

# Acciones hiperpolares en espacios simétricos no compactos

Geometry Meeting 2009, Ferrol



José Carlos Díaz Ramos

Trabajo conjunto con  
Jürgen Berndt y Hiroshi Tamaru

Acciones polares e hiperpolares

- Ejemplos de foliaciones hiperpolares homogéneas

Espacios Euclídeos

Espacios hiperbólicos

Espacios simétricos de tipo no compacto

- Clasificación

# Acciones polares e hiperpolares

$M$  variedad de Riemann

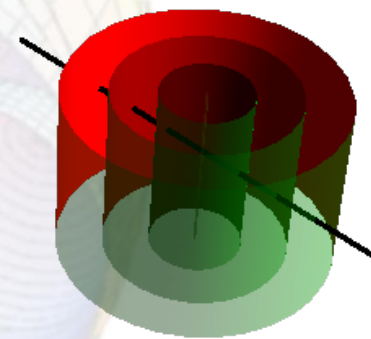
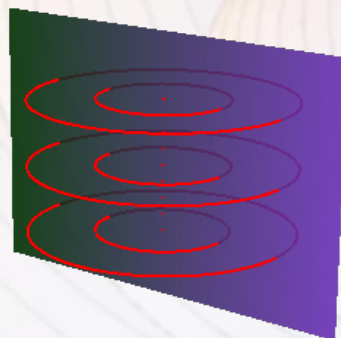
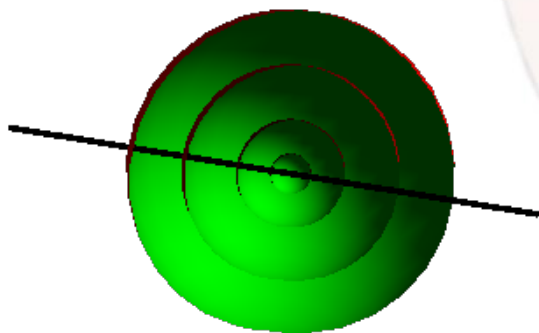
$I(M)$  grupo de isometrías de  $M$

$G \subset I(M)$  subgrupo cerrado del grupo de isometrías

$G$  actúa **polaramente** si existe una **sección**

subvariedad que interseca *todas* las órbitas de  $G$  *ortogonalmente*

$G$  actúa **hiperpolaramente** si existe una **sección llana**



Una sección es un conjunto de “formas canónicas”

**Ejemplo:**  $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$      $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \{\text{matrices simétricas}\}$

$SO(n)$  actúa sobre las matrices simétricas

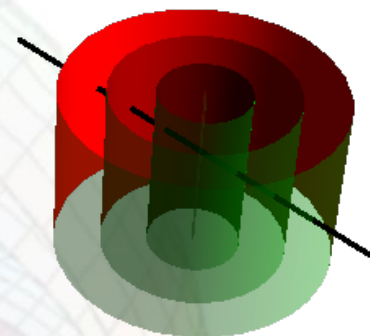
$\{\text{matrices diagonales}\}$  es una sección

# Acciones polares e hiperpolares

$\mathbb{R}^n$

(Dadok) Las órbitas de una acción polar por un grupo compacto coinciden con las órbitas de la representación de isotropía de un espacio simétrico

Acciones de grupos no compactos:  
productos de translaciones  
y grupos compactos



Espacios simétricos de tipo compacto

(Kollross) clasificación de acciones hiperpolares

(Podestà, Thorbergson)  
clasificación de acciones polares en  
espacios simétricos de tipo compacto  
y rango uno

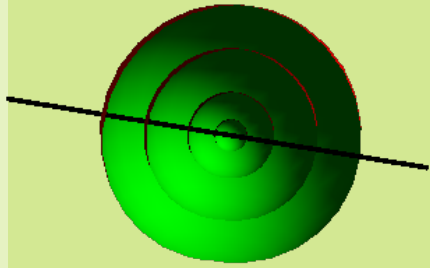
Hay acciones polares  
no hiperpolares

(Kollross) en rango  $\geq 2$  las acciones polares son hiperpolares?

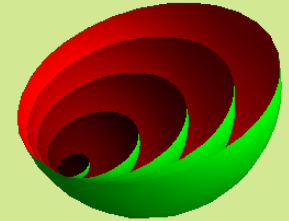
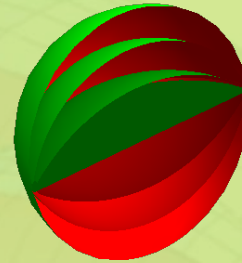
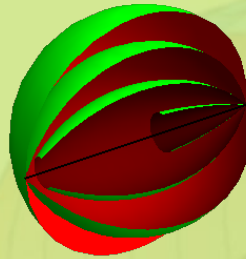
# Acciones polares e hiperpolares

Espacios simétricos de tipo no compacto

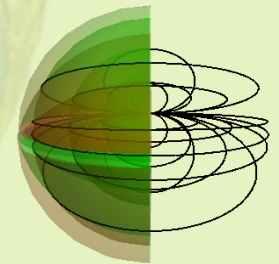
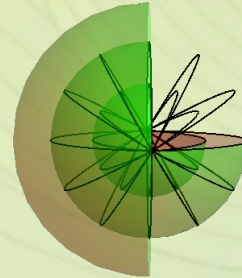
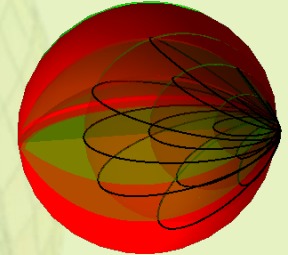
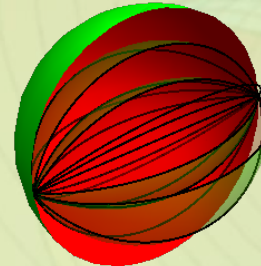
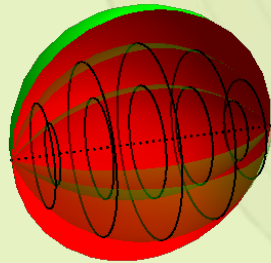
(Berndt, Tamaru) acciones hiperpolares en  $\mathbb{R}H^n$ ,  $\mathbb{C}H^n$  y  $\mathbb{O}H^2$



cohomogeneidad uno en  $\mathbb{R}H^3$



polares no  
hiperpolares  
en  $\mathbb{R}H^3$

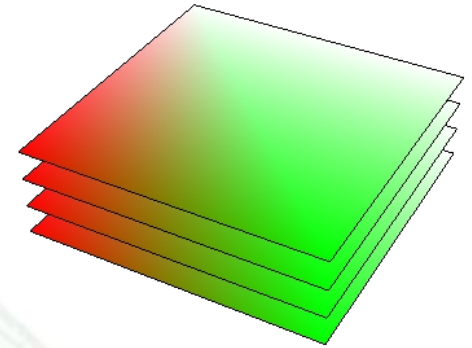


**Foliación hiperpolar homogénea:**

foliación inducida por un grupo actuando hiperpolarmente

# Foliaciones hiperpolares homogéneas en espacios Euclídeos

$\mathbb{R}^n$



$V$  subespacio lineal

$$V \cong \mathbb{R}^k$$

actuando por traslaciones

subespacios afines paralelos de dimensión  $k$

**Teorema** (clasificación de foliaciones hiperpolares homogéneas)

Una foliación hiperpolar homogénea en  $\mathbb{R}^n$  es isométricamente congruente a uno de estos ejemplos

Basta con probar que toda órbita es totalmente geodésica

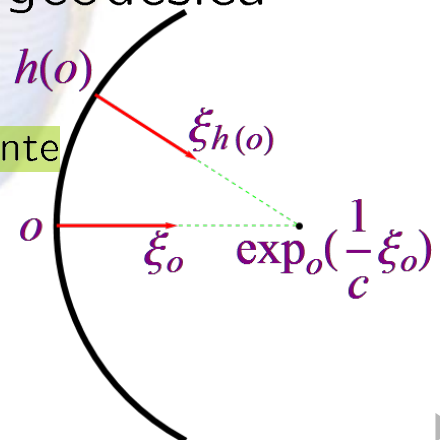
Asumamos que  $H \cdot o$  satisface  $A_\xi v = cv, c \neq 0$

operador de configuración  $\xi \in T^\perp(H \cdot o)$  equivariante

$$F : H \cdot o \rightarrow H \cdot \exp_o\left(\frac{1}{c}\xi_o\right)$$

$$h(o) \mapsto \exp_{h(o)}\left(\frac{1}{c}\xi_{h(o)}\right) = h(o) + \frac{1}{c}\xi_{h(o)}$$

$$F_{*o}v = v - \frac{1}{c}A_\xi v = 0 \text{ contradicción}$$





# Foliaciones hiperpolares homogéneas en espacios hiperbólicos

$\mathbb{F}H^n$

espacio hiperbólico sobre  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$

álgebra de Lie del grupo de isometrías  
(descomposición en espacios de raíces)

$\mathfrak{g} =$

$\mathfrak{so}_{1,n}$

$\mathfrak{su}_{1,n}$

$\mathfrak{sp}_{1,n}$

$\mathfrak{f}_4^{-20}$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$

'llano' maximal

raíz simple positiva

curvatura de  $\mathbb{F}H^n$

clasificación de foliaciones hiperpolares homogéneas cohomogeneidad uno (Berndt, Tamaru)

foliación por horoesferas

álgebra de Lie del grupo que actúa

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

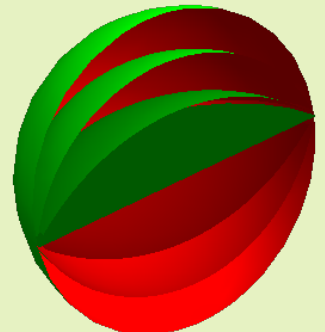
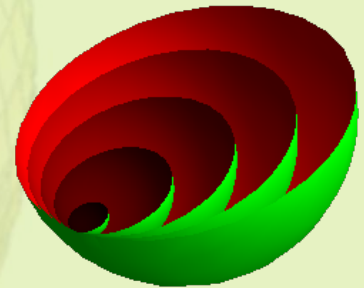
foliación resoluble

álgebra de Lie del grupo que actúa

$$\mathfrak{s}_l = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus l) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

$$= \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus l)$$

$l$  línea en  $\mathfrak{g}_\alpha$



# Productos

$\Phi$  conjunto finito de raíces positivas simples

$$\alpha \in \Phi \longrightarrow \mathbb{F}_\alpha H^{n_\alpha}$$

álgebra de Lie del grupo de isometrías

$$\mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus \mathbb{R}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

$$\left( \prod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{F}_\alpha H^{n_\alpha} \right) \times \mathbb{R}^m$$

foliación resoluble

$$\mathfrak{s}_{\alpha, l_\alpha} = \mathbb{R}H_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus l_\alpha) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

producto de foliaciones  
hiperpolares homogéneas

foliación hiperpolar  
homogénea en el producto

En particular, el grupo de Lie con álgebra de Lie

$$\mathfrak{s}_{\Phi, V, l}^\times = \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{s}_{\alpha, l_\alpha} \right) \oplus V \quad l = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} l_\alpha$$

induce una foliación hiperpolar homogénea en  $\left( \prod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{F}_\alpha H^{n_\alpha} \right) \times \mathbb{R}^m$

## Teorema

Esta definición no depende de la elección de los  $l_\alpha$ 's  
(salvo congruencia)



# Espacios de raíces de un espacio simétrico no compacto

$M = G/K$  espacio simétrico de tipo no compacto

$G$  grupo de Lie semisimple de tipo no compacto  $K = G_0$

descomposición de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

$\theta$  involución de Cartan,  $B$  forma de Killing  
 $\langle X, Y \rangle = -B(X, \theta Y)$  producto interior

espacios de raíces

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda \right)$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  abeliano maximal  
 $\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \lambda(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$   
 $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle$

descomposición de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$   
 $\Sigma^+$  raíces positivas

$$G = K \times A \times N$$

$M \cong AN$  producto semidirecto

$\Lambda$  raíces simples  
 $\text{rank } M = \dim \mathfrak{a} = |\Lambda|$



# Subálgebras parabólicas

$\Phi \subset \Lambda$  subconjunto de raíces simples

$\Sigma_\Phi$  sistema generado por  $\Phi$

$$\mathfrak{l}_\Phi = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_\Phi} \mathfrak{g}_\lambda \right)$$

$$\mathfrak{n}_\Phi = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_\Phi^+} \mathfrak{g}_\lambda$$

$$\Sigma_\Phi^+ = \Sigma^+ \cap \Sigma_\Phi$$

subálgebra parabólica

$$\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$$

$$\mathfrak{a}_\Phi = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \text{Ker } \alpha$$

$$\mathfrak{m}_\Phi = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}^\Phi \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_\Phi} \mathfrak{g}_\lambda \right)$$

$$\mathfrak{a}^\Phi = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}_\Phi = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}H_\alpha$$

descomposición Langlands

$$\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$$

$$Q_\Phi = M_\Phi \times A_\Phi \times N_\Phi$$

$$\mathfrak{g}_\Phi = [\mathfrak{m}_\Phi, \mathfrak{m}_\Phi] = [\mathfrak{l}_\Phi, \mathfrak{l}_\Phi]$$

$G_\Phi$  semisimple

$$G_\Phi \cdot o = M_\Phi \cdot o$$

espacio simétrico no compacto  
totalmente geodésico

$$\text{rank } M_\Phi \cdot o = |\Phi|$$

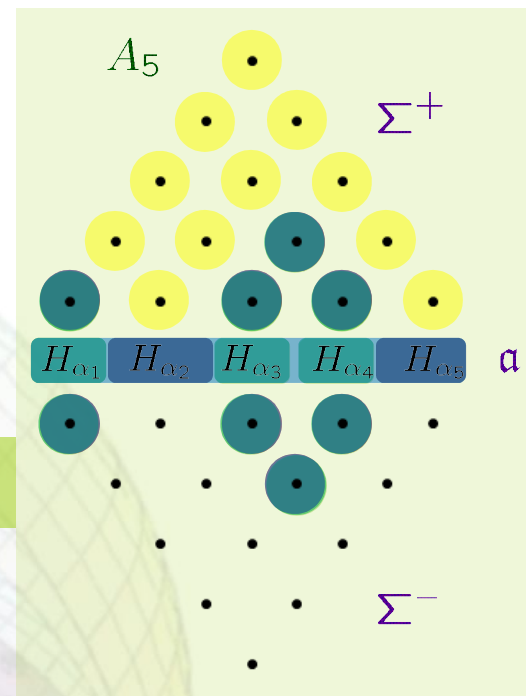
$$A_\Phi \cdot o$$

espacio Euclídeo  
totalmente geodésico

$$\dim A_\Phi \cdot o = \text{rank } M - |\Phi|$$

$$L_\Phi \cdot o = (G_\Phi \cdot o) \times (A_\Phi \cdot o)$$

espacio simétrico  
totalmente geodésico



# Ejemplos de foliaciones hiperpolares homogéneas

$\Phi \subset \Lambda$  sistema ortogonal  
(raíces no conectadas en el diagrama de Dynkin)

$$\mathfrak{g}_\Phi = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\{\alpha\}} \quad G_\Phi = \prod_{\alpha \in \Phi} G_{\{\alpha\}}$$

producto de semisimples de rango uno

$$G_\Phi \cdot o \cong \prod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{F}_\alpha H^{n_\alpha}$$

$$\mathfrak{l}_\Phi = \mathfrak{k}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\{\alpha\}} \right) \oplus \mathfrak{a}_\Phi$$

$$L_\Phi \cdot o \cong \left( \prod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{F}_\alpha H^{n_\alpha} \right) \times \mathbb{R}^{\text{rank } M - |\Phi|}$$

El grupo de Lie  $S_{\Phi, V, l}$  con álgebra de Lie

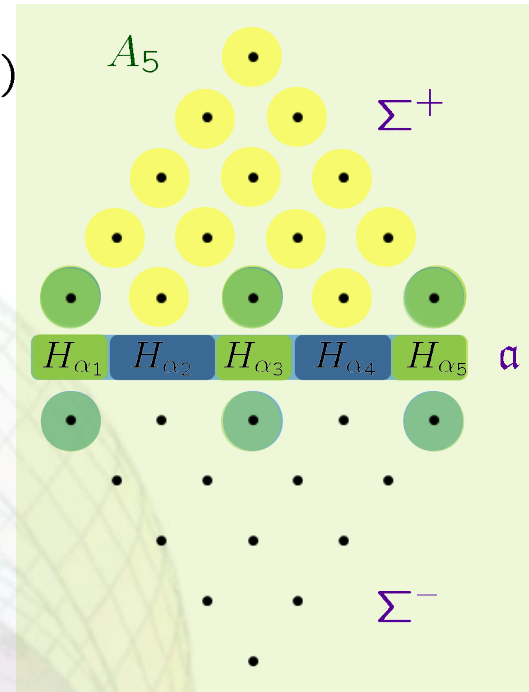
$$\mathfrak{s}_{\Phi, V, l} = \mathfrak{s}_{\Phi, V, l}^\times \oplus \mathfrak{n}_\Phi \quad \mathfrak{l} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{l}_\alpha$$

induce una foliación hiperpolar homogénea en  $M$

$$= \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R} H_{\alpha, l_\alpha} \right) \oplus \left( \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{n}_\Phi \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \right) \oplus V \oplus \mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{a}^\Phi \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{l}) \oplus V$$

## Teorema

Esta definición no depende de la elección de los  $l_\alpha$ 's (salvo congruencia)



# Clasificación de foliaciones hiperpolares homogéneas

**Teorema** (clasificación de foliaciones hiperpolares homogéneas)

Sea  $M$  un espacio simétrico Riemanniano conexo de tipo no compacto. Entonces, cualquiera foliación hiperpolar homogénea en  $M$  es isométricamente congruente a la foliación inducida por  $S_{\Phi, V}$  para algún conjunto ortogonal de raíces simples  $\Phi$  y algún subespacio lineal  $V$  de  $A_{\Phi} \cdot o \cong \mathbb{R}^{\text{rank } M - |\Phi|}$ .

Demostración

Estas foliaciones son el producto de foliaciones resolubles en espacios hiperbólicos totalmente geodésicos determinados por las raíces de  $\Phi$ , una foliación por espacios afines paralelos en el espacio Euclídeo  $A_{\Phi} \cdot o$ , y la parte nilpotente de la descomposición de Langlands de la subálgebra parabólica determinada por  $\Phi$ .

# **Acciones hiperpolares en espacios simétricos no compactos**

J. Berndt, J.C. Díaz-Ramos, H. Tamaru; Hyperpolar homogeneous foliations on noncompact symmetric spaces, arXiv:math.DG/08073517

Acciones polares e hiperpolares

- Ejemplos de foliaciones hiperpolares homogéneas

Espacios Euclídeos

Espacios hiperbólicos

Espacios simétricos de tipo no compacto

- Clasificación



# Proof

## Step 1

$M = G/K$  symmetric space of noncompact type.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

$H \subset I(M)$  inducing a homogeneous foliation

$H$  acts hyperpolarly



$$\mathfrak{h}_p^\perp = \{\xi \in \mathfrak{p} : \langle \xi, X \rangle = 0, \forall X \in \mathfrak{h}\}$$

abelian

## Step 2

$M$  Hadamard manifold

$H \subset I(M)$  inducing a homogeneous foliation

$\exists S \subset H$  solvable such that  $S \cdot p = H \cdot p, \forall p \in M$

## Step 3

$M = G/K$  symmetric space of noncompact type.

$H \subset I(M)$  inducing a hyperpolar homogeneous foliation

$\exists$  maximally noncompact Borel subalgebra  $\mathfrak{b}$  such that  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{b}$

## Step 4

$\mathfrak{s} \subset$  maximally noncompact  
Borel subalgebra

$\mathfrak{s}_p^\perp$  abelian

$\tilde{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s} + (\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{n}^1)$

$$\tilde{\mathfrak{s}}_p^\perp = (\mathfrak{a}_\Phi \ominus V) \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}(c_\alpha H_\alpha + (1 - \theta)E_\alpha) \right)$$

with  $\Phi \subset \Lambda$  orthogonal,

$c : \alpha \in \Phi \rightarrow c_\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$0 \neq E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, V \subset \mathfrak{a}_\Phi$

## Step 5

$\mathfrak{s} \subset$  maximally noncompact  
Borel subalgebra

$\mathfrak{s}_p^\perp$  abelian

$S$  induces a foliation

$\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}$  (up to a compact factor)

the action of  $S$  is orbit  
equivalent to the action of  
 $S_{\Phi, V}$ , where

$$\mathfrak{s}_{\Phi, V} = \mathfrak{a}^\Phi \oplus \left( \mathfrak{n} \ominus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}E_\alpha \right) \right) \oplus V$$

**Theorem** (classification of hyperpolar homogeneous foliations)

Let  $M$  be a connected Riemannian symmetric space of noncompact type. Then, any hyperpolar homogeneous foliation on  $M$  is isometrically congruent to the foliation induced by  $S_{\Phi, V}$  for some orthogonal set of simple roots  $\Phi$  and some linear subspace  $V$  of  $A_\Phi \cdot o \cong \mathbb{R}^{\text{rank } M - |\Phi|}$ .

Acciones polares e hiperpolares

- Ejemplos de foliaciones hiperpolares homogéneas

Espacios Euclídeos

Espacios hiperbólicos

Espacios simétricos de tipo no compacto

- Clasificación