

VARIETADES DE LORENTZ SIN PUNTOS CONJUGADOS EN GEODÉSICAS LUZ

Francisco José Palomo Ruiz
Departamento de Matemática Aplicada



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Geometry Meeting 2009, Ferrol, October 29th and 30th

- M. Gutiérrez, F.J. Palomo and A. Romero, Lorentzian manifolds with no null conjugate points, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **137** (2004), 363–375.
- F.J. Palomo, The fibre bundle of degenerate tangent planes of a Lorentzian manifold and the smoothness of the null sectional curvature, *Differential Geom. Appl.* **25** (2007), 667–673.
- F.J. Palomo and A. Romero, Conformally stationary Lorentzian tori with no conjugate points are flat, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2403–2406.

- 1 PRELIMINARES
- 2 FIBRADOS SOBRE VARIETADES DE LORENTZ
- 3 CURVATURA SECCIONAL LUZ
- 4 PUNTOS CONJUGADOS SOBRE GEODÉSICAS LUZ
- 5 DESIGUALDAD INTEGRAL
- 6 TOROS DE LORENTZ

1. PRELIMINARES

Sea (M, g) una variedad de Lorentz con conexión de Levi-Civita ∇ , tensor de curvatura R y γ una geodésica.

- $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es de **Jacobi** cuando,

$$\frac{\nabla^2 J}{dt^2} + R(J, \gamma')\gamma' = 0.$$

- $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, ($a \neq b$), son **conjugados** a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J no trivial que cumple,

$$J(a) = 0, \quad J(b) = 0.$$

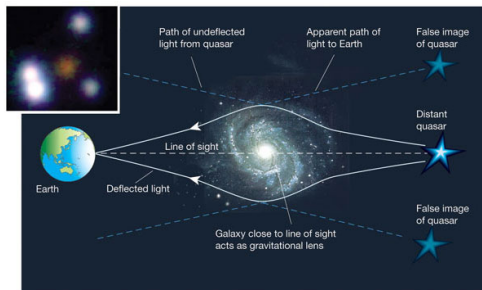
En una variedad de Lorentz podemos distinguir puntos conjugados espaciales, temporales y luz.

- Si $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son conjugados a lo largo de la geodésica luz γ , entonces existe una variación de γ que
 - 1 Su **campo de variación** se anula en a y b .
 - 2 Sus **curvas longitudinales** son geodésicas luz .
- Toda **superficie de Lorentz** carece de puntos conjugados a lo largo de sus geodésicas luz.
- Toda variedad de Lorentz de **curvatura seccional constante** carece de puntos conjugados a lo largo de sus geodésicas luz.

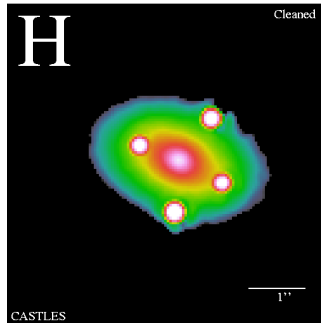
PRELIMINARES

FIBRADOS SOBRE VARIEDADES DE LORENTZ
CURVATURA SECCIONAL LUZ
PUNTOS CONJUGADOS SOBRE GEODÉSICAS LUZ
DESIGUALDAD INTEGRAL
TOROS DE LORENTZ

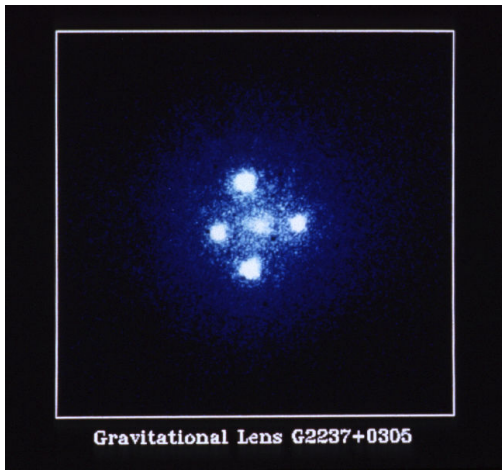
Propiedades básicas de puntos conjugados luz
Interpretación física



Interpretación física.



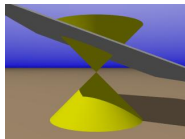
Interpretación física.



2. FIBRADOS SOBRE VARIETADES DE LORENTZ

Congruencia luminosa asociada a un campo temporal K

$$C_K M = \{v \in TM : g(v, v) = 0 \text{ y } g(v, K) = -1\}$$



- Sea $\mathfrak{N} = \{[v] \in \mathfrak{P}(M) : g(v, v) = 0\}$, entonces se tiene el difeomorfismo,

$$\tau : C_K M \longrightarrow \mathfrak{N}, \quad v \longmapsto [v]$$

- $\pi : C_K M \rightarrow M$ es un fibrado con fibra \mathbb{S}^{n-2} .
- $(C_K M, \widehat{g})$ es una variedad de Lorentz donde,

$$\widehat{g}(\xi, \zeta) = g(\pi_*(\xi), \pi_*(\zeta)) + g(c(\xi), c(\zeta)), \quad (\xi, \zeta \in T_v C_K M).$$

$$c(\xi) = \left. \frac{\nabla \lambda}{dt} \right|_0, \quad \lambda'(0) = \xi.$$

- $\pi : C_K M \rightarrow M$ es una submersión semi-riemanniana.
- Las fibras son totalmente geodésicas si y sólo si $\nabla K = 0$.
- La distribución horizontal es integrable si y sólo si $R = 0$.

K es **conforme** si $\mathcal{L}_K g = 2\rho g$.

Si $\rho = 0$ se dice que K es **Killing**.

Una variedad de Lorentz (M, g) es **conformemente estacionaria** (CS) si admite un campo conforme y temporal K .

Se dice **estacionaria** (S) si admite un campo de Killing y temporal K .

K conforme



- $C_K M$ es invariante por el flujo geodésico $\left(\mathcal{Z}_g(v) = \frac{d\gamma'_v}{dt} \Big|_0 \right)$.
- $\mathcal{Z}_g|_{C_K M}$ es un campo sin divergencia.
- Las fibras de $C_K M$ son totalmente umbilicales.

Supongamos M compacta entonces,

$$\int_{C_K M} \widetilde{\text{Ric}} d\mu_{\widehat{g}} = \frac{\omega_{n-2}}{n-1} \int_M [n\widetilde{\text{Ric}}(U) + S] h^n d\mu_g,$$

donde $U = hK$ con $h = 1/\sqrt{-g(K, K)}$.

Si además M es CS para cada $t \in \mathbb{R}$,¹

$$\int_{C_K M} (f(\gamma'_v(t))) d\mu_{\widehat{g}} = \int_{C_K M} f(v) d\mu_{\widehat{g}}.$$

1

A. Romero and M. Sánchez, Completeness of compact Lorentz manifolds admitting a timelike conformal-Killing vector field, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 2831–2833.

Variedad de planos degenerados

Sea $\mathbb{L}^n = (\mathbb{R}^n, g_1)$ definimos,

$$\Lambda_n = \{\Pi \in G_2(\mathbb{R}^n) : g_1|_{\Pi} \text{ es degenerado}\} \approx \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{n-2}),$$

$$\tilde{\Lambda}_n = \{(\Pi, \omega) \in \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n) : g_1|_{\Pi} \text{ es degenerado}\} \approx US^{n-2}.$$

- Son subvariedades regulares y compactas,

$$\dim \Lambda_n = \dim \tilde{\Lambda}_n = 2n - 5.$$

$$\tilde{\Lambda}_4 \approx US^2 \approx SO(3)$$

$$\Lambda(M), \tilde{\Lambda}(M)$$

$$\dim \Lambda(M) = \dim \tilde{\Lambda}(M) = 3n - 5, \quad (n \geq 3).$$

$$p(\Pi) = \Pi \cap C_K M, \quad (\Pi \in \Lambda(M)).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbb{S}^{n-3} & & \mathbb{R}P^{n-3} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \tilde{\Lambda}_n \longrightarrow & \tilde{\Lambda}(M) & \xrightarrow{\theta} & \Lambda(M) & \longleftarrow \Lambda_n \\
 & \searrow p \circ \theta & \mathbb{S}^{n-2} & \swarrow p & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & C_K M & & \\
 & & \pi \downarrow & & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

3. CURVATURA SECCIONAL LUZ

Sea $\Pi \subset T_p M$ un plano degenerado y $v \in \Pi$ un vector luz. La **curvatura seccional luz**² de Π con respecto a v está definida por,

$$\mathcal{K}_v(\Pi) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)},$$

donde $u \neq 0$ es cualquier vector no luz en Π .

$$\text{Ric}(v, v) = \mathcal{K}_v(\langle v \rangle^\perp), \quad n = 3$$

- $\mathcal{K}_v(\Pi) = 0$ para todo plano degenerado si y sólo si M tiene curvatura seccional constante.

2

S. G. Harris, A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds, *Indiana Univ. Math. J.*, **31**(1982), 289–308.

Curvatura seccional luz K -normalizada

$$\mathcal{K}_v(\Pi), \quad (v = \mathfrak{p}(\Pi) = \Pi \cap C_K M).$$

Teorema

La función $k : \Lambda(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Pi \mapsto \mathcal{K}_{\mathfrak{p}(\Pi)}(\Pi)$, es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Lambda}(M) & \xrightarrow{k} & \mathbb{R} \\
 \mathfrak{p} \downarrow & \nearrow & \uparrow \\
 C_K M & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}$$

k factoriza por $C_K M$ si y sólo si el tensor de Weyl, $W = 0^3$.

k factoriza por M si y sólo si $W = 0$ y K^\perp es integrable con variedades integrales totalmente umbilicales de curvatura seccional constante⁴.

3

E. García-Río, D. Kupeli, Null and infinitesimal isotropy in semi-Riemannian geometry, *J. Geom. Phys.*, **13**(1994), 207–222.

4

H. Karcher, Infinitesimale Charakterisierung von Friedmann-Universen, *Arch. Math.*, **38**(1982), 58–64.

4. PUNTOS CONJUGADOS SOBRE GEODÉSICAS LUZ

Fijemos una geodésica luz γ_v . Sean $V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\gamma_v)$,

$$V \sim W$$



$$[V(t)] = [W(t)] \in \langle \gamma'_v(t) \rangle^\perp / \langle \gamma'_v(t) \rangle \Leftrightarrow V(t) - W(t) = \lambda(t) \gamma'_v(t)$$

Para las clases $[V], [W]$ están bien definidos:

$$\bar{g}([V], [W]) = g(V, W), \quad \frac{\bar{\nabla}[V]}{dt} = \left[\frac{\nabla V}{dt} \right] \quad y$$

$$\bar{R}([V], \gamma'_v) \gamma'_v = [R(V, \gamma'_v) \gamma'_v].$$

$[V] \in \mathfrak{X}^\perp(\gamma_v)/\sim$ se dice una **clase de Jacobi** si,

$$\frac{\bar{\nabla}^2[V]}{dt^2} + \bar{R}([V], \gamma'_v)\gamma'_v = [0].$$

$[V], [W] \in \mathfrak{X}^\perp(\gamma_v|_{[0,a]})/\sim$, $[V(0)] = [W(0)] = [0]$, $[V(a)] = [W(a)] = [0]$

$$\bar{H}_{\gamma_v|_{[0,a]}}^\perp([V], [W]) = \int_0^a [\bar{g}([V], [W]) - \bar{g}(\bar{R}([V], \gamma'_v)\gamma'_v, [W])] dt.$$

$\gamma_v(0)$ y $\gamma_v(a)$ son conjugados \Leftrightarrow existe una clase de Jacobi $[V]$ con,

$$[V] \neq [0], \quad [V(0)] = [0], \quad [V(a)] = [0].$$

Si $[V(0)] = [0], [V(a)] = [0]$.

$$[V] \in \mathcal{R}(\overline{H}_{\gamma_v|_{[0,a]}}^\perp) \Leftrightarrow [V] \text{ es de Jacobi en } [0, a].$$

No existen puntos conjugados $[0, a] \Leftrightarrow \overline{H}_{\gamma_v|_{[0,a]}}^\perp$ es semi-definido positivo.

Supongamos que γ_v es completa y que carece de puntos conjugados.

$$x \in \langle v \rangle^\perp, \quad T \in \mathbb{R} - 0$$

$$I_x^T(0) = x, \quad I_x^T(T) = 0, \quad I_x^T \text{ es de Jacobi.}$$

Teorema

Sea $[0] \neq [x] \in \langle v \rangle^\perp / \langle v \rangle$. Existe una clase de Jacobi $[I_x]$ con,

$$[I_x](t) = \lim_{T \rightarrow \infty} [I_x^T](t) \quad \text{y} \quad \overline{\nabla}[I_x] \Big|_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\nabla}[I_x^T] \Big|_t.$$

Además, $[I_x](t) \neq [0]$ para cada $t \geq 0$.

5. DESIGUALDAD INTEGRAL

Teorema

Sea (M, g) una variedad de Lorentz compacta con $\dim M = n \geq 3$ que admita un campo conforme temporal K . Si no tiene puntos conjugados a lo largo de sus geodésicas luz, entonces

$$\int_{C_K M} \widetilde{\text{Ric}} d\mu_{\widetilde{g}} \leq 0.$$

$$\left(\int_M \left[n \widetilde{\text{Ric}}(U) + S \right] h^n d\mu_g \leq 0. \right)$$

Además, la igualdad se alcanza si y sólo si (M, g) tiene curvatura seccional constante c (necesariamente $c \leq 0$).

Idea de la prueba.

$$\bullet \text{Vol}(C_K M) \geq \frac{a^2}{\pi^2(n-2)} \int_{C_K M} \widetilde{\text{Ric}} d\mu_{\widehat{g}}^5 \Rightarrow \int_{C_K M} \widetilde{\text{Ric}} d\mu_{\widehat{g}} \leq 0.$$

$$\int_{C_K M} \widetilde{\text{Ric}} d\mu_{\widehat{g}} = 0$$

Sea $\{e_3, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\langle v \rangle^\perp \cap K^\perp \Rightarrow E_3, \dots, E_n.$

$$\widetilde{\text{Ric}}(\gamma'_v) = \sum_{j=3}^n g(R(E_j, \gamma'_v), \gamma'_v, E_j)$$

Para $T \geq 1$ y $j = 3, \dots, n \Rightarrow X_j^T(t) = \cos(\pi t/2T)E_j(t)$

⁵M. Gutiérrez, F.J. Palomo and A. Romero, A Berger-Green type inequality for compact Lorentzian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 4505–4523

Idea de la prueba.

$$[X_j^T] = \sum_{j=3}^n \lambda_{ij}^T [I_{e_j}^T] \Rightarrow [E_j] = \sum_{j=3}^n \lambda_{ij} [I_{e_j}]$$

$$f_T(v) = \sum_{j=3}^n \bar{H}_{\gamma_v|_{[-T, T]}}^\perp([X_j^T], [X_j^T]) \geq 0$$



$$\int_{C_K M} f_T d\mu_{\hat{g}} = \frac{(n-2)\pi^2}{4T} \text{Vol}(C_K M)$$

Idea de la prueba.

$\liminf f_T(v) = 0$ (c.p.d.) $\Rightarrow [E_j]$ es de Jacobi $\Rightarrow R(E_j, \gamma'_v)\gamma'_v, E_j) = \varphi_j \gamma'_v$.

$$\Pi_j = \langle v, e_j \rangle \quad \Downarrow$$

$$\mathcal{K}_p(\Pi_j)(\Pi_j) = g(\varphi_j(0)v, e_j) = 0$$



(M, g) tiene curvatura seccional constante.

6. TOROS DE LORENTZ

El toro es la única superficie compacta y orientable que admite métricas de Lorentz.

Toros de Riemann

- 1 Geodésicamente completos.
- 2 Conformemente llanos.
- 3 Grupo de isometrías compacto.



Toros de Lorentz

- 1 Geodésicamente incompletos.
- 2 No conformemente llanos.
- 3 Grupo de isometrías no compacto

Toros de Lorentz conformemente estacionarios (CS)

$$\boxed{(\mathbb{T}^2, g) \text{ es CS}} \Leftrightarrow^6 \boxed{(\mathbb{T}^2, g) \text{ es conformemente llano}}$$

\Downarrow ⁷

(\mathbb{T}^2, g) es geodésicamente completo.

6

A. Romero and M. Sánchez, New properties and examples of incomplete Lorentzian tori, *J. Math. Phys.* **69** (1994), 1992–1997.

7

A. Romero and M. Sánchez, Completeness of compact Lorentz manifolds admitting a timelike conformal-Killing vector field, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 2831–2833.

Puntos conjugados en superficies de Lorentz

Sea G su curvatura de Gauss y γ una geodésica con $g(\gamma', \gamma') = \varepsilon = \pm 1$.

$\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ ($a \neq 0$) son conjugados si y sólo si existe una solución Φ no trivial de,

$$\Phi''(s) + \varepsilon G(\gamma(s))\Phi(s) = 0,$$

con $\Phi(0) = \Phi(a) = 0$.

- Las geodésicas luz no tienen de puntos conjugados.

Teorema

Si un toro de Lorentz conformemente estacionario (\mathbb{T}^2, g) no tiene puntos conjugados a lo largo de sus geodésicas temporales, entonces para cada entero $m \geq 3$,

$$\int_{\mathbb{T}^2} Gh^m dA \geq 0.$$

La igualdad se alcanza para algún m si y sólo si (\mathbb{T}^2, g) es llano.

Idea de la prueba.

- Si N^k es una variedad de Riemann compacta y llana de dimensión $k(\geq 1)$, la variedad de Lorentz $\mathbb{T}^2 \times N^k$ no tiene puntos conjugados sobre sus geodésicas luz.

Proposición

Para cualquier toro de Lorentz CS (\mathbb{T}^2, g) con conexión de Levi-Civita ∇ ,

$$\int_{\mathbb{T}^2} Gh^m dA = -m \int_{\mathbb{T}^2} h^{m+4} g(\nabla_K K, \nabla_K K) dA, \quad (m \geq 0).$$

Idea de la prueba.

- h^2g es llana, por tanto $G = \Delta \log h$, donde Δ es el operador de D'Alembert de g .

Sea (\mathbb{T}^2, g) un toro de Lorentz temporalmente orientable y orientado. K un campo temporal arbitrario y E el único campo de vectores espacial con,

$$g(E, K) = 0, \quad g(E, E) = -g(K, K)$$

y $\{K_p, E_p\}$ es una base orientada en cada $p \in \mathbb{T}^2$.

Lema

K es conforme si y sólo si E es conforme.

Si E es Killing no necesariamente lo es K .

Contraejemplo

Sea $-dt^2 + f(t)^2 dx^2$ con f no constante, $K = f(t)\partial_t$ es conforme y $E = \partial_x$ es Killing.

Teorema

Si un toro de Lorentz conformemente estacionario no tiene puntos conjugados sobre sus geodésicas, entonces es llano.

Idea de la prueba.

- 1 Las métricas de Lorentz g y $-g$ no tienen puntos conjugados sobre sus geodésicas temporales.
- 2 K es conforme temporal para g y E lo es para $-g$.
- 3 Si la curvatura de Gauss de g es G la de $-g$ es $-G$.
- 4 $\int_{\mathbb{T}^2} Gh^m dA = 0$.

Un toro de Lorentz CS sin puntos conjugados temporales NO llano

$g = -dt^2 + f(t)^2 dx^2$, $f > 0$ periódica y no constante.

El toro correspondiente no tiene puntos conjugados temporales ⁸ pero si espaciales.

$$G(t, x) = \frac{f''(t)}{f(t)}.$$

Si $f'(t_0) = 0$ y $f''(t_0) > 0 \Rightarrow \gamma(s) = (t_0, s)$ es geodésica espacial.

$$\Phi''(s) + \frac{f''(t_0)}{f(t_0)} \Phi(s) = 0.$$

Si $c = \frac{f''(t_0)}{f(t_0)} > 0$, $\Phi(s) = \text{sen}(\sqrt{c} s)$, con $\Phi(0) = \Phi(\pi/\sqrt{c}) = 0$.

⁸J.L. Flores and M. Sánchez, Geodesic connectedness and conjugate points in GRW spacetimes, *J. Geom. Phys.* **30** (2000), 285–314.

TOROS ESTACIONARIOS ⁹

Existen toros de Lorentz S sin puntos conjugados espaciales NO llanos

Teorema

Si un toro de Lorentz estacionario (\mathbb{T}^2, g) no tiene puntos conjugados en sus geodésicas temporales entonces es llano.

Idea de la prueba.

① Si K es Killing y temporal, $\nabla_K K$ es espacial.

②

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}^2} Gh^m dA = -m \int_{\mathbb{T}^2} h^{m+4} g(\nabla_K K, \nabla_K K) dA \leq 0,$$

⁹M. Sánchez, Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349** (1997), 1063–1080.

¿Existe algún toro de Lorentz sin puntos conjugados y no llano?...

¡Muchas gracias!