty)$, se tiene*

$$MISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b) = AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b) + o(AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b)) \quad (3.172)$$

donde

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b) = \frac{b_1^4 \mu_K^2 I_3(a)}{4} + \frac{c_K I_2(a)}{nb_1} \quad (3.173)$$

y

$$I_3(a) = \int_0^\infty \left((\lambda_H''(t) + \lambda_H(t)^3 - 3\lambda_H'(t)\lambda_H(t)) p(t) + \frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2)p'(t)) \right)^2 w(t) dt,$$

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\lambda_H(t)p(t)(p(t) + a(1-p(t))) w(t)}{1-H(t)} dt.$$

Además, el par de ventanas que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b)$ es

$$b_{AMISE_w}(a) = (b_{1,AMISE_w}(a), b_{2,AMISE_w}(a))$$

donde

$$b_{1,AMISE_w}(a) = \left(\frac{c_K I_2(a)}{n \mu_K^2 I_3(a)} \right)^{1/5} \quad (3.174)$$

y

$$b_{2,AMISE_w}(a) = \frac{b_{1,AMISE_w}(a)}{a}, \quad (3.175)$$

verificándose

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b_{AMISE_w}(a)) = \frac{5}{4} n^{-4/5} \mu_K^{2/5} c_K^{4/5} I_3(a)^{1/5} I_2(a)^{4/5}. \quad (3.176)$$

Demostración. La expresión (3.60) del teorema 3.2.2 da la definición de $\bar{\lambda}_{RRNW}(t)$ en términos de $\bar{\lambda}_{WLNW}(t)$. De ella es inmediato concluir que

$$E[\bar{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t)] = E[\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)] + \frac{1}{2} b_1^2 \mu_K (\lambda_H(t)^2 - 3\lambda_H'(t)) \lambda_H(t) p(t)$$

y

$$Var[\bar{\lambda}_{RRNW}(t) - \lambda_F(t)] = Var[\bar{\lambda}_{WLNW}(t) - \lambda_F(t)].$$

Por tanto, empleando los resultados del teorema 3.2.1, se tiene

$$MSE(\bar{\lambda}_{RRNW}(t)) = \frac{1}{4} b_1^4 \mu_K^2 \left((\lambda_H''(t) + \lambda_H(t)^3 - 3\lambda_H'(t)\lambda_H(t)) p(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a^2} \left(\lambda_H(t) p''(t) + 2 (\lambda'_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{nb_1} \frac{c_K \lambda_H(t) p(t) (p(t) + a(1 - p(t)))}{1 - H(t)} + o(b_1^4 + n^{-1} b_1^{-1}). \quad (3.177)
\end{aligned}$$

Definiendo $AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b)$ como la integral de la suma de los dos primeros términos de (3.177) con función de peso w respecto a t , se obtiene (3.173). La despreciabilidad del segundo sumando de la representación (3.172) respecto a $AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b)$ se puede justificar mediante argumentos similares a los empleados en la demostración del teorema anterior.

Los resultados (3.174), (3.175) y (3.176) se obtienen minimizando en b_1 el $AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRNW}; b)$.

■

Teorema 3.4.3 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (W.1) y que $\frac{b_1}{b_2} = a \in (0, \infty)$, se tiene*

$$MISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b) = AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b) + o(AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b))$$

donde

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b) = \frac{b_1^4 \mu_K^2 I_4(a)}{4} + \frac{c_K I_2(a)}{nb_1} \quad (3.178)$$

y

$$I_4(a) = \int_0^\infty \left(\lambda_H''(t) p(t) + \frac{\lambda_H(t) p''(t)}{a^2} \right)^2 w(t) dt,$$

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\lambda_H(t) p(t) (p(t) + a(1 - p(t))) w(t)}{1 - H(t)} dt.$$

Además, el par de ventanas que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b)$ es

$$b_{AMISE_w}(a) = (b_{1,AMISE_w}(a), b_{2,AMISE_w}(a))$$

donde

$$b_{1,AMISE_w}(a) = \left(\frac{c_K I_2(a)}{n \mu_K^2 I_4(a)} \right)^{1/5}$$

y

$$b_{2,AMISE_w}(a) = \frac{b_{1,AMISE_w}(a)}{a},$$

verificándose

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{WLLL}; b_{AMISE_w}(a)) = \frac{5}{4} n^{-4/5} \mu_K^{2/5} c_K^{4/5} I_4(a)^{1/5} I_2(a)^{4/5}.$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del teorema 3.4.1, partiendo de los resultados del teorema 3.2.3. ■

Teorema 3.4.4 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (W.1) y que $\frac{b_1}{b_2} = a \in (0, \infty)$, se tiene*

$$MISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b) = AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b) + o(AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b))$$

donde

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b) = \frac{b_1^4 \mu_K^2 I_5(a)}{4} + \frac{c_K I_2(a)}{nb_1} \quad (3.179)$$

y

$$I_5(a) = \int_0^\infty \left((\lambda_H''(t) + \lambda_H(t)^3 - 3\lambda_H'(t)\lambda_H(t)) p(t) + \frac{\lambda_H(t)p''(t)}{a^2} \right)^2 w(t) dt,$$

$$I_2(a) = \int_0^\infty \frac{\lambda_H(t)p(t)(p(t) + a(1-p(t))) w(t)}{1-H(t)} dt.$$

Además, el par de ventanas que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b)$ es

$$b_{AMISE_w}(a) = (b_{1,AMISE_w}(a), b_{2,AMISE_w}(a))$$

donde

$$b_{1,AMISE_w}(a) = \left(\frac{c_K I_2(a)}{n \mu_K^2 I_5(a)} \right)^{1/5}$$

y

$$b_{2,AMISE_w}(a) = \frac{b_{1,AMISE_w}(a)}{a},$$

verificándose

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{RRLL}; b_{AMISE_w}(a)) = \frac{5}{4} n^{-4/5} \mu_K^{2/5} c_K^{4/5} I_5(a)^{1/5} I_2(a)^{4/5}.$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del teorema 3.4.2, partiendo de los teoremas 3.2.3 y 3.2.4. ■

Teorema 3.4.5 *Supuestas las condiciones (K.1), (P.1), (H.1), (V.1) y (W.1) y que $\frac{b_1}{b_2} = a \in (0, \infty)$, se tiene*

$$MISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b) = AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b) + o(AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b))$$

donde

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b) = \frac{b_1^4 \mu_K^2 I_6(a)}{4} + \frac{I_7(a)}{nb_1} \quad (3.180)$$

y

$$I_6(a) = \int_0^\infty \left(\lambda_H''(t)p(t) + 2\lambda_H'(t)p'(t) + \lambda_H(t)p''(t) \right)$$

$$+\frac{1}{a^2} (\lambda_H(t)p''(t) + 2 (\lambda'_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) \Big)^2 w(t)dt,$$

$$I_7(a) = \int_0^\infty \frac{\lambda_H(t)p(t)}{1 - H(t)} \left(p(t)c_K + (1 - p(t))a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v - ua) du \right)^2 dv \right) w(t)dt.$$

Además, el par de ventanas que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b)$ es

$$b_{AMISE_w}(a) = (b_{1,AMISE_w}(a), b_{2,AMISE_w}(a))$$

donde

$$b_{1,AMISE_w}(a) = \left(\frac{I_7(a)}{n\mu_K^2 I_6(a)} \right)^{1/5}$$

y

$$b_{2,AMISE_w}(a) = \frac{b_{1,AMISE_w}(a)}{a},$$

verificándose

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a)) = \frac{5}{4} n^{-4/5} \mu_K^{2/5} I_6(a)^{1/5} I_7(a)^{4/5}.$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la de los teoremas 3.4.1 o 3.4.3, partiendo del teorema 3.2.5. ■

Observación 3.4.1 Aunque en los teoremas 3.4.1-3.4.5 se dan expresiones explícitas para ventanas asintóticamente óptimas, dichos resultados presuponen que $b_1/b_2 = a \in (0, \infty)$ y dependen, por tanto, de a . Por tanto, si por $\bar{\lambda}$ se denota cualquiera de los cinco estimadores anteriores, deberá calcularse el valor de a que minimiza $AMISE_w(\bar{\lambda}; b_{AMISE_w}(a))$, que se denotará por a_{OPT} , esto es,

$$a_{OPT} = \arg \min_{a>0} AMISE_w(\bar{\lambda}; b_{AMISE_w}(a)).$$

Para el estimador de Tanner-Wong presuavizado puede ocurrir que

$$\inf_{a>0} AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a)) = \lim_{a \rightarrow \infty} AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a)).$$

En este caso, el mínimo de la función $AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a))$ no es un mínimo local. Teniendo en consideración la observación 3.2.2, ello implica que cuando se presenta esta circunstancia el estimador de Tanner-Wong es asintóticamente más eficiente que el estimador $\bar{\lambda}_{TWP}$.

Observación 3.4.2 Una condición suficiente para la existencia de un mínimo local de $AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a))$ es que

$$\int_0^\infty \lambda''_F(t) (\lambda_H(t)p''(t) + 2 (\lambda'_H(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) w(t)dt < 0. \tag{3.181}$$

Efectivamente, igualando a cero la derivada de $I_6(a)$,

$$I_6'(a) = -\frac{4}{a^3} \int_0^\infty \lambda_F''(t) (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) w(t) dt - \frac{4}{a^5} \int_0^\infty (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t))^2 w(t) dt,$$

se obtiene el punto crítico, correspondiente a un mínimo,

$$a_0 = \sqrt{-\frac{\int_0^\infty (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t))^2 w(t) dt}{\int_0^\infty \lambda_F''(t) (\lambda_H(t)p''(t) + 2(\lambda_H'(t) - \lambda_H(t)^2) p'(t)) w(t) dt}},$$

que pertenece al intervalo $(0, \infty)$ bajo la condición (3.181). Por otra parte, nótese que, procediendo como en la observación 3.2.2,

$$a \int_{-L(1+a)}^{L(1+a)} \left(\int_{-L}^L K(u)K(v-ua) du \right)^2 dv = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{K}(v_1)^2 \tilde{K}\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 dv_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \tilde{K}(v_1)^2 dv_1 = c_K,$$

de donde

$$I_7(a) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} I_7(x).$$

Por tanto,

$$AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a_0)) < \lim_{a \rightarrow \infty} AMISE_w(\bar{\lambda}_{TWP}; b_{AMISE_w}(a))$$

y existe

$$a_{OPT} = \arg \min_{a > 0} AMISE_w(\bar{\lambda}; b_{AMISE_w}(a)) < \infty.$$

3.5 Simulaciones

A fin de mostrar el comportamiento en la práctica de los estimadores presentados en este capítulo y, asimismo, compararlo con el de otros estimadores de la función de riesgo conocidos, se ha realizado un estudio de simulación de Montecarlo.

En los cuatro modelos considerados se ha supuesto que tanto la distribución de probabilidad del tiempo de fallo como la del tiempo de censura pertenecen a una misma familia paramétrica. Se han empleado las distribuciones de Weibull y loglogística.

Concretamente, en los dos primeros modelos (modelos *I* y *II*) $Y \stackrel{d}{=} W(\alpha_F, \beta_F)$, $C \stackrel{d}{=} W(\alpha_G, \beta_G)$, donde $W(\alpha, \beta)$ denota la distribución de Weibull con parámetro de forma α y parámetro de escala β , de densidad

$$\beta \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), \quad x > 0.$$

La combinación de valores de $\alpha_F, \beta_F, \alpha_G$ y β_G que caracteriza a cada modelo se detalla en la Tabla 3.2. En la Figura 3.1 se representan las funciones de riesgo del tiempo de fallo y del tiempo observado y la función de probabilidad condicional de no censura de los modelos *I* y *II*.

Tabla 3.2. Características de los modelos *I* a *IV*.

Modelo	F	G
<i>I</i>	$W(3, 1)$	$W(5, 1)$
<i>II</i>	$W(5, 1)$	$W(3, 1)$
<i>III</i>	$LL(0, 0.2)$	$LL(0, 0.4)$
<i>IV</i>	$LL(0, 0.4)$	$LL(0, 0.2)$

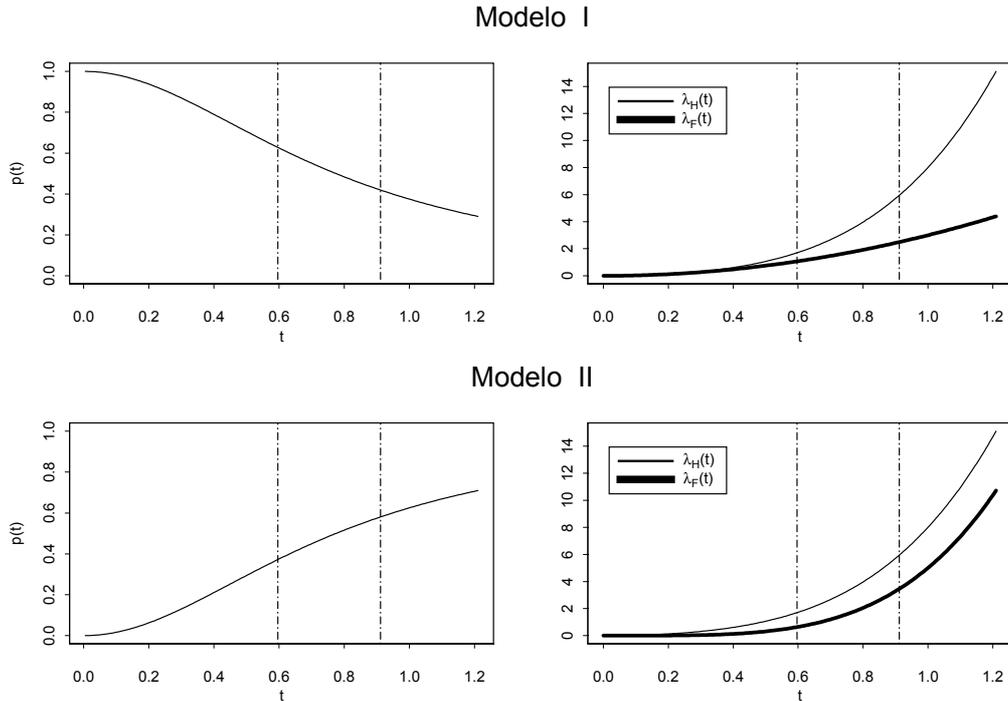


Figura 3.1. Funciones p , λ_H y λ_F para los modelos *I* y *II*. Las líneas discontinuas indican la frontera del soporte de la función de peso, w .

En los dos últimos modelos considerados, modelos *III* y *IV*, $Y \stackrel{d}{=} LL(\alpha_F, \beta_F)$, $C \stackrel{d}{=} LL(\alpha_G, \beta_G)$, donde $LL(\alpha, \beta)$ denota la distribución loglogística con parámetro de localización α y parámetro de escala β , de densidad

$$\frac{1}{\beta x} \gamma \left(\frac{\log(x) - \alpha}{\beta} \right), \quad x > 0$$

donde $\gamma(\cdot)$ denota la función de densidad logística $\gamma(x) = \exp(x) / (1 + \exp(x))^2$. Las características concretas de estos dos modelos se encuentran en la Tabla 3.2. En la Figura 3.2 se muestran gráficamente las funciones de riesgo del tiempo de fallo y del tiempo observado y la función de probabilidad condicional de no censura de los modelos *III* y *IV*.

La probabilidad de censura para los modelos *I* a *IV* varía entre 0.47 y 0.53.

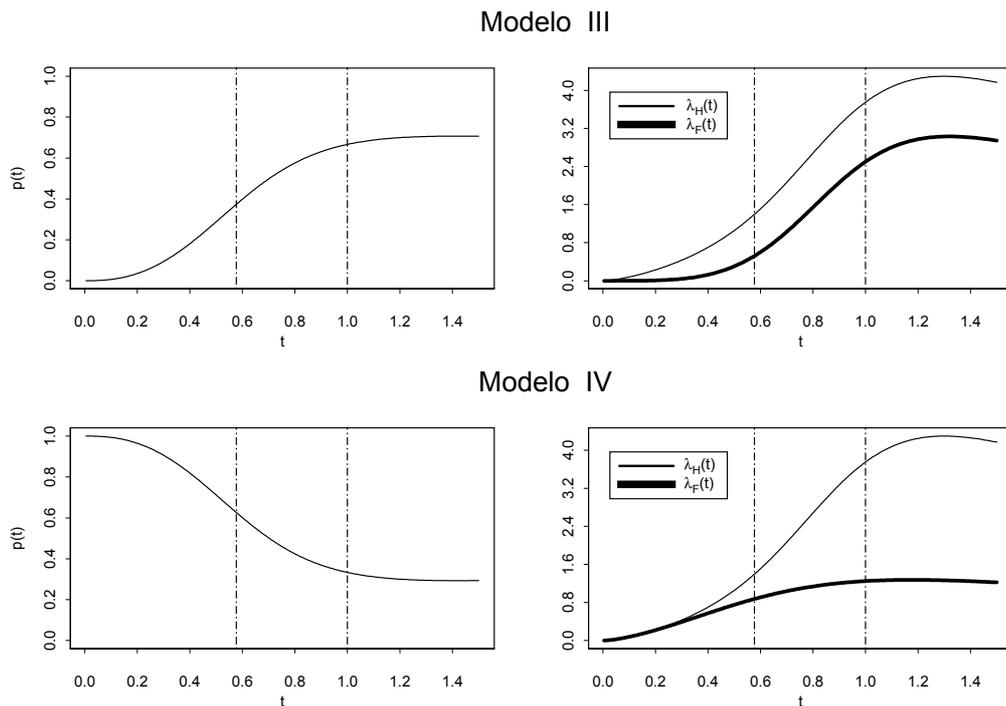


Figura 3.2. Funciones p , λ_H y λ_F para los modelos *III* y *IV*. Las líneas discontinuas indican la frontera del soporte de la función de peso, w .

Para los cuatro modelos se simulan muestras de tamaños pequeño ($n = 30$) y medio ($n = 200$). Si $\hat{\lambda}$ denota un estimador de la función de riesgo y b el vector de ventanas, el $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ del estimador —cuya definición se dio al principio de la sección 3.4— se aproxima simulando 500 muestras para cada modelo y tamaño muestral a lo largo de una rejilla de valores de cada componente de la ventana equiespaciados en escala logarítmica entre 0.08 y $1.28 \times 2^{5/6} \simeq 2.28$. Para cada muestra simulada el ISE_w se aproxima numéricamente mediante cuadratura gaussiana de 15 puntos. Como función de peso, w , se toma la función indicadora del intervalo de extremos los cuartiles primero y tercero de la función de distribución del tiempo observado. En todos los casos, el núcleo empleado es el de Epanechnikov.

En las Tablas 3.3-3.6 se consigna para los modelos *I* a *IV* el valor del mínimo de la aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ y la(s) ventana(s) en que dicho mínimo se alcanza, b_{MISE_w} , para cada estimador y tamaños muestrales $n = 30, 200$. Para los estimadores que dependen de dos ventanas se emplea la notación $b_{MISE_w} = (b_{1,MISE_w}, b_{2,MISE_w})$, donde $b_{1,MISE_w}$ y $b_{2,MISE_w}$ denotan el valor de las componentes b_1 y b_2 de b_{MISE_w} , respectivamente. En las mismas tablas figura además el valor de las ventanas $AMISE_w$ -óptimas, $b_{AMISE_w} = (b_{1,AMISE_w}, b_{2,AMISE_w})$, calculadas minimizando numéricamente las expresiones dadas en los teoremas 3.4.1-3.4.5 de la sección anterior para $AMISE_w(\hat{\lambda}; b)$ ($\hat{\lambda}$ denota un estimador genérico de la función de riesgo).

En las Figuras 3.3-3.10 se representan, para los modelos *I* a *IV* y tamaño muestral $n = 30$, gráficos de la aproximación de Montecarlo del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ como función de la(s) ventana(s) para cada estimador. Aunque, para mayor brevedad, las características de la misma función para $n = 200$ se muestran en las Figuras 3.11-3.14 sólo para los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\hat{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, pueden considerarse representativas.

Con $n = 30$ es muy frecuente observar que el mínimo de la aproximación de $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ se alcanza en los puntos externos de la rejilla de ventanas, lo que sugiere que o bien no se ha alcanzado

un mínimo local o bien no existe. En general, esto ocurre porque la ventana b_2 , que controla el grado de suavización de la estimación de la probabilidad condicional de no censura, toma el mayor valor ensayado. (Como indicación del tamaño de las ventanas elegidas para la simulación, téngase en cuenta que 2.28, que es el mayor valor considerado tanto para b_1 como para b_2 , es mayor que el percentil 99.8% de la distribución del tiempo observado para cualquiera de los modelos estudiados). En estos casos, pero también cuando el mínimo se localiza en el interior, las curvas de nivel de las Figuras 3.3-3.10 indican que cuando los valores de b_1 son subóptimos el efecto de b_2 sobre el $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ es —salvo para valores de b_2 relativamente bajos— mucho menos determinante que el de b_1 . Con $n = 200$, el mínimo se localiza casi siempre en el interior de la rejilla, pero la observación anterior sobre el efecto de b_1 y b_2 en el $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ sigue siendo válida en líneas generales.

Centrándose en la comparación entre los diferentes estimadores, es natural empezar contraponiendo aquéllos relacionados con los estimadores de Tanner-Wong o Watson-Leadbetter (es decir, el propio $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$) a sus contrapartidas basadas en los estimadores de Blum-Susarla o Rice-Rosenblatt (el propio $\tilde{\lambda}_{BS}(t)$, $\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLl}(t)$). En este sentido, salvo algunas llamativas excepciones, el examen de las Tablas 3.3-3.6 revela la superioridad de los estimadores de tipo Tanner-Wong o Watson-Leadbetter frente a los otros.

Restringiendo la comparación a los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, el estimador que suele ser más eficiente cuando se consideran globalmente los resultados de las simulaciones es $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ (en cuatro de ocho ocasiones le corresponde el menor $MISE_w$). Ahora bien, es perceptible un efecto del tamaño muestral que favorece a los estimadores $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ frente a los otros dos: pasan de ser siempre inferiores con $n = 30$ a alguno de $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ o $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, a superar conjuntamente en tres de los cuatro modelos a $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ o $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ con $n = 200$. Todo ello parece sugerir algún tipo de efecto de segundo orden en la eficiencia relativa de estos estimadores. Igualmente relacionado con ello parece estar la observación de que cuando para $n = 200$ $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ o $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ continúan alcanzando el $MISE_w$ óptimo para un valor de b_2 elevado, son también superiores al resto de estimadores.

Aunque los resultados para el estimador $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ son buenos, conviene relativizarlos. Otros estimadores pueden mejorar su eficiencia en hasta el 42% para $n = 30$ y hasta el 32% para $n = 200$. Ni siquiera es uniformemente superior al estimador $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ (téngase en cuenta, no obstante, que la función de peso elegida, que elimina el efecto frontera, atenúa posiblemente las diferencias en el comportamiento práctico de ambos estimadores).

Por fin, aunque como se deduce de lo dicho más arriba el estimador de Tanner-Wong, $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, puede llegar a ser más eficiente que los estimadores de tipo producto, es siempre superado por su versión pre-suavizada, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$. Ello se traduce en ganancias de eficiencia que aunque veces sólo son marginales (0.7%), pueden llegar a ser —además no excepcionalmente— dramáticas (40%). Todas estas características apuntan a reconocer en $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ un estimador de la función de riesgo con propiedades bastante convenientes, al menos para muestras de tamaño no demasiado pequeño. Cuando el tamaño muestral es pequeño los estimadores de tipo producto $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ pueden ser alternativas competitivas.

Tabla 3.3. Resultados de la simulación para el modelo *I*. Ventanas b_{AMISE_w} , b_{MISE_w} y $MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w})$ de los estimadores de la función de riesgo.

n	Estimador	b_{AMISE_w}	b_{MISE_w}	$MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w}) \times 10^2$
30	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.56	0.51	11.404
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.28, 0.41)	(0.81, 2.28)	6.221
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.27, 0.53)	(0.72, 2.28)	10.810
	$\hat{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.56, 0.12)	(0.72, 2.28)	7.060
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.46	0.36	11.400
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.47, 0.45)	(0.36, 0.91)	10.456
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.62, 0.94)	(0.32, 2.28)	9.831
	$\hat{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.36, 2.28)	10.634
200	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.39	0.29	2.056
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.19, 0.28)	(0.18, 0.29)	2.625
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.19, 0.36)	(0.18, 0.51)	2.281
	$\hat{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.38, 0.08)	(0.29, 0.08)	2.021
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.31	0.23	2.430
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.32, 0.31)	(0.23, 0.45)	2.028
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.42, 0.64)	(0.20, 2.28)	1.703
	$\hat{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.23, 0.45)	2.028

Tabla 3.4. Resultados de la simulación para el modelo *II*. Ventanas b_{AMISE_w} , b_{MISE_w} y $MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w})$ de los estimadores de la función de riesgo.

n	Estimador	b_{AMISE_w}	b_{MISE_w}	$MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w}) \times 10^2$
30	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.28	0.36	18.829
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.35, 0.53)	(0.36, 0.64)	10.996
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(1.10, 2.92)	(0.51, 2.28)	9.894
	$\hat{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.28, 0.50)	(0.36, 2.28)	11.241
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.38	0.29	12.980
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.39, 0.38)	(0.25, 0.40)	12.449
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.37, 0.47)	(0.29, 2.28)	13.463
	$\hat{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.25, 0.36)	12.301
200	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.19	0.18	3.092
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.24, 0.36)	(0.23, 0.40)	1.921
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.75, 2.00)	(0.23, 2.28)	1.887
	$\hat{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.19, 0.34)	(0.20, 0.45)	2.055
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.26	0.18	2.752
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.27, 0.26)	(0.16, 0.25)	2.612
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.26, 0.32)	(0.16, 0.40)	2.532
	$\hat{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.16, 0.23)	2.593

Tabla 3.5. Resultados de la simulación para el modelo *III*. Ventanas b_{AMISE_w} , b_{MISE_w} y $MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w})$ de los estimadores de la función de riesgo.

n	Estimador	b_{AMISE_w}	b_{MISE_w}	$MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w}) \times 10^2$
30	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.46	0.57	11.007
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.47, 0.36)	(0.51, 0.40)	10.088
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.49, 0.44)	(0.57, 0.57)	9.382
	$\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.46, 0.00)	(0.51, 0.45)	10.235
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.41	0.36	12.188
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.44, 0.39)	(0.36, 0.40)	12.151
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.43, 0.43)	(0.36, 0.51)	13.024
	$\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.36, 0.23)	12.117
200	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.32	0.32	2.192
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.32, 0.25)	(0.36, 0.25)	2.209
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.33, 0.30)	(0.36, 0.32)	2.030
	$\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.32, 0.00)	(0.32, 0.09)	2.176
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.28	0.23	2.788
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.30, 0.27)	(0.23, 0.25)	2.772
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.29, 0.30)	(0.23, 0.29)	2.785
	$\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.23, 0.11)	2.774

Tabla 3.6. Resultados de la simulación para el modelo *IV*. Ventanas b_{AMISE_w} , b_{MISE_w} y $MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w})$ de los estimadores de la función de riesgo.

n	Estimador	b_{AMISE_w}	b_{MISE_w}	$MISE_w(\hat{\lambda}; b_{MISE_w}) \times 10^2$
30	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.69	0.64	5.548
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.69, 0.52)	(1.14, 2.28)	2.942
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.54, 0.51)	(1.02, 2.28)	3.984
	$\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.76, 0.40)	(1.14, 2.28)	3.083
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.46	0.57	7.038
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.51, 0.44)	(0.51, 0.57)	7.034
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.65, 0.64)	(0.51, 2.28)	4.880
	$\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.57, 0.09)	7.044
200	$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	0.47	0.45	1.088
	$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	(0.47, 0.35)	(1.44, 2.28)	0.826
	$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	(0.37, 0.35)	(0.45, 0.45)	1.219
	$\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$	(0.52, 0.27)	(0.72, 0.64)	0.891
	$\hat{\lambda}_{BS}(t)$	0.31	0.32	1.415
	$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	(0.35, 0.30)	(0.32, 0.40)	1.371
	$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	(0.44, 0.44)	(0.40, 1.02)	0.901
	$\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$	-	(0.32, 0.18)	1.399

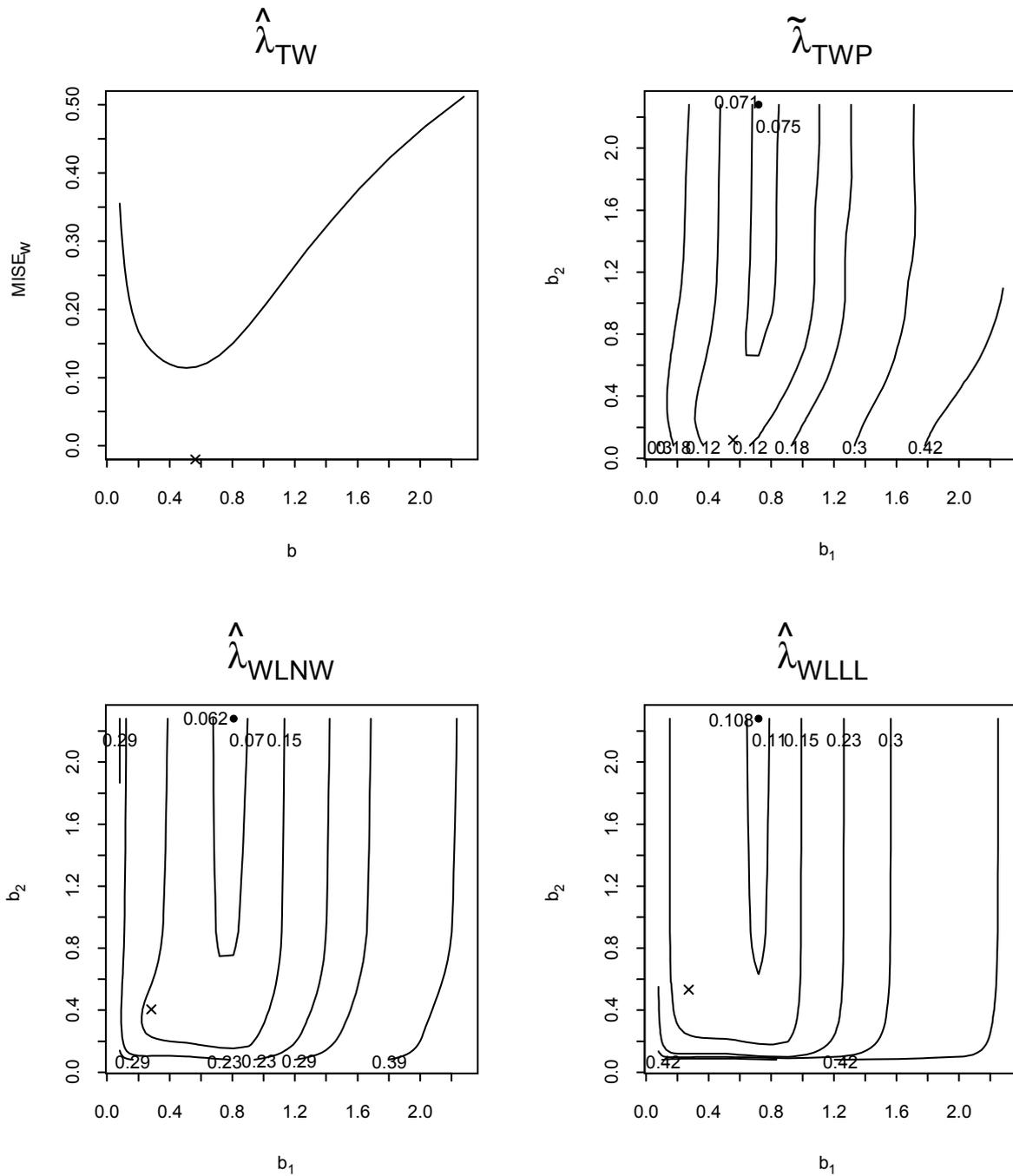


Figura 3.3. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo I , $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

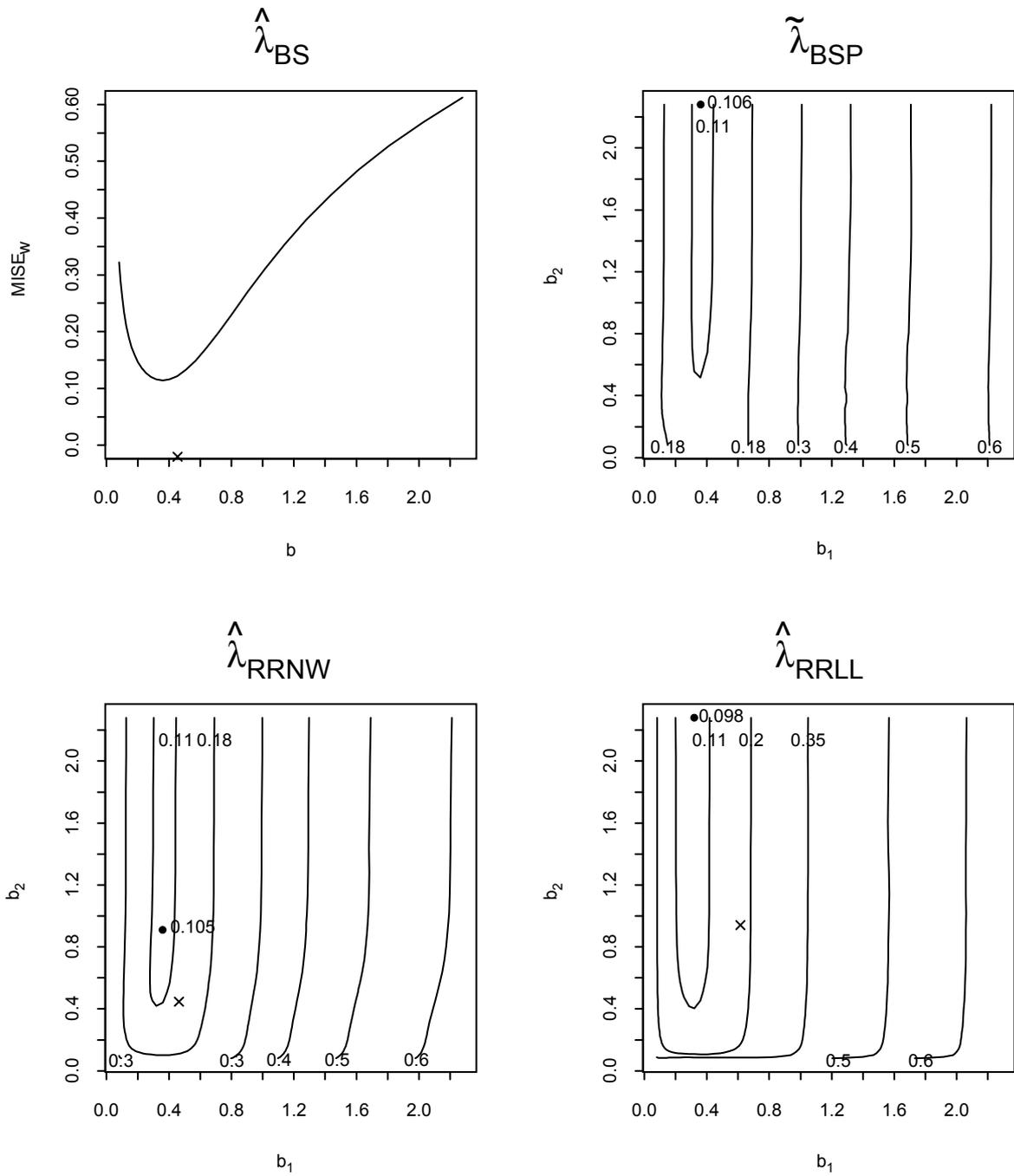


Figura 3.4. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo I , $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{BS}(t)$, $\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLl}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

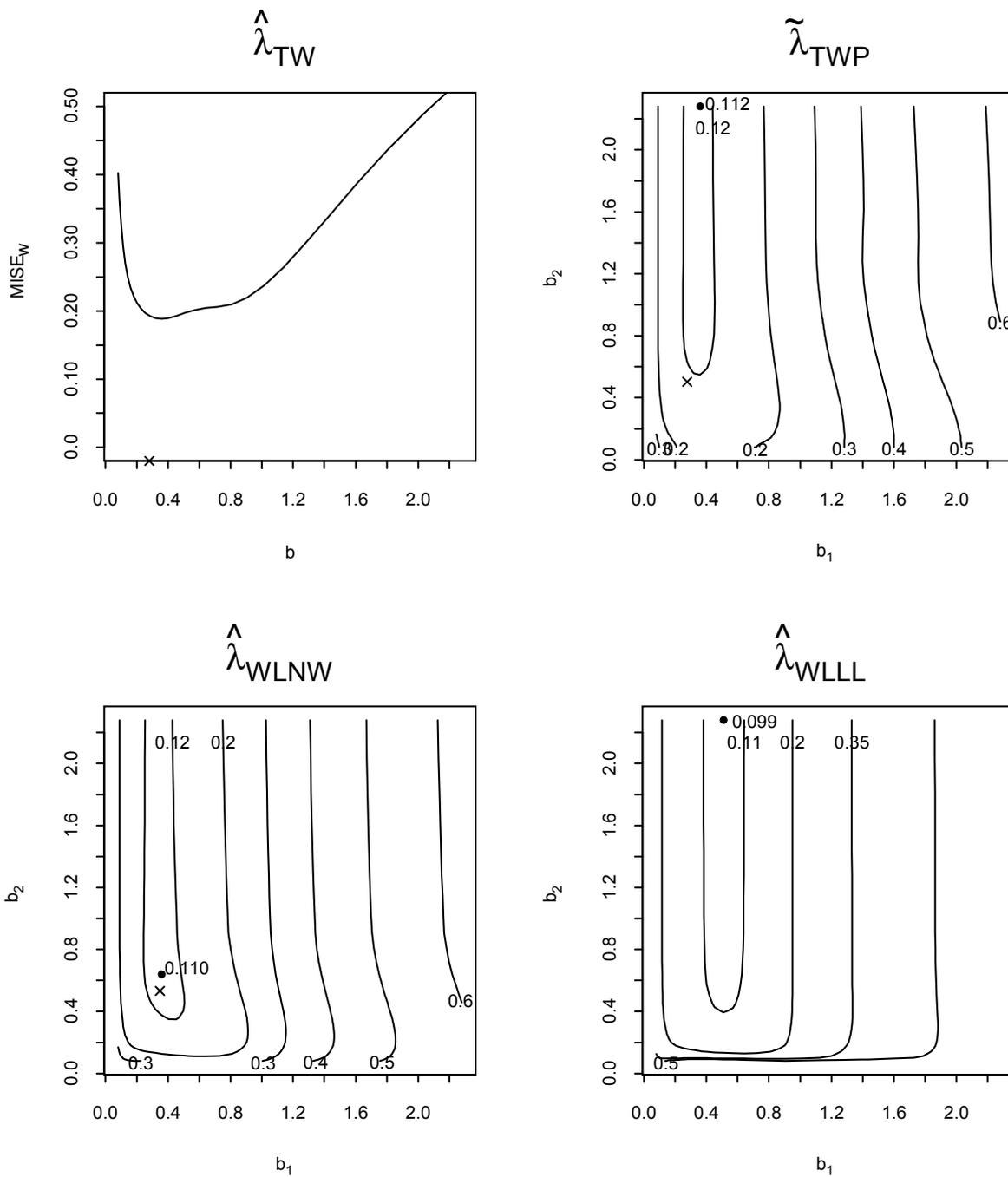


Figura 3.5. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo II , $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} (para $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$) cae fuera del gráfico; ver Tabla 3.4).

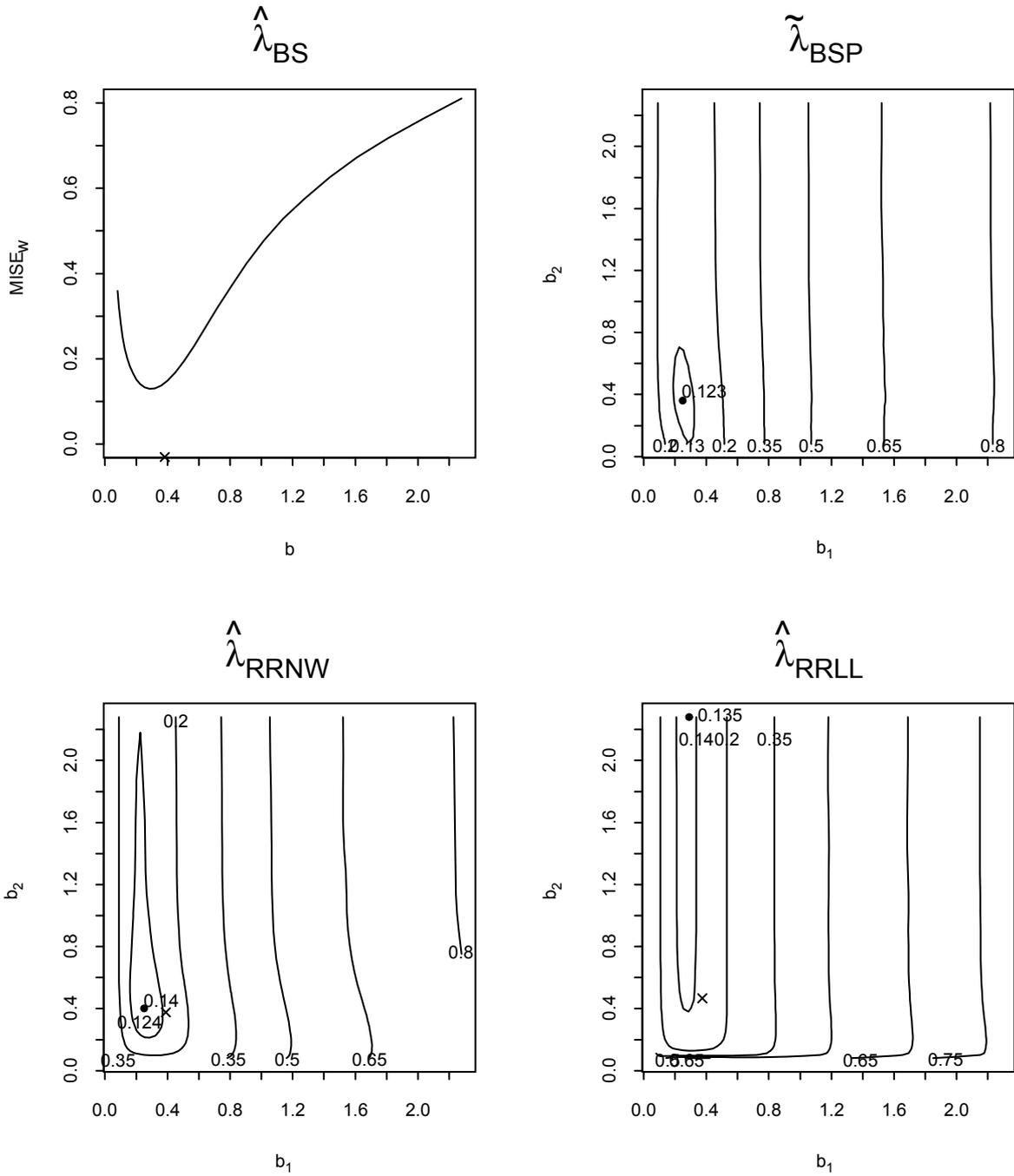


Figura 3.6. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo II, $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{BS}(t)$, $\tilde{\lambda}_{BSP}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$. El aspa (x) señala el valor de b_{AMISE_w} .

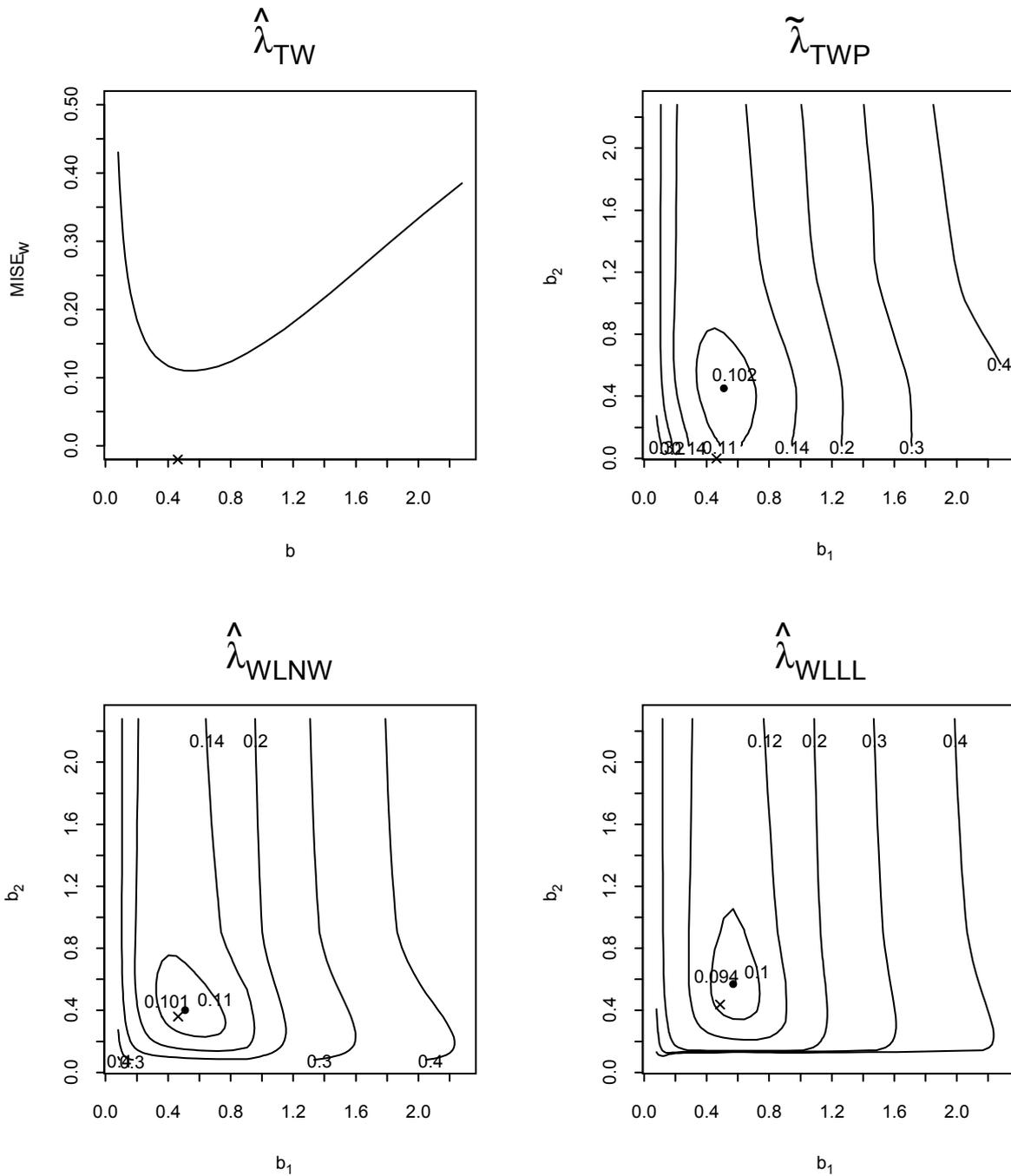


Figura 3.7. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo III, $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (x) señala el valor de b_{AMISE_w} .

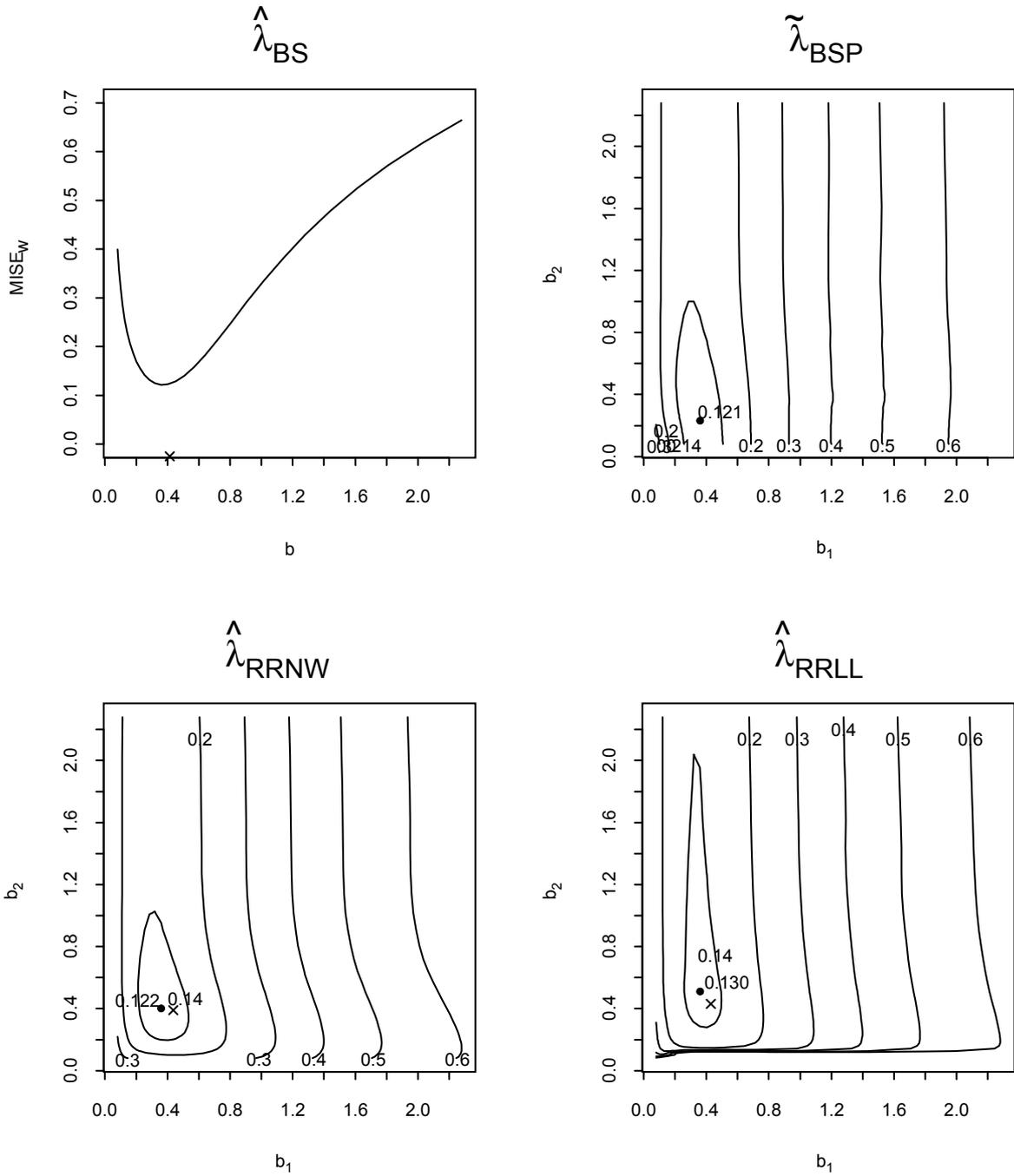


Figura 3.8. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo III, $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{BS}(t)$, $\hat{\lambda}_{BSP}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

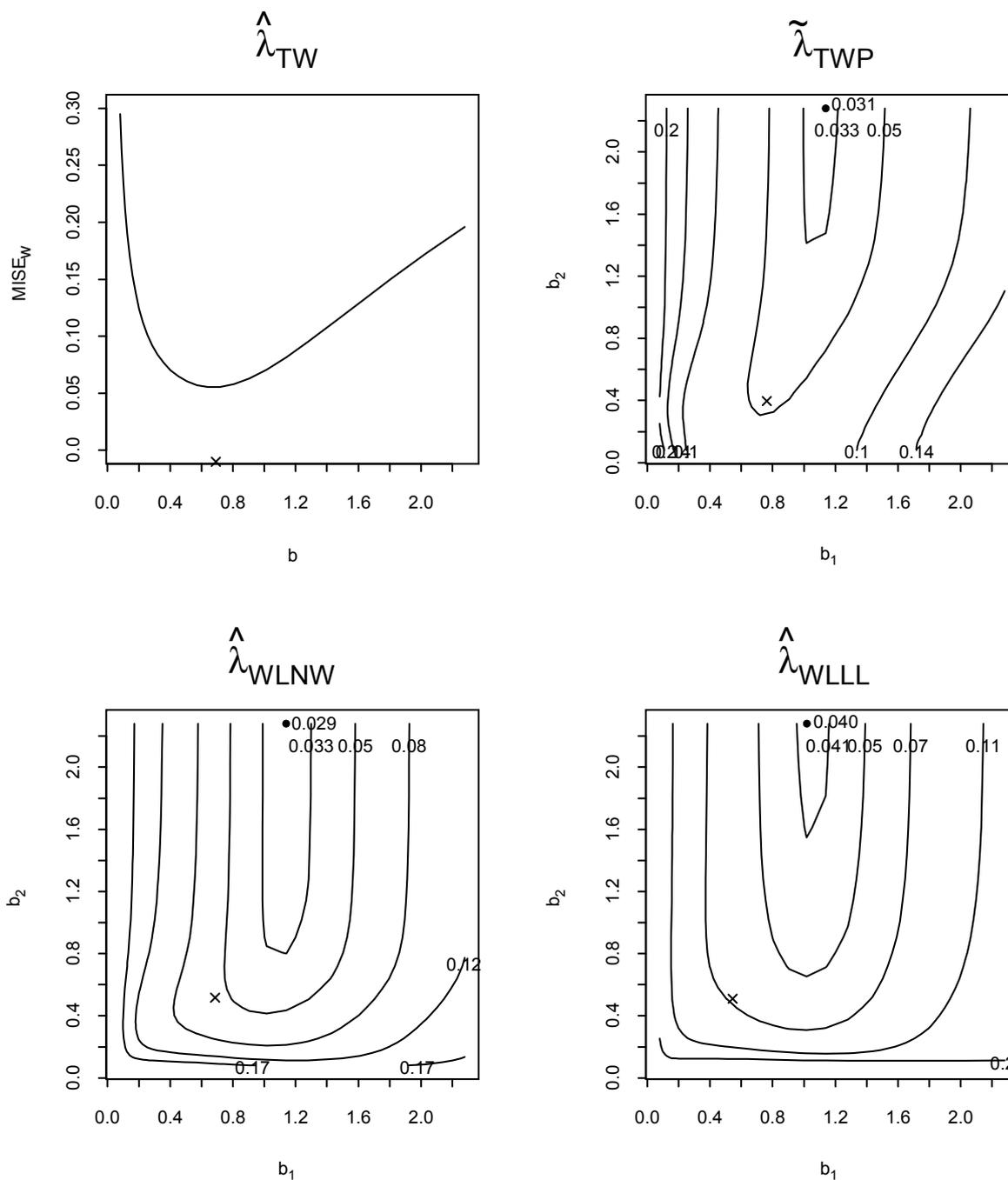


Figura 3.9. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo IV, $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (x) señala el valor de b_{AMISE_w} .

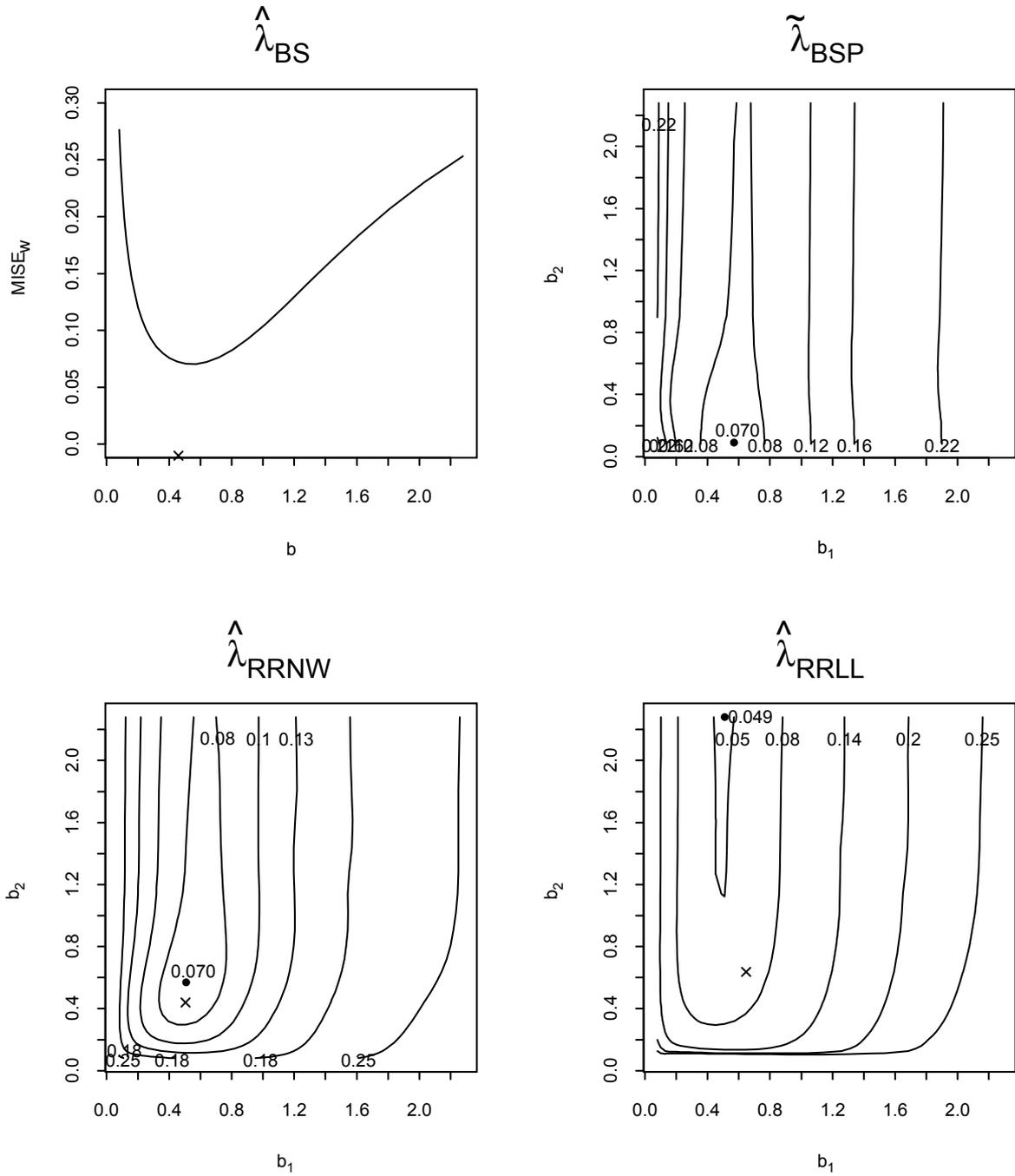


Figura 3.10. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo IV, $n = 30$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{BS}(t)$, $\hat{\lambda}_{BSP}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$. El aspa (x) señala el valor de b_{AMISE_w} .

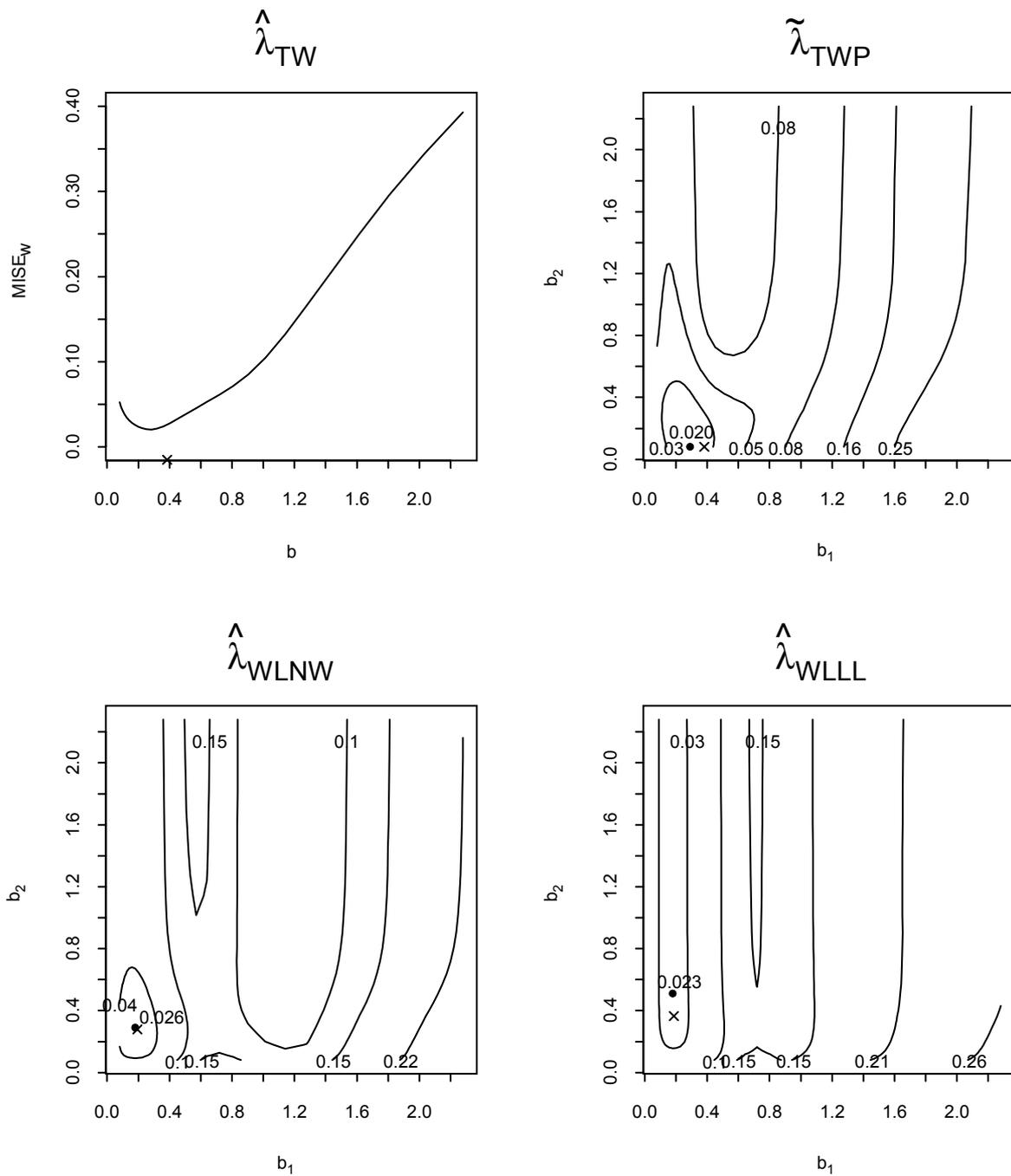


Figura 3.11. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo I , $n = 200$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\hat{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

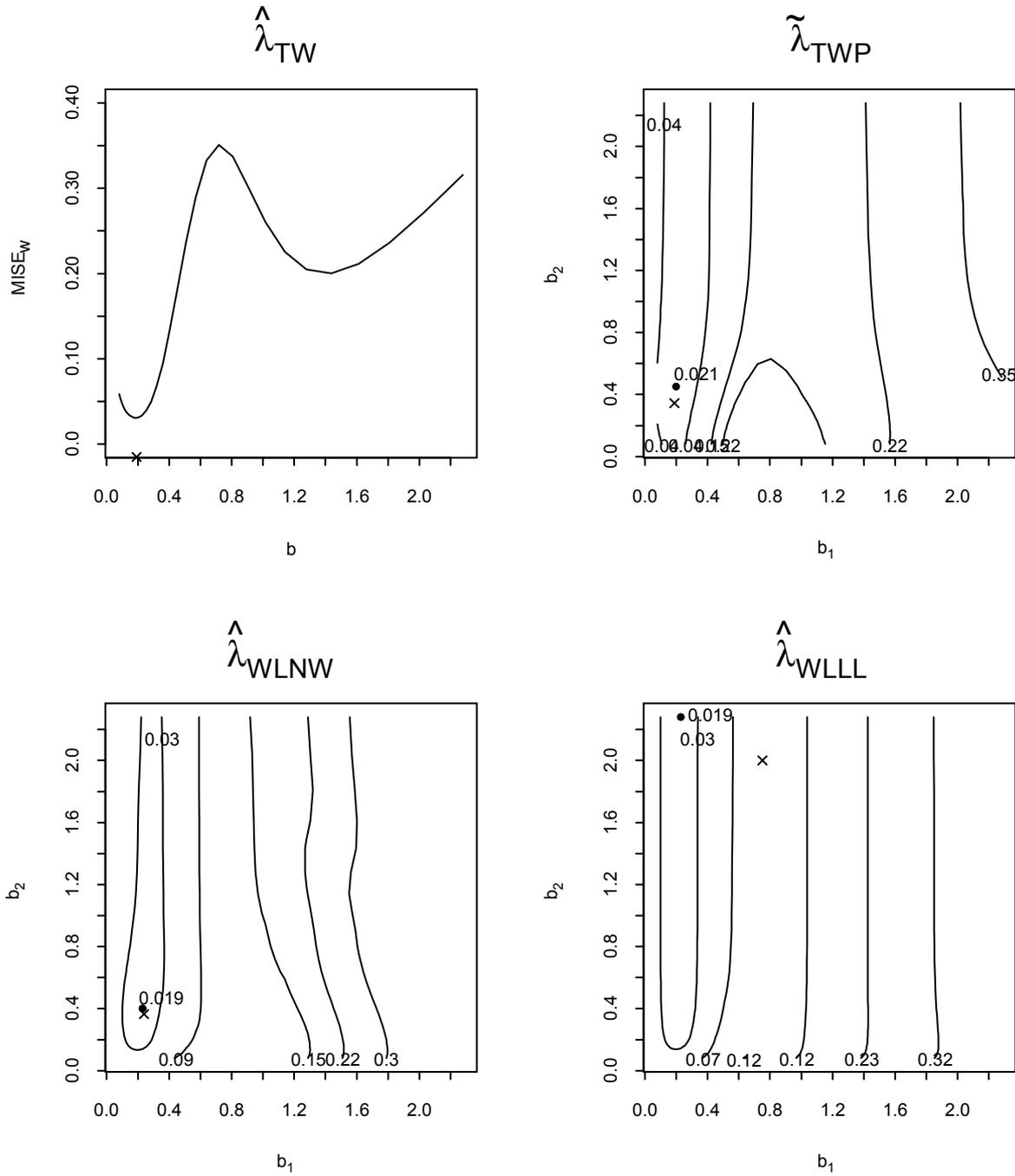


Figura 3.12. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo II , $n = 200$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

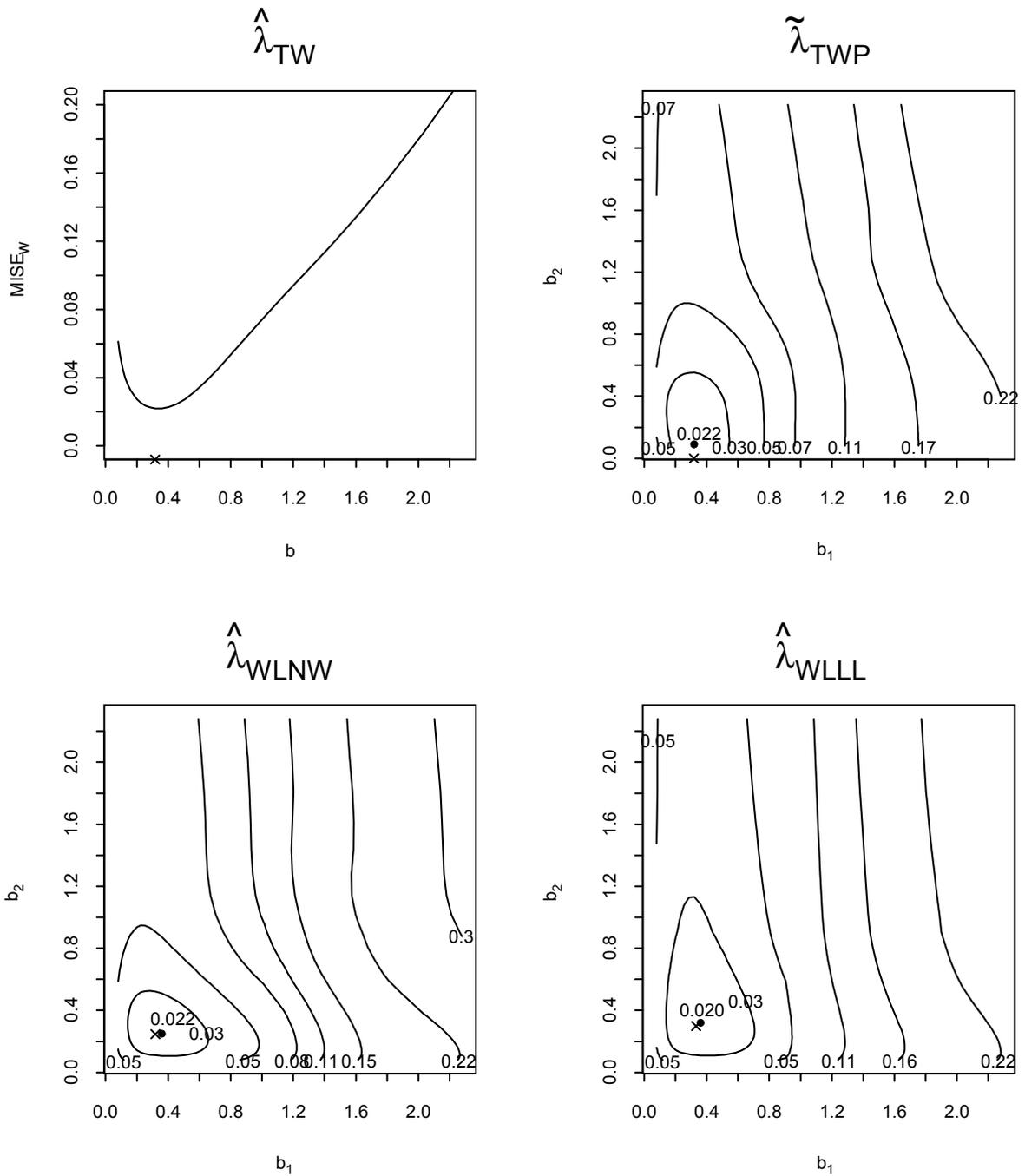


Figura 3.13. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo III, $n = 200$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\hat{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (×) señala el valor de b_{AMISE_w} .

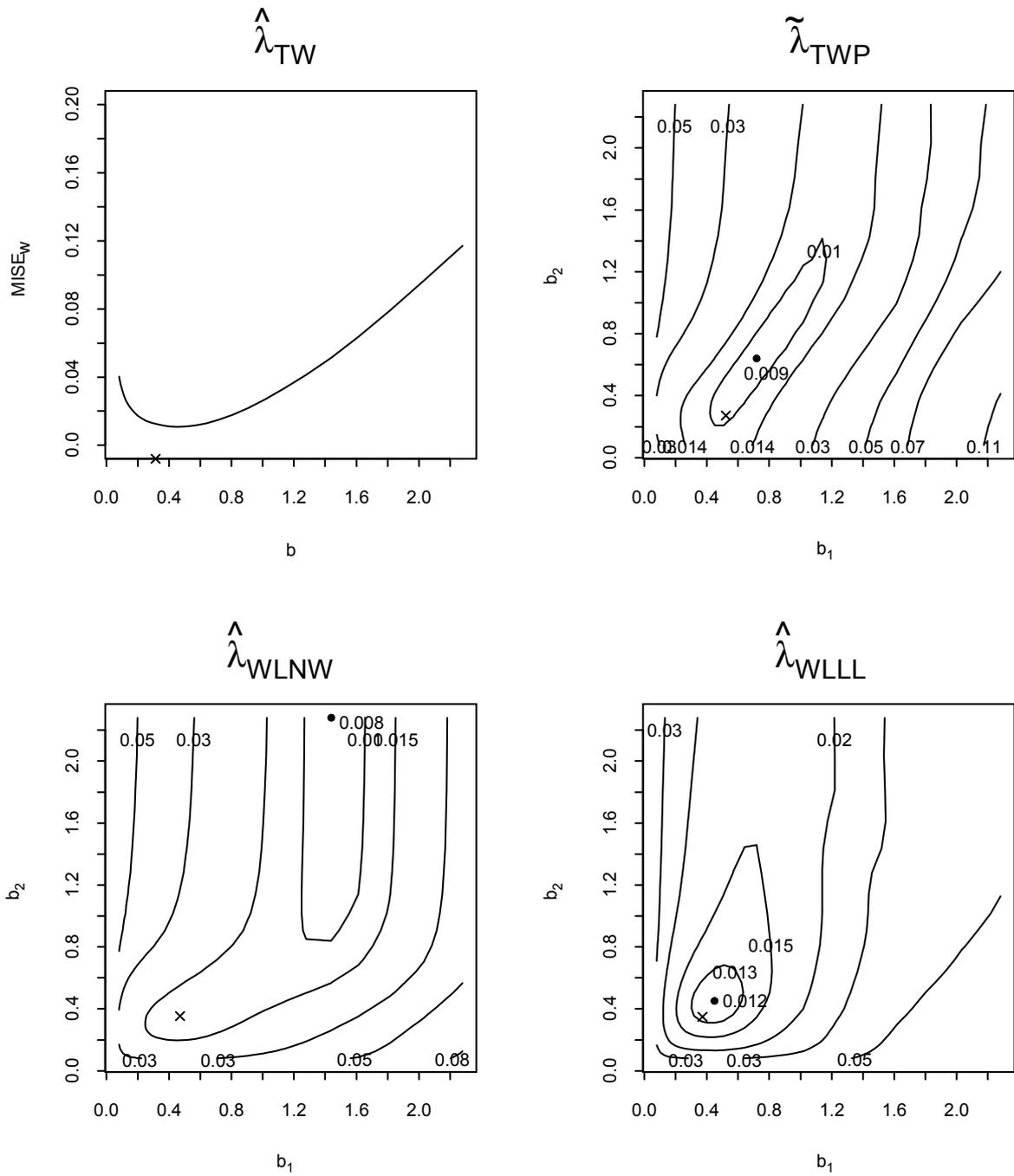


Figura 3.14. Aproximación del $MISE_w(\hat{\lambda}; b)$ para el modelo IV, $n = 200$ y los estimadores $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$. El aspa (\times) señala el valor de b_{AMISE_w} .

Capítulo 4

Aplicación a datos reales

*A los hombres les aguardan cuando mueren
cosas que no esperan ni imaginan.*

HERÁCLITO

En este capítulo se intenta profundizar en el aspecto práctico del comportamiento de los métodos expuestos en los capítulos precedentes mediante su aplicación a dos conjuntos de datos reales procedentes del campo de la Medicina. En la sección 4.1 se describen y documentan los datos empleados. El resultado de la aplicación de las técnicas detalladas en los capítulos 2 y 3 a la estimación de curvas de supervivencia para cada uno de los conjuntos de datos se expone en la sección 4.2.

4.1 Conjuntos de datos

4.1.1 Datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe

El carcinoma de células escamosas de cabeza y cuello es una enfermedad maligna con tasas de mortalidad y morbilidad significativas cuya incidencia ha aumentado en las últimas décadas. El conjunto de datos analizado representa la supervivencia de 305 pacientes con carcinoma de células escamosas localizado en la cavidad oral o la orofaringe que han recibido tratamiento en el Servicio de Cirugía Oral y Maxilofacial del Hospital de Cruces (Vizcaya) en el periodo comprendido entre el 1 de enero de 1990 y 30 de junio de 1999. La fecha de finalización del estudio es el 24 de setiembre de 1999. El tratamiento consiste en radioterapia, cirugía o una combinación de ambas. Para cada paciente se ha registrado el tiempo en días desde el inicio del tratamiento hasta la muerte o, en caso de que ésta no llegue a observarse, hasta el final del seguimiento (datos censurados por la derecha). La censura, presente en el 62.6% de los casos, es debida en la mayor parte de los casos (52.4%) a que el paciente llega vivo al fin del estudio; el 10.2% restante corresponde a pacientes que mueren por causa no relacionada con el tumor.

Como es de esperar en datos de esta naturaleza, existe una gran variabilidad entre pacientes respecto a características demográficas, clínicas o histológicas que han sido consideradas en numerosos estudios con el fin de aislar factores de riesgo en la evolución del tumor. La Tabla 4.1 describe algunas de las principales características estudiadas para los 305 pacientes del presente ejemplo. El estadio de la enfermedad se ha establecido mediante el sistema de clasificación TNM (Hermanek y Sobin (1987)), que a partir del estudio clínico y anatomopatológico permite valorar la extensión del cáncer según el tamaño ('T') del tumor primario, el número ('N') de nódulos linfáticos localmente afectados por la metástasis y la presencia de metástasis ('M') a distancia. Si bien formalmente se distinguen cuatro

estadios principales (de I a IV), en la Tabla 4.1 se alude colectivamente a los estadios I y II como estadios iniciales y a los estadios III y IV como estadios avanzados.

Tabla 4.1. Características de los pacientes de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

Característica	Frecuencia (%)
EDAD	
Menor de 65 años	70.2
65 o más años	29.8
SEXO	
Hombre	84.3
Mujer	15.7
FUMADOR	
Sí	77
No	23
CONSUMO DE ALCOHOL	
Sí	64.9
No	35.1
LOCALIZACIÓN DEL TUMOR	
Cavidad oral	86.6
Orofaringe	13.4
RADIOTERAPIA	
No	45.5
Preoperatoria	6.6
Postoperatoria	47.9
CLASIFICACIÓN TNM	
I o II (Estadio inicial)	35.4
III o IV (Estadio avanzado)	59.7
Sin establecer	4.9

4.1.2 Datos de cáncer gástrico

A pesar de las mejoras terapéuticas y de una relativa reducción en su incidencia, el cáncer gástrico continúa siendo una enfermedad grave y relativamente frecuente en el mundo occidental. Un amplio estudio de ámbito europeo con pacientes diagnosticados de cáncer gástrico en la década de los ochenta arroja probabilidades de supervivencia a los cinco años que oscilan del 6% de Inglaterra y Gales hasta el 19% de Suiza (Berrino *et al.* (1995)).

Casariago *et al.* (2001) presentan datos para una cohorte retrospectiva formada por todos los pacientes con adenocarcinoma gástrico diagnosticados en los Hospitales Xeral-Calde de Lugo y Juan Canalejo de A Coruña en el periodo 1975-1993. En esta aplicación se emplea sólo el subconjunto formado por los 1225 pacientes tratados en el Hospital lucense, lo que adicionalmente permite ignorar el posible efecto del hospital en la supervivencia. Para cada paciente se ha determinado el tiempo en días transcurrido desde el diagnóstico hasta la muerte o, en caso de que la observación esté censurada por la derecha, el final del seguimiento. La fecha de fin del estudio es el 1 de agosto de 1995. Sólo un 20.1% de los datos presentan censura, debida principalmente (17.7%) a que el paciente llega vivo al fin del estudio; el 2.4% restante consiste en pacientes perdidos para el seguimiento.

Se dispone también de los valores de un vector de covariables que pueden tener efecto sobre la supervivencia; las más destacables son: edad, sexo, localización del tumor, clasificación TNM y tipo de cirugía. La Tabla 4.2 describe a los pacientes según dichas características.

Tabla 4.2. Características de los pacientes de cáncer gástrico.

Característica	Frecuencia (%)
EDAD	
Menor de 65 años	35
65 o más años	65
SEXO	
Hombre	65.6
Mujer	34.4
LOCALIZACIÓN DEL TUMOR	
Tercio superior	16.7
Tercio medio	14
Tercio inferior	46.6
Muñón	1.9
Generalizada	14.2
Sin establecer	6.5
CLASIFICACIÓN TNM	
I y II (Estadio inicial)	30
III y IV (Estadio avanzado)	27.6
Sin establecer	42.4
CIRUGÍA	
Curativa	44.6
Paliativa	20.8
Ausente	34.6

4.2 Resultados

4.2.1 Aplicación a los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe

Estimación de la función de riesgo acumulativa y de la función de supervivencia

En el capítulo 2 se trató el tema de la selección de la ventana para el estimador de Nelson-Aalen presuavizado de la función de riesgo acumulativa,

$$\Lambda_n^P(t) = \sum_{i:T(i) \leq t}^n \frac{\widehat{p}(T(i))}{n - i + 1},$$

proponiéndose el selector de ventana ‘plug-in’

$$\widehat{b} = \left(\frac{e_k \widehat{Q}}{2\mu_k^2 n \widehat{A}} \right)^{1/3} \tag{4.1}$$

donde

$$\hat{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{p}(T_i) (1 - \hat{p}(T_i)) w(T_i)}{(1 - H_n(T_i) + \frac{1}{n})^2},$$

$$\hat{A} = \int_0^\infty \left(\int_0^t \frac{\frac{1}{2} \hat{p}''(s) \hat{h}(s) + \hat{p}'(s) \hat{h}'(s)}{1 - H_n(s) + \frac{1}{n}} ds \right)^2 w(t) dt.$$

Las ventanas piloto g_1 del denominador y g_2 del numerador de (4.1) se calculan empleando las expresiones (2.166) y (2.241), en las que se sustituyen H , p y sus derivadas por estimaciones obtenidas en el caso de H suponiendo que es una función de distribución lognormal y en el caso de p ajustando un modelo logístico.

Como se recordará, una de las condiciones para la validez de dicho procedimiento de selección de ventana exige que la probabilidad condicional de no censura, $p(t)$, sea constante e igual a 1 para todo t suficientemente próximo a cero (condición **(P.2)**, pág. 15). Es pertinente valorar, aunque sólo sea de modo gráfico, si es razonable afirmar que dicha condición se verifica para este conjunto de datos. En la Figura 4.1 se representa la estimación local lineal de $p(t)$, con ventana de amplitud 228.97 obtenida empleando el selector de ventana ‘plug-in’ de Ruppert, Sheather y Wand (1995). Aunque el valor de $\hat{p}(0)$, aproximadamente igual a 0.93, es algo inferior a 1, no es tan discordante con él si se tiene en cuenta tanto la tendencia general de la curva como la mayor variabilidad del estimador local lineal en la frontera. Para ilustrar esta propiedad se ha sobreimpresionado a la Figura 4.1 un gráfico de variabilidad del estimador local lineal, obtenido representando los percentiles de orden 2.5 y 97.5 de $\hat{p}(t)$ calculados a partir de 200 remuestras ‘bootstrap’ en una rejilla de valores de t (Simonoff (1996)).

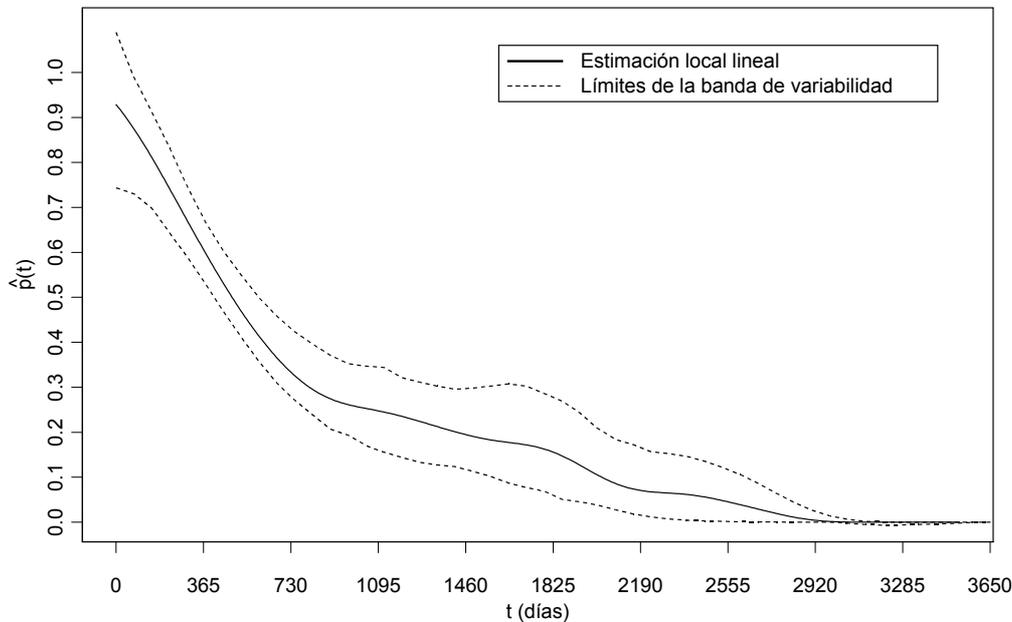


Figura 4.1. Estimación local lineal de $p(t)$ y banda de variabilidad para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaríngea.

Empleando un núcleo tripeso, las ventanas piloto obtenidas son $g_1 = 240.70$, $g_2 = 358.11$ y la ventana 'plug-in' $\hat{b} = 260.72$. Con esta última, se estima la función de riesgo acumulativa mediante el estimador de Nelson-Aalen presuavizado. Esta estimación se representa en la Figura 4.2 junto con la obtenida empleando el estimador de Nelson-Aalen clásico. La forma de las funciones estimadas es muy similar, con un rápido incremento en el primer año y medio de tratamiento que declina posteriormente. Se observa con claridad, principalmente a partir del tercer año, el carácter más local de la estimación presuavizada.

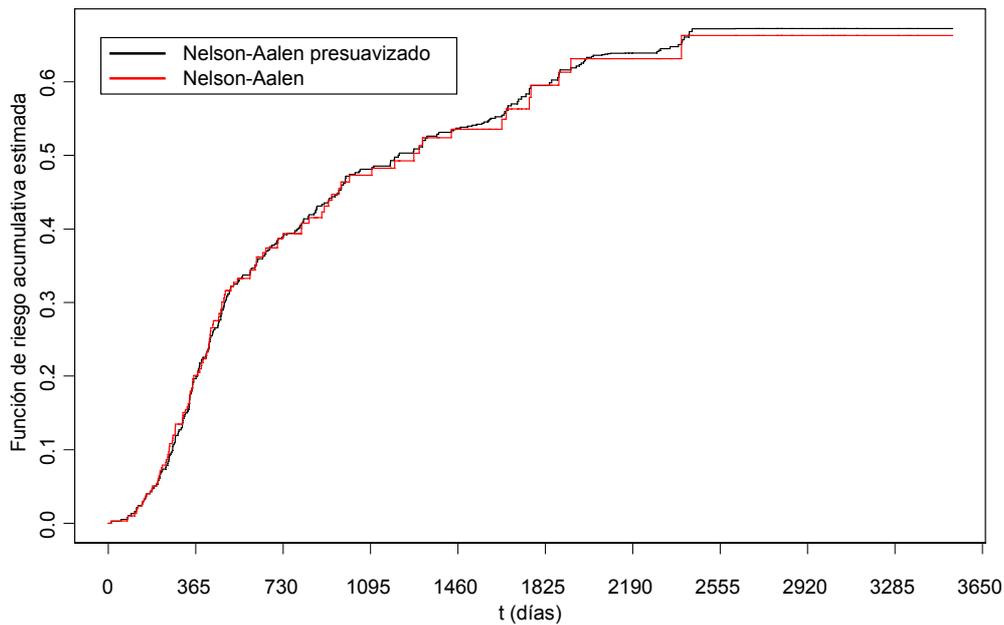


Figura 4.2. Estimaciones de Nelson-Aalen clásica y presuavizada de la función de riesgo acumulativa para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

En la Figura 4.3 se representan las estimaciones de la función de supervivencia obtenidas mediante el estimador de Kaplan-Meier y su versión presuavizada (2.6). La ventana empleada para esta última estimación, ante la ausencia de un selector de ventana específico, ha sido la misma utilizada para la estimación de la función de riesgo acumulativa. Las características generales de las funciones estimadas son similares a las comentadas en el caso de la función de riesgo acumulativa. Los cuatro primeros deciles de la distribución estimada del tiempo de supervivencia son 256, 395, 619 y 1299 para la estimación de Kaplan-Meier y 270, 390, 624 y 1299 para la presuavizada, muy similares a efectos prácticos, si bien el carácter menos discreto del estimador de Kaplan-Meier presuavizado permite en principio estimarlos con más precisión.

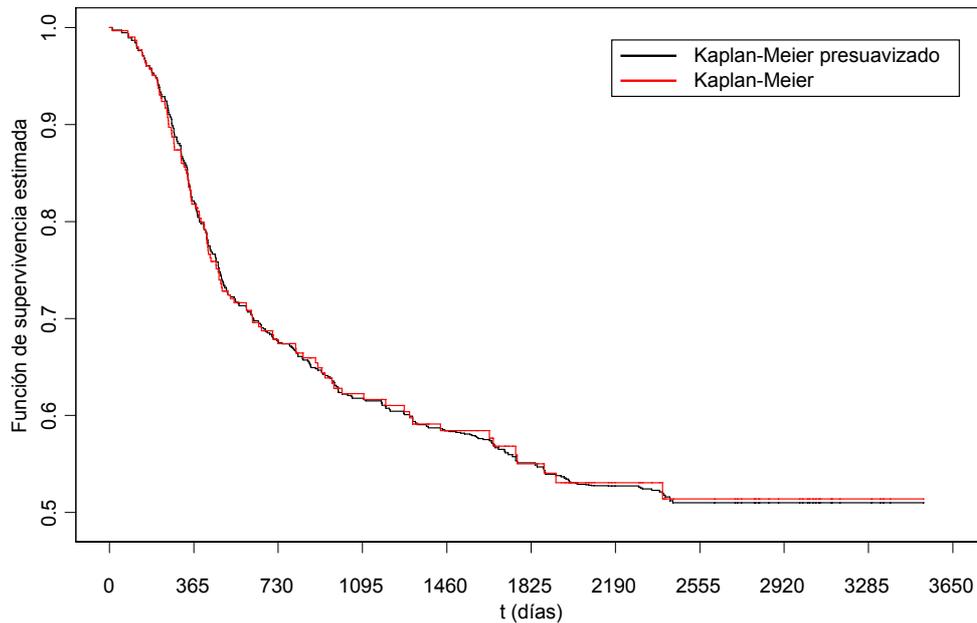


Figura 4.3. Estimaciones de Kaplan-Meier clásica y presuavizada de la función de supervivencia para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

Hasta ahora no se han tomado en consideración las variables descritas en la Tabla 4.1, pero es razonable esperar que afecten a la supervivencia del paciente. El modelo de riesgos proporcionales de Cox (Cox (1972)) es seguramente el modelo de regresión más empleado en el ámbito de la Medicina para cuantificar la relación entre el tiempo de supervivencia y un conjunto de covariables. En la Tabla 4.3 se detalla el modelo ajustado con un procedimiento de selección paso a paso hacia adelante ('forward stepwise') a partir del conjunto inicial de variables de la Tabla 4.1 y empleando en cada paso contrastes locales de Wald al nivel de significación del 5%. Las variables cualitativas se han codificado mediante variables indicadoras. Puesto que no se ha hecho uso de ningún mecanismo de imputación, la presencia de valores faltantes en la variable 'clasificación TNM' reduce el número de observaciones con que se ha construido el modelo a 290.

Tabla 4.3. Modelo de Cox ajustado y tabla ANOVA para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

Variable	Grados de libertad	Coefficiente estimado	Error estándar	Estadístico de Wald	p -valor
Clasificación TNM					
III o IV	1	1.037	0.241	18.4410	<0.0001
Edad					
65 o más años	1	-0.555	0.241	5.3260	0.021

De la Tabla 4.3 se desprende que el factor más importante que afecta a la supervivencia es la clasificación TNM del tumor, un hallazgo habitual en conjuntos de datos similares al que nos ocupa

(Odell *et al.* (1994), Beltrami *et al.* (1992)). Concretamente, los pacientes con cáncer en estadio avanzado exhiben un riesgo de morir $\exp(1.037) \simeq 2.82$ veces mayor que los que se hallan en un estadio inicial (bajo igualdad de la otra covariable del modelo). La importancia de la edad es menor, pero, como indica el signo negativo del coeficiente estimado, los pacientes más jóvenes tienen un riesgo de morir $\exp(0.555) \simeq 1.74$ veces mayor que los de mayor edad. Para investigar la naturaleza del efecto de la edad y la clasificación TNM, se ha ajustado un modelo con un término adicional de interacción entre ambos factores, que resultó no ser significativo.

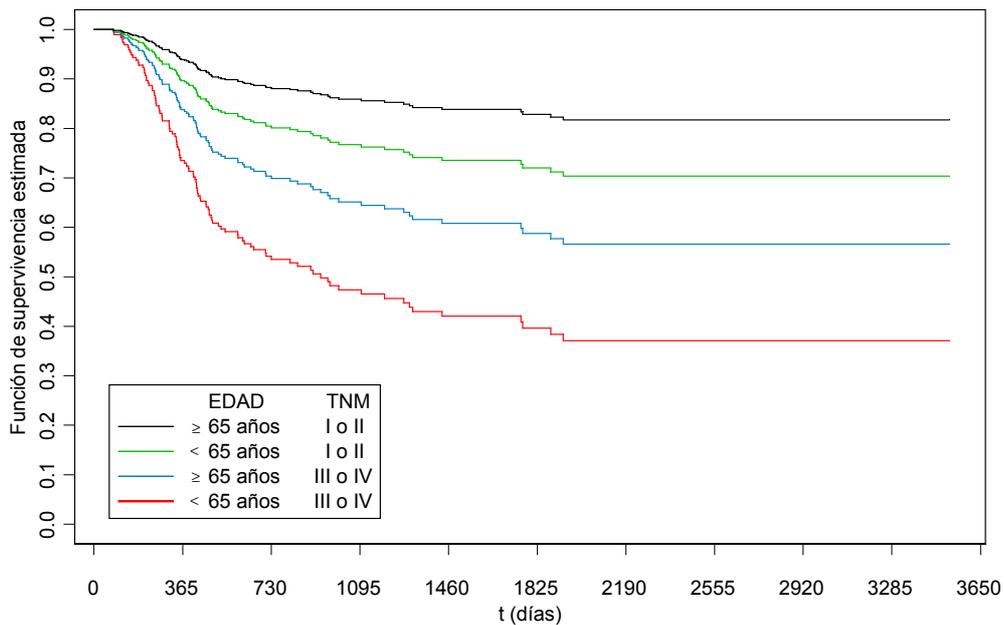


Figura 4.4. Funciones de supervivencia estimadas para un paciente según su edad y clasificación TNM del cáncer.

Una vez ajustado un modelo de riesgos proporcionales de Cox, es posible obtener estimaciones de la probabilidad de supervivencia para un paciente con un conjunto dado de covariables. La función de supervivencia del paciente con vector de covariables $X = x_P$, se estima mediante el estimador

$$1 - \widehat{F}(t|X = x_P) = \left(1 - \widehat{F}_0(t)\right)^{\exp(b'x_P)}$$

donde b es el vector de estimaciones de los coeficientes del modelo y $1 - \widehat{F}_0(t)$ un estimador de la función de supervivencia basal, es decir, de la supervivencia de un individuo con vector de covariables $X = 0$. En la Figura 4.4 se muestran las funciones de supervivencia estimadas para pacientes de cada uno de los grupos definidos por las posibles combinaciones de las covariables ‘edad’ y ‘clasificación TNM’ empleando las estimaciones del modelo de riesgos proporcionales de la Tabla 4.3 y, como estimador de la función de supervivencia basal, el estimador de Breslow (Breslow (1974))

$$1 - \widehat{F}_0(t) = \exp\left(-\widehat{\Lambda}_0(t)\right)$$

donde $\hat{\Lambda}_0(t)$ es el estimador de la función de riesgo acumulativa basal

$$\hat{\Lambda}_0(t) = \sum_{T_i \leq t} \frac{d_i}{\sum_{j \in R(T_i)} \exp(b'x_j)}$$

y $T_i, i = 1, 2, \dots, D$, denotan los (distintos) tiempos en los que ocurre (al menos) una muerte, $R(T_i)$ denota el conjunto de individuos que permanecen bajo estudio en un instante inmediatamente anterior a T_i y, finalmente, d_i es el número de muertes en el instante T_i .

Por supuesto, la propia validez de la regresión de Cox requiere que sea cierta la hipótesis de riesgos proporcionales, es decir, que el cociente de las funciones de fallo de dos individuos cualesquiera sea independiente del tiempo (se supone que las covariables no varían en el tiempo). Existen en la literatura numerosos contrastes de bondad de ajuste propuestos para detectar la violación de la asunción de riesgos proporcionales, pero los métodos gráficos disfrutan sin duda de mayor popularidad (aunque esto no signifique necesariamente que sean más convenientes). Uno de los métodos más utilizados es la representación de un diagrama de dispersión suavizado de los residuos de Schoenfeld escalados (Grambsch y Therneau (1994)). En la Figura 4.5 se muestra este tipo de gráfico con una suavización de tipo ‘spline’ e intervalos de confianza al 90% para el modelo ajustado a los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe. La evidente falta de horizontalidad de la línea suavizada, al menos para la variable más significativa, la ‘clasificación TNM’, constituye una indicación de no proporcionalidad.

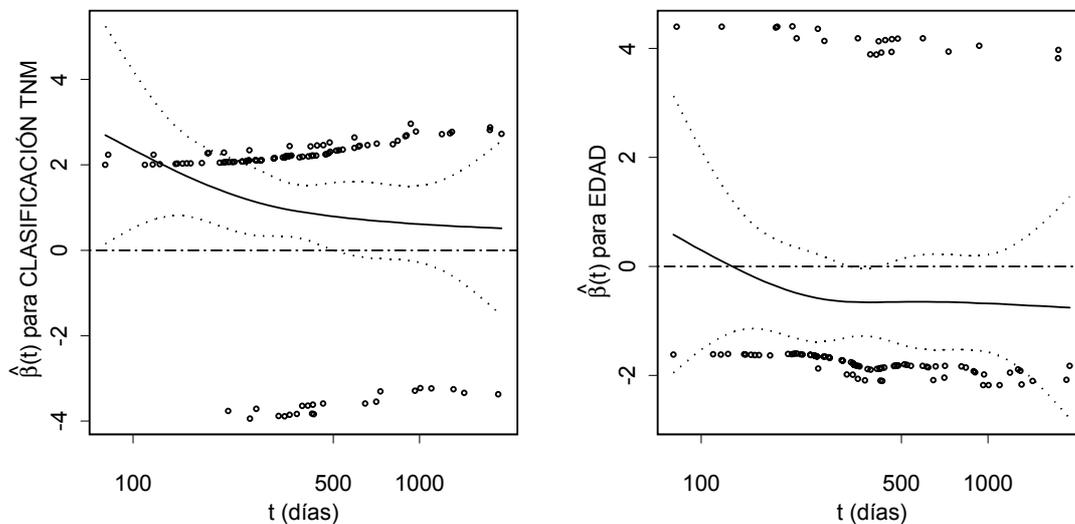


Figura 4.5. Diagrama de dispersión suavizado de los residuos de Schoenfeld escalados de los predictores del modelo de Cox ajustado para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

La Figura 4.5 sugiere que el efecto desfavorable debido a una mayor extensión del cáncer en el instante de iniciar el tratamiento desaparece con el tiempo. Este hecho quizás signifique que con el tiempo todos los enfermos progresan hacia una misma fase avanzada de la enfermedad, con lo que la clasificación inicial resulta de cada vez menor valor. Por su parte, el efecto protector de la edad sólo se manifiesta a partir del primer año de tratamiento, pero, en cualquier caso, no parece haber gran

evidencia contra la hipótesis de riesgos proporcionales para esta variable. Aunque por no alejarnos de nuestro interés principal no proseguiremos esta discusión, es evidente que si se decidiera otorgar significación a estas observaciones habría que pensar en alternativas al modelo que subyace a la Tabla 4.3, como, tal vez, un modelo de Cox estratificado según la covariable ‘clasificación TNM’.

Estimación de la función de riesgo

En situaciones de interés práctico, como las que nos ocupan en los ejemplos de este capítulo, la función de riesgo tiene más interés que la función de riesgo acumulativa, debido a su interpretación más directa en términos de riesgo. A continuación, se aplican los estimadores de la función de riesgo de tipo producto ($\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLl}(t)$) y el estimador de Tanner-Wong presuavizado ($\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$), todos ellos estudiados en el capítulo 3, a la estimación de la función de riesgo para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

Evidentemente, como en todo método de suavización de tipo núcleo, necesita seleccionarse previamente el valor de la ventana. Puesto que la selección de ventana es un problema abierto para los estimadores del capítulo 3, en este (y el siguiente) ejemplo la elección se hará de un modo sencillo, empleando los teoremas 3.4.1-3.4.5, donde se dan expresiones para el $AMISE_w$ de las partes dominantes de las representaciones asintóticas de cada estimador en función de la ventana. El procedimiento consiste en tomar como ventana para los estimadores $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRLl}(t)$ y $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ el minimizador, aproximado numéricamente, de las funciones análogas a las (3.167), (3.173), (3.178), (3.179) y (3.180), respectivamente, en las que se han reemplazado λ_H , H , p y sus derivadas por estimaciones calculadas suponiendo la lognormalidad de H y mediante el ajuste de un modelo logístico para p . Como función de peso, w , se ha tomado el indicador del intervalo de extremos los percentiles de orden 5 y 95 de los tiempos observados. Dado que cuando b_2 —el parámetro de suavización de $\hat{p}(t)$ del estimador $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ — tiende a cero se recupera el estimador de Tanner-Wong, $\hat{\lambda}_{TW}(t)$, para este estimador se ha hecho uso de la misma función objetivo que para la versión presuavizada con la restricción $b_2 = 0$. En la Tabla 4.4 —donde se utiliza la misma notación que en el capítulo 3—, se muestran los valores de las ventanas.

Tabla 4.4. Ventanas elegidas con los distintos estimadores de la razón de fallo para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

Estimador	Ventana	
	b_1	b_2
$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	256.41	420.64
$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	294.21	482.66
$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	236.71	388.31
$\hat{\lambda}_{RRLl}(t)$	266.12	436.57
$\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$	295.73	125.09
$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	300.91	-

En las Figuras 4.6-4.11 se representan las diferentes estimaciones de la función de riesgo $\lambda_F(t)$ obtenidas con las correspondientes ventanas de la Tabla 4.4. Para facilitar las comparaciones entre estimaciones el estimador $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ sirve de referencia común en dichas figuras. En principio, el núcleo es en todos los casos el de Epanechnikov, aunque en la frontera se modifica (salvo en el caso del

estimador local lineal de $p(t)$, donde es innecesario), empleándose en la forma del núcleo de frontera siguiente (Gasser y Müller (1979)),

$$K_a(x) = K(x) \left(\frac{64(2 - 4a + 6a^2 - 3a^3) + 240(1 - a^2)x}{(1 + a)^4(19 - 18a + 3a^2)} \right) \mathbf{1}(-1 \leq x \leq a)$$

donde, si b es la ventana y $t < b$ el tiempo para el que se trata de estimar la función de riesgo, se define $a = \frac{t}{b}$ y $K(x)$ denota el núcleo de Epanechnikov.

El examen de las Figuras 4.6-4.10 sugiere que las ventanas elegidas proporcionan un grado de suavización adecuado de las estimaciones salvo tal vez en el caso de $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ y $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$, que parecen infrasuavizadas (la elevación final en la cola derecha es provocada por un caso no censurado aislado). Las figuras 4.8 y 4.9 revelan una característica poco conveniente de los estimadores $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$, que se manifiesta como un gráfico de apariencia más o menos ‘ruidosa’. Este hecho es debido a que, considerados como funciones de t , ambos estimadores presentan discontinuidades en los puntos que coinciden con los tiempos observados. Con todo, es previsible que la magnitud del efecto sea importante sólo para tamaños muestrales pequeños.

Todas las estimaciones tienen una interpretación similar en lo esencial: un brusco aumento del riesgo de morir a consecuencia del cáncer al año aproximadamente de iniciarse el tratamiento, seguido de una atenuación gradual del riesgo en los años posteriores, tal vez con un repunte transitorio del riesgo aproximadamente al quinto año.

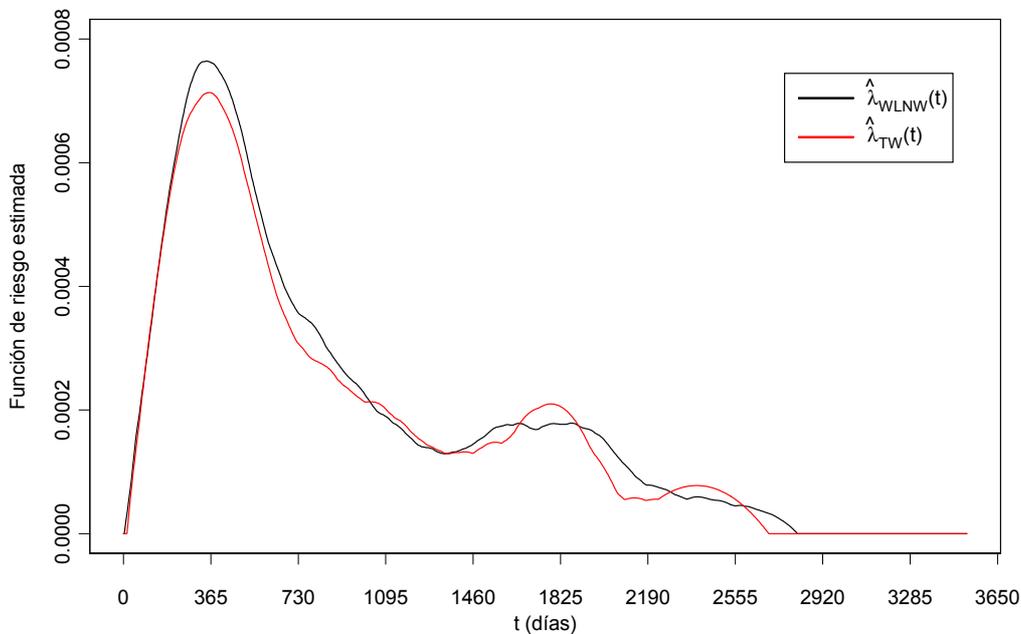


Figura 4.6. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaríngea.

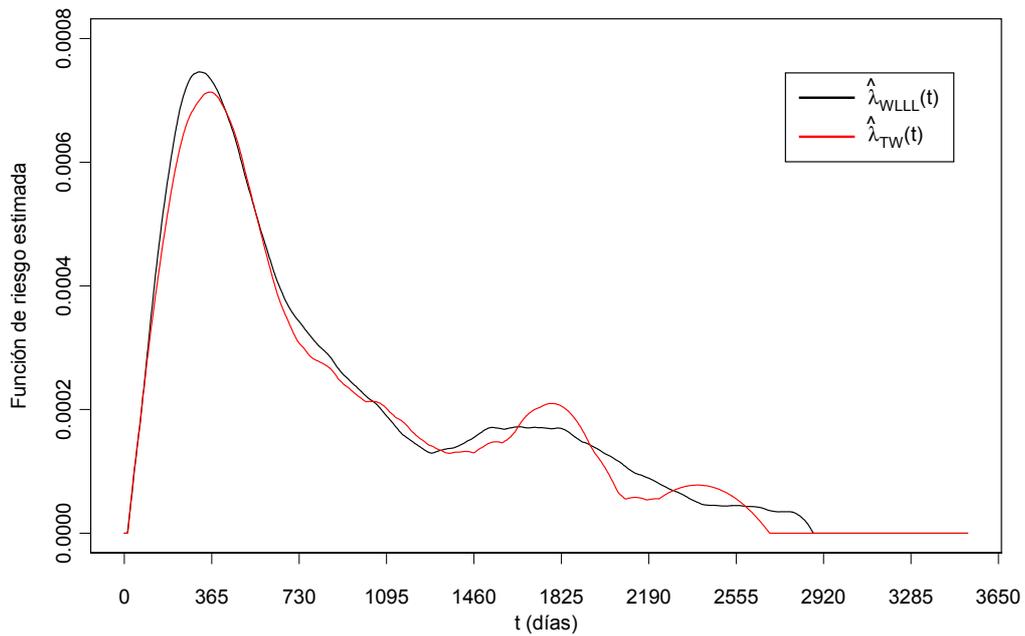


Figura 4.7. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer de cavidad oral y orofarínge.

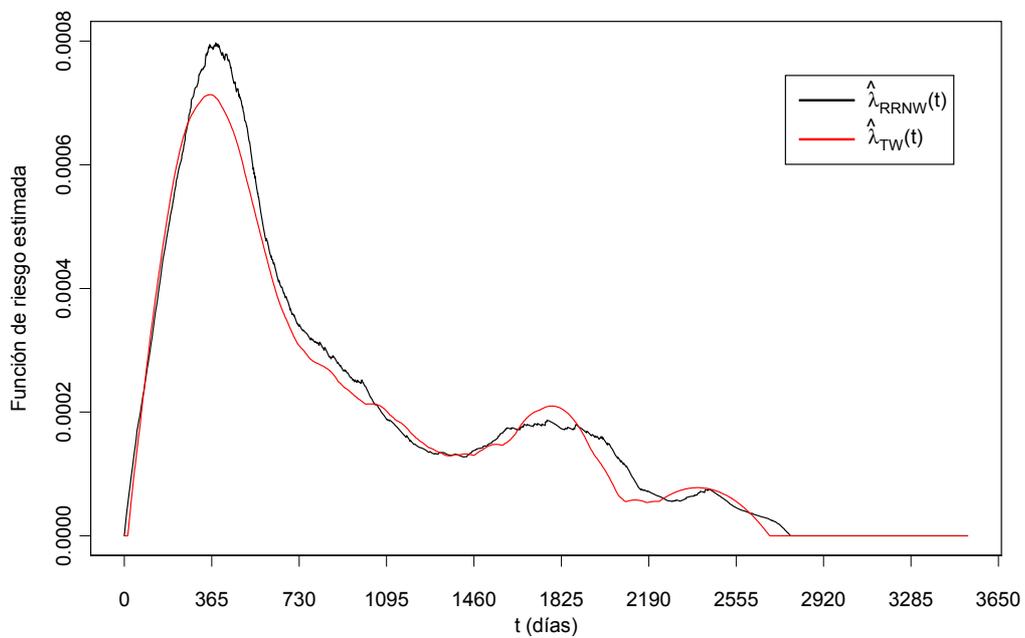


Figura 4.8. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer de cavidad oral y orofarínge.



Figura 4.9. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

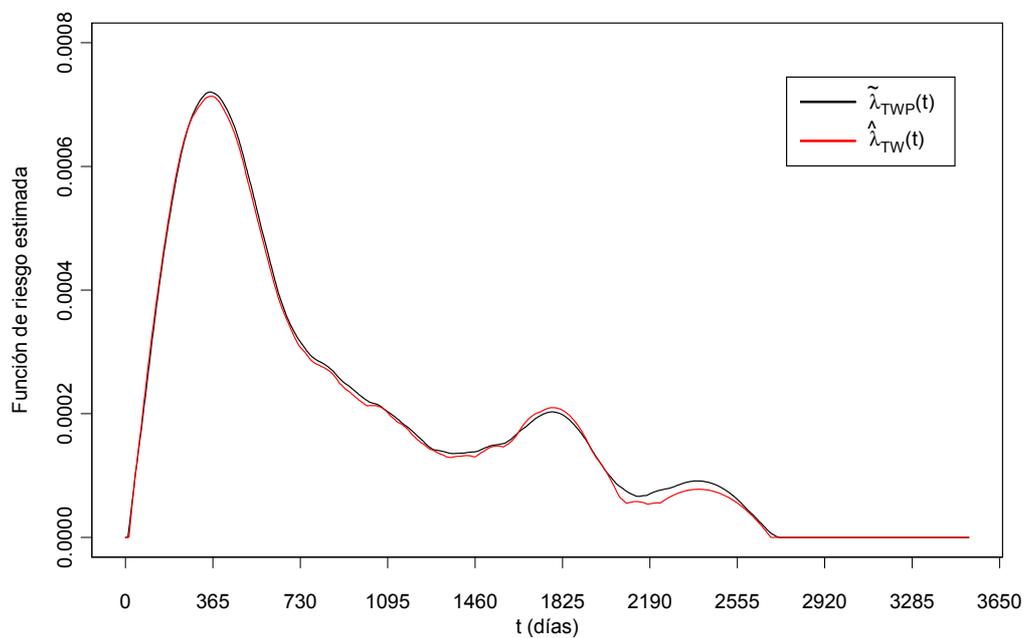


Figura 4.10. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe.

4.2.2 Aplicación a los datos de cáncer gástrico

Estimación de la función de riesgo acumulativa y de la función de supervivencia

Como en el ejemplo previo, el análisis de este conjunto de datos se inicia examinando la forma de la función $p(t)$ con el fin de contrastar si es razonable suponer que su valor sea constantemente igual a 1 para valores en la proximidad de 0 (condición **(P.2)**, pág. 15). La Figura 4.11 muestra la estimación local lineal de $p(t)$ obtenida con el selector de ventana de Ruppert, Sheather y Wand. A pesar de la evidente infrasuavización de la estimación en la cola derecha —problema debido a la falta de adaptación de la ventana global—, esta circunstancia no impide afirmar la plausibilidad de la condición **(P.2)**.

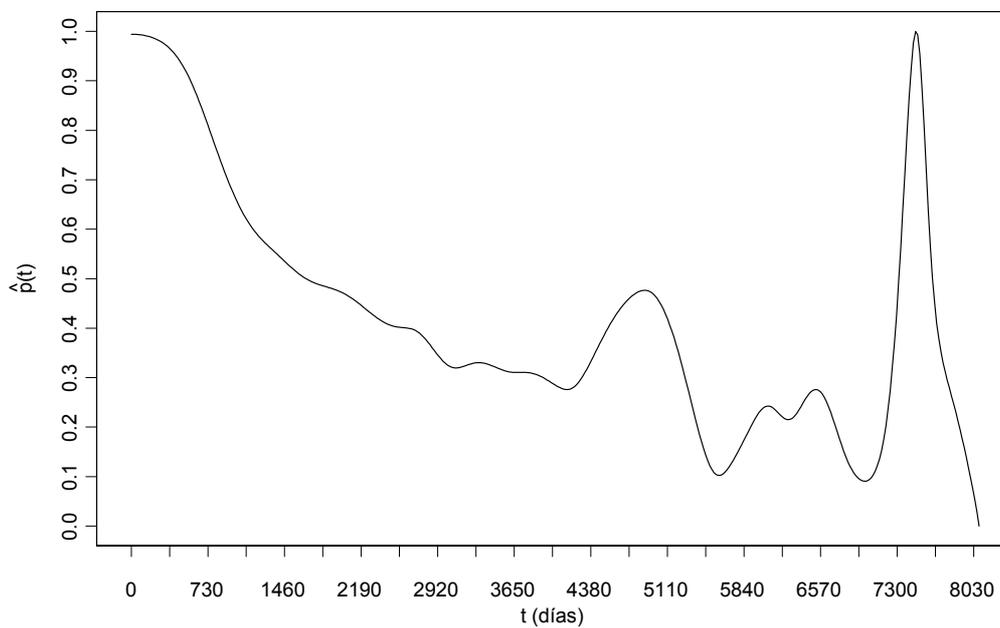


Figura 4.11. Estimación local lineal de $p(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

En las Figuras 4.12 y 4.13 se representan estimaciones de la función de riesgo acumulativa, $\Lambda_F(t)$, y de la función de supervivencia, $S(t)$, respectivamente. En el caso de la estimación de $\Lambda_F(t)$ se han calculado los estimadores de Nelson-Aalen clásico y su variante presuavizada con ventana elegida mediante el selector ‘plug-in’ propuesto en el capítulo 3. El valor numérico de esta ventana es 105.90. En cuanto a la estimación de $S(t)$, se consideran análogamente los estimadores de Kaplan-Meier clásico y presuavizado, tomando para este último la misma ventana que se ha tomado en el caso de $\Lambda_F(t)$. Tanto para $\Lambda_F(t)$ como para $S(t)$ se aprecia que las estimaciones clásica y presuavizada son muy semejantes, con tan sólo diferencias visualmente perceptibles en la cola derecha. Ello no es sorprendente, dado el pequeño tamaño de la ventana en términos relativos (el rango de los tiempos observados es 8082). No obstante, para valorar en su justa dimensión el tamaño de la ventana es conveniente señalar que la distribución de los tiempos observados presenta una fuerte asimetría, con mediana en 335 días.

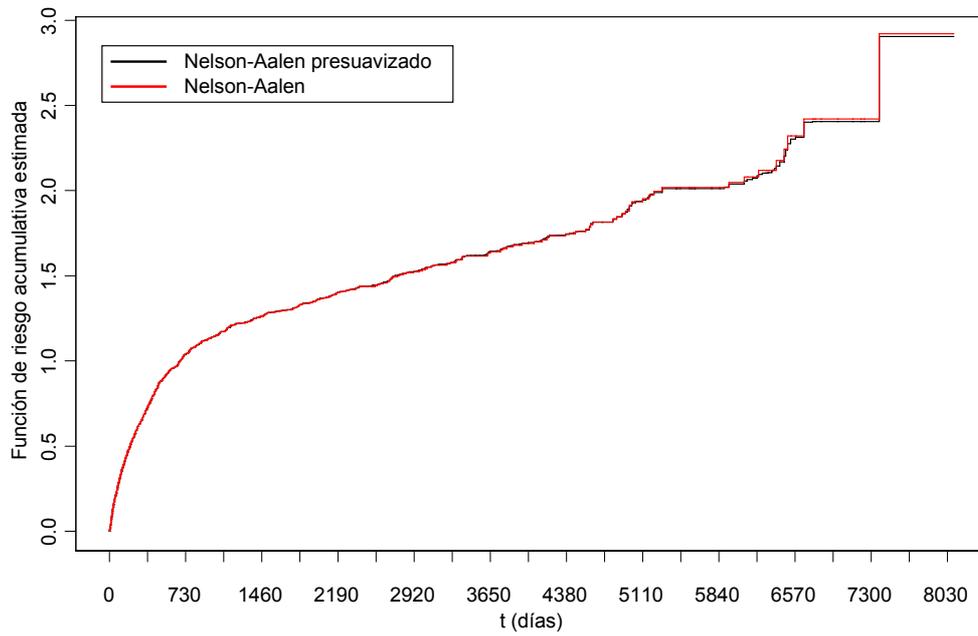


Figura 4.12. Estimaciones de Nelson-Aalen clásica y presuavizada de la función de riesgo acumulativa para los datos de cáncer gástrico.

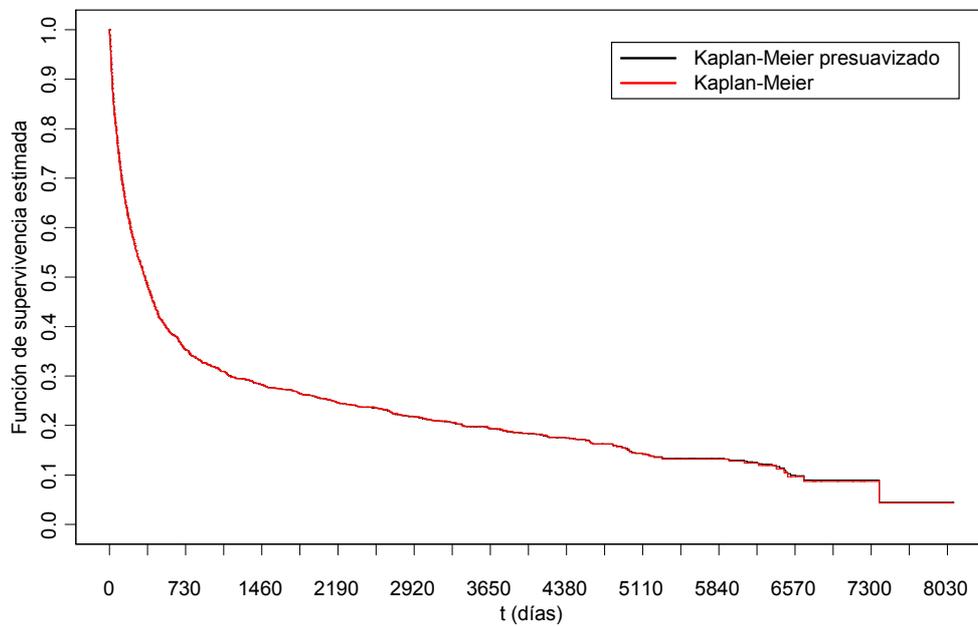


Figura 4.13. Estimaciones de Kaplan-Meier clásica y presuavizada de la función de supervivencia para los datos de cáncer gástrico.

Las curvas de las Figuras 4.12 y 4.13 reflejan claramente la gravedad de la enfermedad en los momentos iniciales a partir del diagnóstico. Nótese especialmente la fuerte pendiente positiva de la estimación de $\Lambda_F(t)$ —es decir, el elevado valor de la función de riesgo— en los primeros días del seguimiento, aunque descienda a partir de entonces de modo consistente. Por otra parte, la mediana estimada del tiempo de supervivencia es, de acuerdo con la Figura 4.13, de sólo 339 días.

Un análisis de regresión de Cox con las covariables de la Tabla 4.2 revela un efecto significativo de las variables ‘tipo de cirugía’, ‘localización del tumor’ y ‘clasificación TNM’ sobre el tiempo de supervivencia (Tabla 4.5). En este sentido, la variable más importante es el ‘tipo de cirugía’, estimándose el aumento del riesgo de muerte respecto a los pacientes tratados con cirugía curativa en 2.79 veces para los pacientes tratados con cirugía paliativa y en 4.23 para los no intervenidos.

Tabla 4.5. Modelo de Cox ajustado y tabla ANOVA para los datos de cáncer gástrico.

Variable	Grados de libertad	Coeficiente		Estadístico de	
		estimado	Error estándar	Wald	p -valor
Tipo de cirugía	2			202.7127	<0.0001
paliativa	1	1.0263	0.0990	107.3661	<0.0001
ausente	1	1.4415	0.1066	182.8923	<0.0001
Clasificación TNM					
III o IV	1	0.4110	0.0897	20.9768	<0.0001
Localización del tumor	4			22.1691	0.0002
tercio medio	1	0.2283	0.1060	4.6440	0.0312
tercio superior	1	0.0066	0.1215	0.0029	0.9569
muñón	1	-0.1623	0.2857	0.3226	0.5701
generalizada	1	0.4711	0.1082	18.9592	<0.0001

Estimación de la función de riesgo

Se ha estimado la función de riesgo, $\lambda_F(t)$, para los datos de cáncer gástrico mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$, $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$, $\hat{\lambda}_{TWP}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$. El procedimiento seguido para la elección de la ventana es el ya descrito en el epígrafe correspondiente para los datos de cáncer de cavidad oral y orofaringe. Las ventanas empleadas con cada estimador se detallan en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6. Ventanas elegidas con los distintos estimadores de la razón de fallo para los datos de cáncer gástrico.

Estimador	Ventana	
	b_1	b_2
$\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$	115.35	336.19
$\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$	127.26	2277.14
$\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$	84.04	303.34
$\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$	94.10	2608.70
$\hat{\lambda}_{TWP}(t)$	126.63	15.61
$\hat{\lambda}_{TW}(t)$	126.70	-

En general, todas las estimaciones presentan en común una evidente infrasuavización para tiempos largos (por ejemplo, para más de 3650 días), como se ilustra en la Figura 4.14 para el estimador $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$. Se trata de un problema habitual en otros contextos, ligado a la naturaleza global de la ventana seleccionada. Las diferentes estimaciones de $\lambda_F(t)$ se muestran en las Figuras 4.15-4.19, en las que se ha limitado la escala temporal hasta 3650 días, para ocultar la estructura que de modo posiblemente espurio aparece para tiempos mayores. Conviene, en este sentido, observar que algo más del 90% de las observaciones corresponden a tiempos inferiores a 3650 días y que este periodo de tiempo (aproximadamente 10 años) representa un seguimiento satisfactorio de los pacientes desde el punto de vista de la historia natural de la enfermedad. En los mencionados gráficos, $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ desempeña un papel de referencia para facilitar las comparaciones entre estimadores.

Todas las estimaciones calculadas muestran un perfil semejante, más allá de la mayor o menor suavización determinada por la amplitud de la ventana. El riesgo de muerte es máximo en el momento del diagnóstico y decrece rápidamente desde ese momento: hasta cuatro veces transcurridos entre 400 y 450 días, según el estimador. En realidad, el riesgo de muerte parece continuar disminuyendo al menos durante los primeros diez años hasta llegar a ser entre 23 y 28 veces inferior al inicial. Las elevaciones transitorias del riesgo observables en la cola derecha pueden perfectamente ser debidas a una insuficiente suavización. Ahora bien, un hecho curioso es que los máximos de dichas elevaciones tienden a coincidir con múltiplos de un año. Dada la dificultad de explicar esta periodicidad por causas biológicas, este hallazgo podría arrojar alguna sospecha sobre la calidad de los datos, aunque la simple inspección visual de los datos brutos no revela ninguna anomalía. Por último, es difícil valorar si la aparente elevación del riesgo en la fase final que sugiere la Figura 4.14, semejante a la que caracteriza a la mortalidad de la población general, es o no un fenómeno real.

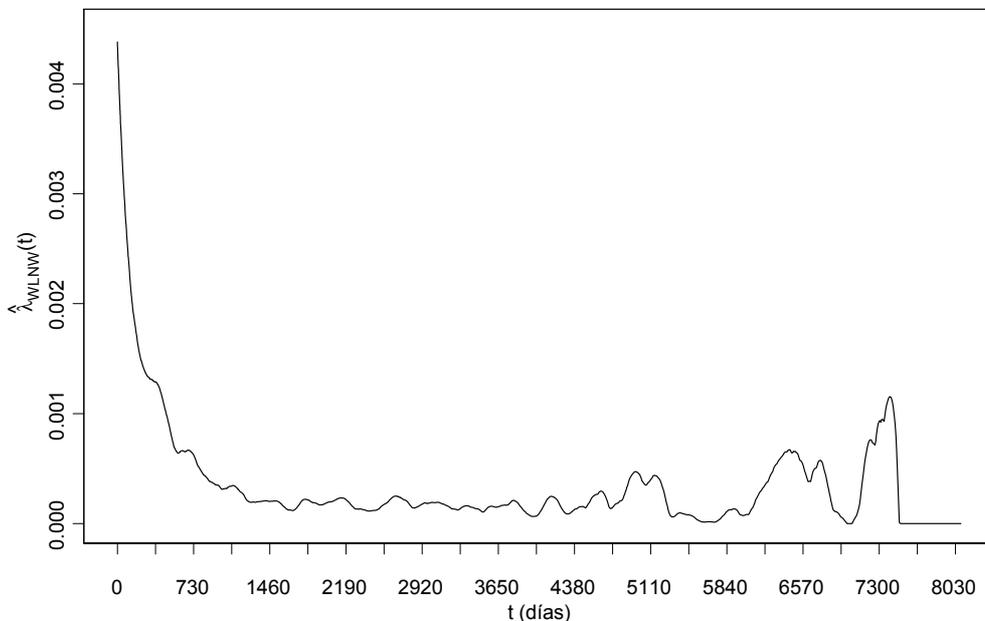


Figura 4.14. Estimación de la función de riesgo mediante el estimador $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

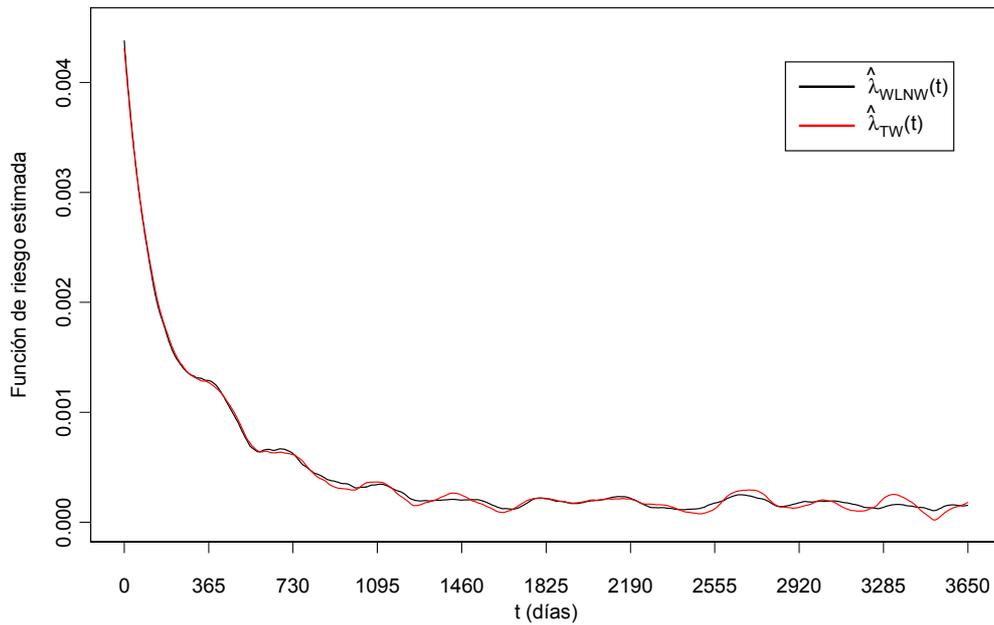


Figura 4.15. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{WLNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

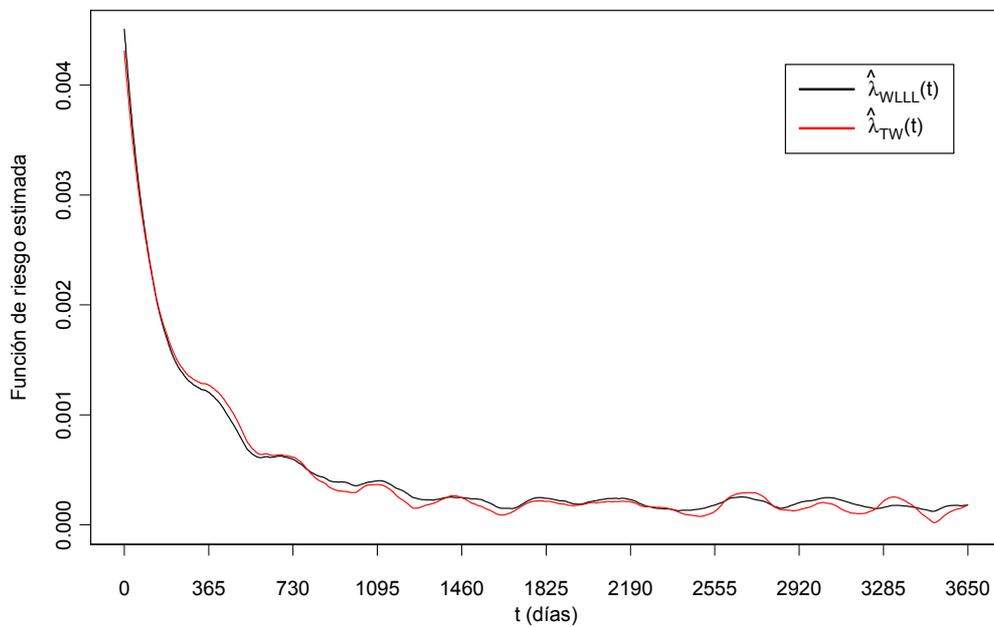


Figura 4.16. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

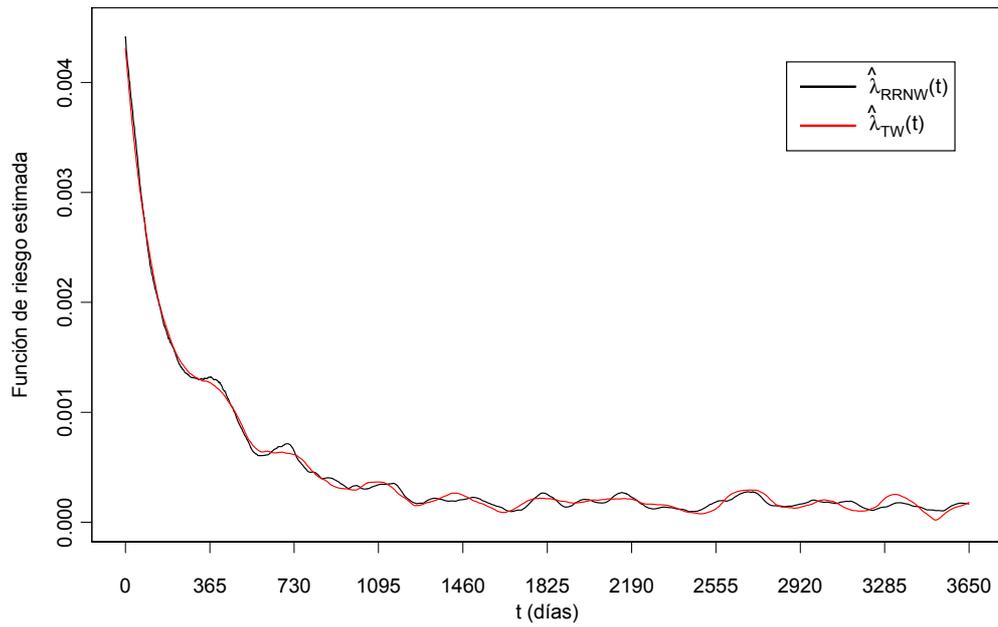


Figura 4.17. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{RRNW}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

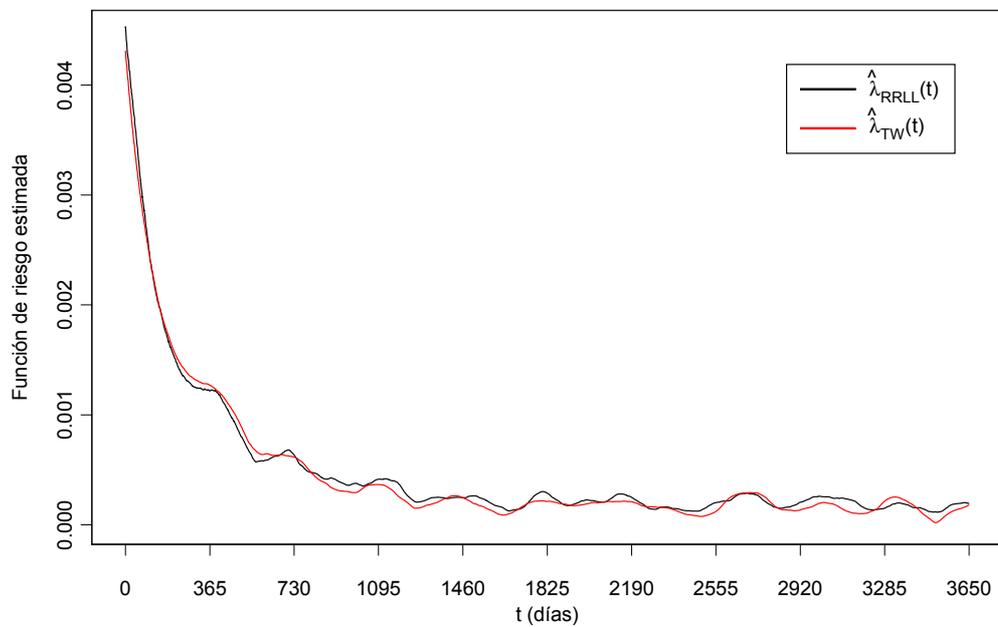


Figura 4.18. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\hat{\lambda}_{RRLL}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

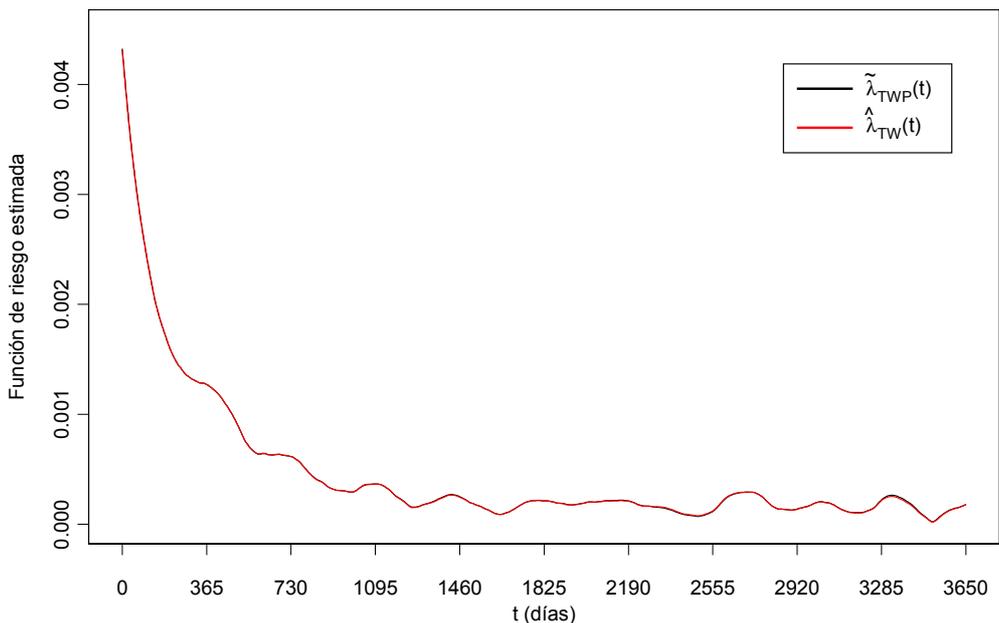


Figura 4.19. Estimación de la función de riesgo mediante los estimadores $\tilde{\lambda}_{TWP}(t)$ y $\hat{\lambda}_{TW}(t)$ para los datos de cáncer gástrico.

Evidentemente, el riesgo no es homogéneo para todos los pacientes afectados de cáncer gástrico. Esta idea fue la que guió el análisis de regresión de Cox efectuado en el epígrafe anterior, que permitió reconocer las covariables con mayor influencia sobre el tiempo de supervivencia supuesto el modelo de riesgos proporcionales. En la Figura 4.20 se comparan las estimaciones de la función de riesgo en los primeros cinco años desde el diagnóstico para los pacientes clasificados según el tratamiento quirúrgico que se les aplicó: cirugía curativa (*i.e.*, sin enfermedad residual apreciable al término), paliativa (*i.e.*, con enfermedad residual apreciable al término) o ausencia de cirugía. Como se recordará, ésta era la variable más importante en el análisis de regresión. Se ha utilizado el estimador $\hat{\lambda}_{WLLL}(t)$, con una ventana distinta para cada grupo de tratamiento calculada por el mismo método empleado con anterioridad. El gráfico confirma que los riesgos de los tres grupos son muy distintos en las fases iniciales: los pacientes con menor riesgo son los que reciben cirugía curativa y los de mayor riesgo los no sujetos a cirugía, situándose el grupo de cirugía paliativa se sitúa en un nivel intermedio. No obstante, es igualmente clara la tendencia de los tres riesgos a converger una vez transcurridos alrededor de dos años desde el diagnóstico. Aunque la curva parece infrasuavizada, llama la atención la distinta forma de la función de riesgo en el grupo con cirugía paliativa en la proximidad del origen, con un máximo del riesgo que sólo se alcanza tras aproximadamente 52 días.

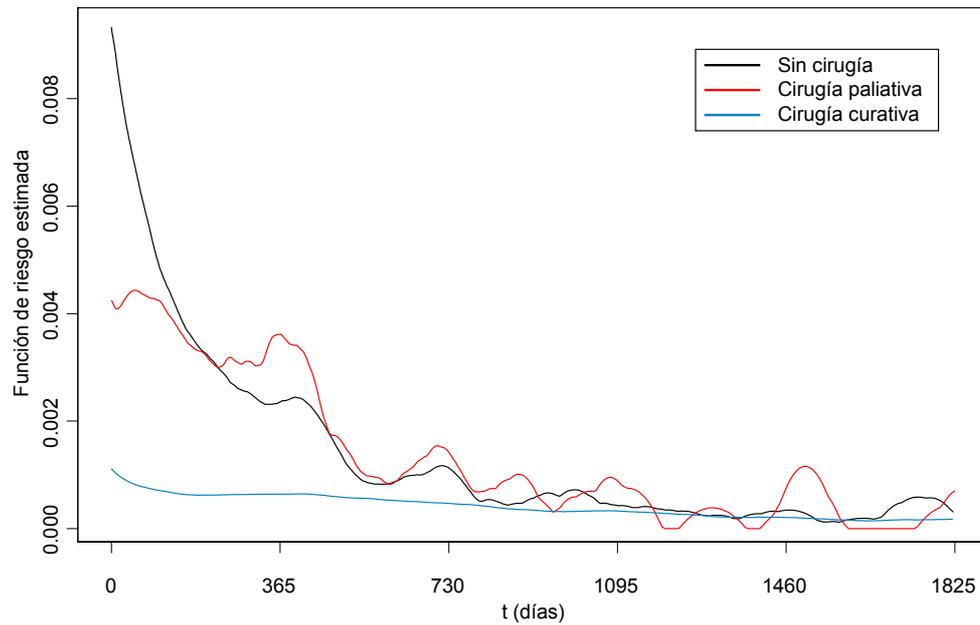


Figura 4.20. Estimación de la función de riesgo según el tipo de cirugía para los datos de cáncer gástrico.

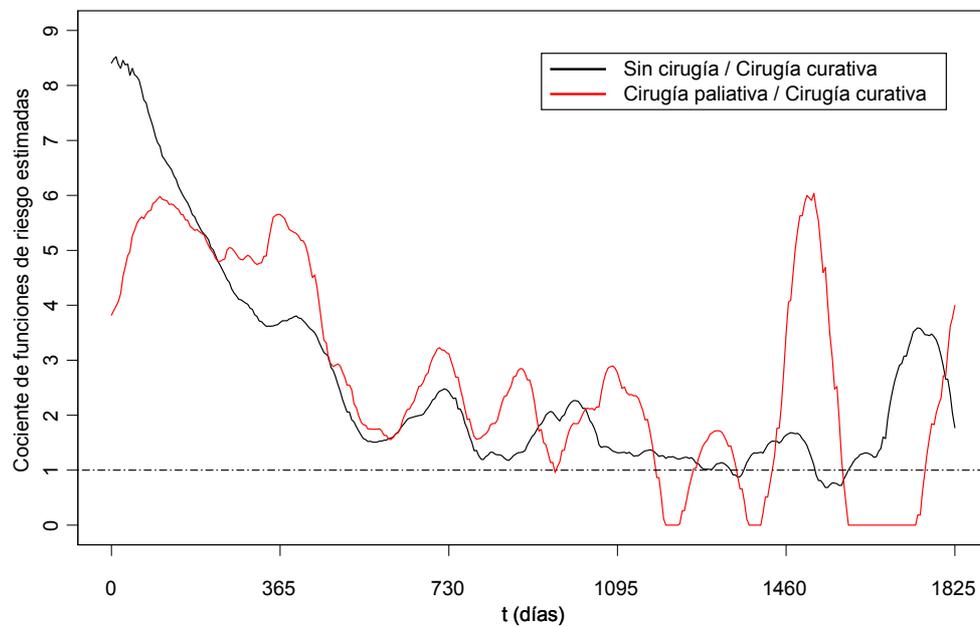


Figura 4.21. Cociente entre la función de riesgo estimada del grupo sin cirugía (o con cirugía paliativa) y la función de riesgo estimada del grupo con cirugía curativa.

La Figura 4.20 puede cuestionar la validez de la hipótesis de proporcionalidad de riesgos para la covariable ‘tipo de cirugía’, desde el momento en que las razones de fallo de los grupos con cirugía curativa y paliativa se cruzan. Obsérvese que ello no implicaría necesariamente que el modelo de regresión de Cox considerado en la Tabla 4.4 fuera incorrecto, ya que incluye otras dos variables que podrían estar confundidas con el tipo de cirugía para las que ahora no se ha hecho ningún ajuste. La Figura 4.21, en la que se representa el cociente de la estimación de la función de riesgo sin cirugía o con cirugía paliativa entre la estimación de la función de riesgo con cirugía curativa en función del tiempo, permite valorar más directamente la hipótesis de proporcionalidad. Haciendo abstracción de la variabilidad inherente a las estimaciones, en ambos casos el cociente se aproxima a 1 (igualdad de riesgos) en la mitad derecha del gráfico, pero se aleja progresivamente de ese valor al acercarse al origen, lo que constituye una indicación de no proporcionalidad de la covariable.

Bibliografía

- [1] Aalen, O. O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting processes. *The Annals of Statistics*, **6**, 701-726.
- [2] Abdushukurov, A. A. (1987). Estimation of the probability density and intensity function of the Koziol-Green model of random censoring, *Sankhya Series A*, **48**, 150-168.
- [3] Andersen, P. K., Borgan, O. Gill, R. D. y Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [4] Beltrami, C. A., Desinan, L. y Rubini, C. (1992). Prognostic factors in squamous cell carcinoma of the oral cavity. A retrospective study of 80 cases. *Pathology, Research and Practice*, **188**, 510-516.
- [5] Berrino, F., Sant, M., Verdecchia, A., Capocaccia, R., Hakulinen, T. y Esteve, J. (1995). *Survival of cancer patients in Europe. The Eurocare study*. International Agency for Research on Cancer, Lyon.
- [6] Blum, J. R. y Susarla, V. (1980). Maximal deviation theory of density and failure rate function estimates based on censored data. En *Multivariate Analysis-V*, ed. P. R. Krishnaiah. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 213-222.
- [7] Breslow, N. E. (1974). Covariance analysis of censored survival data. *Biometrics*, **30**, 89-99.
- [8] Breslow, N. E. y Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. *The Annals of Statistics*, **2**, 437-455.
- [9] Cao, R., Cuevas, A. y González Manteiga, W. (1994). A comparative study of several smoothing methods in density estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, **17**, 153-176.
- [10] Cao, R., López de Ullibarri, I., Janssen, P. y Veraverbeke, N. (2003). Presmoothed estimators for censored data. Enviado a *Journal of Nonparametric Statistics*.
- [11] Cao, R. y Jácome, M. A. (2004). Presmoothed kernel density estimation for censored data. *Journal of Nonparametric Statistics*, **16**, 289-309.
- [12] Casariego, E., Pita, S., Rigueiro, M. T., Pértega, S., Rabuñal, R., García-Rodeja, M. E. y Álvarez, L. (2001). Supervivencia en 2334 pacientes con cáncer gástrico y factores que modifican el pronóstico. *Medicina Clínica (Barc)*, **117**, 361-365.
- [13] Cheng, P. E. (1987). A nearest neighbor hazard rate estimator for randomly censored data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **16**, 613-625.
- [14] Cheng, P. E. y Lin, G. D. (1987). Maximum likelihood estimation of a survival function under the Koziol-Green proportional hazards model. *Statistics & Probability Letters*, **5**, 75-80.

- [15] Cox, D. R. (1972). Regression models and life tables (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **34**, 187-220.
- [16] Cox, D. R. (1975). Partial likelihood. *Biometrika*, **62**, 269-276.
- [17] Cox, D. R. y Oakes, D. (1984). *Analysis of Survival Data*. Chapman & Hall, Londres.
- [18] Dikta, G. (1998). On semiparametric random censorship models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **66**, 253-279.
- [19] Efron, B. (1967). The two sample problem with censored data. En *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Prentice-Hall, Nueva York, **4**, 831-853.
- [20] Fan, J. y Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and its Applications*. Chapman & Hall, Londres.
- [21] Gasser, T. y Müller, H. G. (1979). Kernel estimation of regression functions. En *Smoothing Techniques for Curve Estimation*, eds. T. Gasser y M. Rosenblatt. Springer-Verlag, Berlín, 23-68.
- [22] Gill, R. D. (1980). Censoring and Stochastic Integrals. *Mathematical Centre Tracts*, **124**. Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- [23] González Manteiga, W. Cao, R. y Marron, J.S. (1996). Bootstrap selection of the smoothing parameter in nonparametric hazard rate estimation. *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 1130-1140.
- [24] Grambsch, P. M. y Therneau, T. M. (1994). Proportional hazard tests and diagnostics based on weighted residuals. *Biometrika*, **81**, 515-526.
- [25] Hall, P. y Marron, J. S. (1987). Extent to which least-squares cross-validation minimises integrated square error in nonparametric density estimation. *Probability Theory and Related Fields*, **74**, 567-581.
- [26] Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, Boston.
- [27] Hassani, S., Sarda, P. y Vieu, P. (1986). Approche non paramétrique en théorie de la fiabilité: revue bibliographique. *Revue de Statistiques appliquées*, **35**, 27-41.
- [28] Hermanek, P. y Sobin, L. (1987). *TNM Classification of Malignant Tumors*. Springer-Verlag, Berlín.
- [29] Johansen, S. (1978). The product limit estimate as a maximum likelihood estimate. *Scandinavian Journal of Statistics*, **5**, 195-199.
- [30] Kalbfleisch, J. D. y Prentice, R. L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley, Nueva York.
- [31] Kaplan, E. L. y Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, **53**, 457-481.
- [32] Klein, J. P. y Moeschberger, M. L. (1997). *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [33] Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Wiley, Nueva York.

- [34] Liu, R. Y. C. y Ryzin, J. van (1985). A histogram estimator of the hazard rate with censored data. *The Annals of Statistics*, **13**, 592-605.
- [35] Mack, Y. P. y Silverman, B. W. (1982). Weak and strong uniform consistency of kernel regression estimates. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **61**, 405-415.
- [36] Matsushita, S., Hagiwara, K., Shiota, K., Shimada, H. Kuramoto, K y Toyokura, Y. (1992). Lifetime data analysis of disease and aging by the Weibull probability distribution. *Journal of Clinical Epidemiology*, **45**, 1165-1175.
- [37] Müller, H. G. y Wang, J. L. (1994). Hazard rate estimation under random censoring with varying kernels and bandwidths. *Biometrics*, **50**, 61-76.
- [38] Murthy, V. K. (1965). Estimation of jumps, reliability and hazard rate. *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 1032-1040.
- [39] Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability and its Applications*, **10**, 186-190.
- [40] Nelson, W. (1972). Theory and applications of hazard plotting for censored failure data. *Technometrics*, **14**, 945-965.
- [41] Odell, E. W., Jani, P. y Sherrif, M. (1994). The prognostic value of individual histologic grading parameters in small lingual squamous cell carcinoma. *Cancer*, **74**, 789-794.
- [42] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1065-1076.
- [43] Patil, P. N. (1993). Bandwidth choice for nonparametric hazard rate estimation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **35**, 15-30.
- [44] Patil, P. N. (1997). Nonparametric hazard rate estimation by orthogonal wavelet methods. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **60**, 153-168.
- [45] Press, W. H., Teukolsky, S. A. , Vetterling, W. T. y Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [46] Ramlau-Hansen, H. (1983). Smoothing counting process intensities by means of kernel functions. *The Annals of Statistics*, **11**, 453-466.
- [47] Rice, J. y Rosenblatt, M. (1976). Estimation of the log survivor function and hazard function. *Sankhya Series A*, **38**, 60-78.
- [48] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, **27**, 832-837.
- [49] Ruppert, D., Sheather, S. J. y Wand, M. P. (1995). An effective bandwidth selector for local least squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 1257-1270.
- [50] Sarda, P. y Vieu, P. (1991). Smoothing parameter selection in hazard estimation. *Statistics & Probability Letters*, **11**, 429-434.
- [51] Sheather, S. J. y Jones, M. C. (1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **53**, 683-690.

- [52] Silverman, B. W. (1978). Weak and strong uniform consistency of the kernel estimate of a density and its derivatives. *The Annals of Statistics*, **6**, 177-184.
- [53] Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall, Londres.
- [54] Simonoff, J. S. (1996). *Smoothing Methods in Statistics*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [55] Singpurwalla, N. D. y Wong, M.-Y. (1983). Estimation of the failure rate: a survey of non-parametric methods. Part I: Non-bayesian methods. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **12**, 559-588.
- [56] Tanner, M. A. y Wong W. H. (1983). The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel method. *The Annals of Statistics*, **11**, 989-993.
- [57] Vaart, A. W. van der (1998). *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [58] Vereerstraeten, P. (1994). Analyse paramétrique de la survie en transplantation rénale. *Néphrologie*, **15**, 343-349.
- [59] Wand, M. P. y Jones, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall, Londres.
- [60] Watson, G. S. y Leadbetter, M. R. (1964). Hazard analysis II. *Sankhya Series A*, **26**, 110-116.
- [61] Watson, G. S. (1964). Smooth Regression Analysis. *Sankhya Series A*, **26**, 359-372.
- [62] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 293-297.
- [63] Whittle, P. (1958). On the smoothing of probability density functions. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **20**, 334-343.
- [64] Yandell, B. S. (1983). Nonparametric inference for rates with censored data. *The Annals of Statistics*, **11**, 1119-1135.
- [65] Ziegler, S. (1995). *Ein modifizierter Kaplan-Meier Schätzer*. Tesis de licenciatura. Universidad Justus Liebig, Giessen.