# Acciones singulares de $\mathbb{S}^3$

**José Ignacio Royo Prieto**

**Departamento de Matemática Aplicada,**

**Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea**

Geometry meeting 2009

Escola Universitaria Politécnica, Ferrol, 30 de outubro de 2009.

En colaboración con:

**Martintxo Saralegi Aranguren** (Université d'Artois, Francia)

# Esquema

Construimos una Sucesión de Gysin para acciones (singulares) de $\mathbb{S}^3$.

1. Sucesiones de Gysin;
2. Nuestro resultado;
3. Ejemplos de acciones singulares de $\mathbb{S}^3$.

## Objetos de estudio

- $M$ variedad diferenciable ($C^\infty$), cerrada (compacta y sin borde);
- Acción diferenciable cualquiera

$$\mathbb{S}^3 \times M \longrightarrow M$$

- Cohomogías singulares

$$H^*(M), H^*(M/\mathbb{S}^3)$$

.

- Sucesiones exactas y espectrales que las relacionen.

## Sucesión de Gysin (clásica)

Dado un fibrado

$$\pi \colon M \longrightarrow B$$

de fibra esférica $\mathbb{S}^k$, la sucesión de Gysin asociada es la sucesión exacta:

$$\cdots \to H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\fint} H^{i-k}(B) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(B) \to \ldots,$$

donde $\fint$ es la integración a lo largo de las fibras y $\varepsilon$ la multiplicación por la clase de Euler del fibrado.

## Más sucesiones de Gysin

- Casos particulares: acciones libres de $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$;
- Generalizaciones:
  - flujos (acciones libres de $\mathbb{R}$) isométricos (o riemannianos);
  - acciones singulares de $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$;
  - flujos riemannianos singulares;
  - acciones tóricas semilibres;
  - ...

## Casos particulares: acción **libre** de $\mathbb{S}^1$

En el caso de una acción libre y diferenciable

$$\mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M,$$

el espacio de órbitas $M/\mathbb{S}^1$ es una variedad diferenciable, y tenemos un fibrado principal

$$\pi \colon M \longrightarrow M/\mathbb{S}^1$$

es decir, la situación anterior para $k = 1$. La sucesión de Gysin correspondiente es:

$$\cdots \to H^i(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\oint} H^{i-1}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \to \dots$$

## Casos particulares: acción **libre** de $\mathbb{S}^3$

En el caso de una acción libre y diferenciable

$$\mathbb{S}^3 \times M \longrightarrow M,$$

el espacio de órbitas $M/\mathbb{S}^3$ es una variedad diferenciable, y tenemos un fibrado principal

$$\pi \colon M \longrightarrow M/\mathbb{S}^3$$

es decir, la situación anterior para $k = 3$. La sucesión de Gysin correspondiente es:

$$\cdots \to H^i(M/\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\oint} H^{i-3}(M/\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^3) \to \dots$$

# Generalizaciones sucesión Gysin

**Acciones isométricas de $\mathbb{R}$**

- Inducen una foliación $\mathscr{F}$ (flujo)
- $M/\mathbb{R}$ no es una variedad, pero tenemos un buen sustituto: la cohomología básica $H^*(M/\mathscr{F})$
- Se puede construir la *sucesión de Gysin:*[Kamber-Tondeur, 1983]

$$\cdots \to H^i(M/\mathscr{F}) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\fint} H^{i-1}(M/\mathscr{F}) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathscr{F}) \to \ldots$$

También en el caso de que el flujo no sea isométrico, sino sólamente *riemanniano* [JIRP, 2000]:

$$\cdots \to H^i(M/\mathscr{F}) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\fint} H^{i-1}_\kappa(M/\mathscr{F}) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathscr{F}) \to \ldots$$

# Casos particulares: acción **no libre** de $\mathbb{S}^1$

[**Hector-Saralegi, 1993**]

- Grupos de isotropía: finitos y $\mathbb{S}^1$.
- $F$ conjunto de puntos fijos.
- $M/\mathbb{S}^1$ **no** es una variedad, sino una variedad singular.
- Cohomología de intersección: $H^*_{\overline{p}}(M/\mathbb{S}^1) = H^*(\Omega^*_{\overline{p}}(M/\mathbb{S}^1))$

$$\cdots \to H^i_{\overline{p}}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\pi^*} H^i_{\overline{p}}(M) \xrightarrow{\oint} H^{i-1}_{\overline{p-1}}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}_{\overline{p}}(M/\mathbb{S}^1) \to \ldots$$

- Si la acción es semi-libre (sólo puntos libres y fijos), y tomamos $\overline{p} = \overline{0}$ (cohomología ordinaria):

$$\cdots \to H^i(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\oint} H^{i-1}(M/\mathbb{S}^1, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \to \ldots$$

## Casos particulares: acción **semi-libre** de $\mathbb{S}^3$

[**Saralegi, 1993**]

- Grupos de isotropía triviales: $\{1\}$ y $\mathbb{S}^3$.
- $F$ conjunto de puntos fijos.
- $M/\mathbb{S}^3$ **no** es una variedad, sino una variedad singular.
- $$\cdots \to H^{i}_{\overline{p+4}}(M/\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\fint} H^{i-3}_{\overline{p}}(M/\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}_{\overline{p+4}}(M/\mathbb{S}^3) \to \ldots$$

  En particular,

  $$\cdots \to H^i(M/\mathbb{S}^3) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\fint} H^{i-3}(M/\mathbb{S}^3, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^3) \to \ldots$$

## Esquema

Construimos una Sucesión de Gysin para acciones (singulares) de $\mathbb{S}^3$.

1. Sucesiones de Gysin;
2. Nuestro resultado;
3. Ejemplos de acciones singulares de $\mathbb{S}^3$.

# Sucesión de Gysin para una acción cualquiera de $\mathbb{S}^3$

[**JIRP-Saralegi 2009**]

Sea

$$\mathbb{S}^3 \times M \longrightarrow M$$

una acción diferenciable. Entonces, tenemos la siguiente *sucesión de Gysin*:

$$\longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^{i-3}(M/\mathbb{S}^3, \Sigma/\mathbb{S}^3) \oplus \left(H^{i-2}\left(M^{\mathbb{S}^1}\right)\right)^{-\mathbb{Z}_2} \longrightarrow H^{i+1}(M/\mathbb{S}^3)$$
$$\longrightarrow H^{i+1}(M) \longrightarrow,$$

- $\Sigma \equiv$ puntos de isotropía no finita
- la acción de $\mathbb{Z}^2$ está inducida por $j \in \mathbb{S}^3$
- $(-)^{-\mathbb{Z}_2}$ denota el subespacio de elementos antisimétricos.

## Estratificación de $M$ inducida por la acción de $\mathbb{S}^3$

- Posibles subgrupos de isotropía (salvo conjugación) [G.E. Bredon, 1972]:
  - finitos;
  - $\mathbb{S}^1$
  - $N(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{S}^1 \cup j \cdot \mathbb{S}^1$;
  - $\mathbb{S}^3$
- $F = M^{\mathbb{S}^3}$; $\Sigma = \{x \in M : \ dim \mathbb{S}^3_x \leq 1\}$
- Estratificación:
$$F \subseteq \Sigma \subseteq M$$
- $\Sigma$ no es una variedad, pero $F$, $M \backslash F$ y $\Sigma \backslash F$ sí que lo son.

## Herramienta singular: formas de Verona.

- $M/\mathbb{S}^3$ es una variedad singular.
- Podemos usar *cohomología de Verona*: $\omega \in \Omega^*(M\backslash\Sigma)$ es de Verona si existen
  - $\omega_1 \in \Omega^*(\Sigma\backslash F)$
  - $\omega_0 \in \Omega^*(F)$

  compatibles en un cierto sentido (explosión, entorno tubular…)
- Formas de Verona: $\Omega^*_v(M/\mathbb{S}^3)$
- $H^*_v(M/\mathbb{S}^3) \cong H^*(M/\mathbb{S}^3)$ [**Verona, 1971**]
- Análogamente, $H^*_v(M/\mathbb{S}^3, \Sigma/\mathbb{S}^3) \cong H^*(M/\mathbb{S}^3, \Sigma/\mathbb{S}^3)$

## Estrategia de la demostración

- Usamos formas $\mathbb{S}^3$-invariantes: $\Omega^*(M)^{\mathbb{S}^3}$
- $H^*(\Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^3}) \cong H^*(M)$
- **Problema de Gysin**

$$0 \longrightarrow \Omega_v^*(M/\mathbb{S}^3) \overset{I}{\hookrightarrow} \Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^3} \longrightarrow \operatorname{Coker} I \longrightarrow 0$$

-

$$\longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^{i-3}(\operatorname{Coker} I) \longrightarrow H^{i+1}(M/\mathbb{S}^3) \longrightarrow \dots$$

- Calcular $H^*(\operatorname{Coker} I) = H^*\left(\frac{\Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^3}}{\Omega_v^*(M/\mathbb{S}^3)}\right)$

## Calculando $H^*(\operatorname{Coker} I)$

Tomamos la integración a lo largo de las fibras:

$$\fint : \operatorname{Coker} I \longrightarrow \Omega_v^{*-3}(M/\mathbb{S}^3, \Sigma/\mathbb{S}^3)$$

y obtenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \overset{*}{\operatorname{Ker}} \fint \hookrightarrow \operatorname{Coker} I \xrightarrow{\fint} \Omega_v^{*-3}(M/\mathbb{S}^3, \Sigma/\mathbb{S}^3) \longrightarrow 0$$

Descomponiendo las formas invariantes, llegamos a que esta sucesión escinde, con lo que tan sólo queda calcular la cohomología de

$$A^*(M) = \overset{*}{\operatorname{Ker}} \fint.$$

# Excisión

Usando técnicas de excisión, tenemos

$$H^*(A^*(M)) = H^*(A^*(\Sigma)) = H^*(A^*(\Sigma, F))$$

Más aún, podemos reducirnos a calcular la cohomología

$$H^*(\Sigma', U)$$

siendo $\Sigma' \subseteq \Sigma$ el conjunto de puntos con isotropía conjugada a $\mathbb{S}^1$, y $U$ un entorno adecuado de $F$.

## ¿De dónde sale $\left(H^{*-2}(M^{\mathbb{S}^1})\right)^{-\mathbb{Z}_2}$?

Tenemos los homeomorfismos:

$$\Sigma' = \mathbb{S}^3 \times_{N(\mathbb{S}^1)} \Sigma'^{\mathbb{S}^1} = (\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1) \times_{N(\mathbb{S}^1)/\mathbb{S}^1} \Sigma'^{\mathbb{S}^1} = \mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \Sigma'^{\mathbb{S}^1}$$

De modo que, por Künneth:

$$\begin{aligned}
H^*(\Sigma', U) &= H^*(\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \Sigma'^{\mathbb{S}^1}, \mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} U^{\mathbb{S}^1}) \\
&= H^*(\mathbb{S}^2 \times \Sigma'^{\mathbb{S}^1}, \mathbb{S}^2 \times U^{\mathbb{S}^1})^{\mathbb{Z}_2} \\
&= \left(H^*(\mathbb{S}^2) \otimes H^*(\Sigma'^{\mathbb{S}^1}, U^{\mathbb{S}^1})\right)^{\mathbb{Z}_2} \\
&= \left(H^0(\mathbb{S}^2) \otimes H^*(\Sigma'^{\mathbb{S}^1}, U^{\mathbb{S}^1})\right)^{\mathbb{Z}_2} \oplus \left(H^2(\mathbb{S}^2) \otimes H^{*-2}(\Sigma'^{\mathbb{S}^1}, U^{\mathbb{S}^1})\right)^{\mathbb{Z}_2} \\
&= H^*(\Sigma'/\mathbb{S}^3, U/\mathbb{S}^3) \oplus \left(H^{*-2}(\Sigma'^{\mathbb{S}^1}, U^{\mathbb{S}^1})\right)^{-\mathbb{Z}_2}
\end{aligned}$$

## Esquema

Construimos una Sucesión de Gysin para acciones (singulares) de $\mathbb{S}^3$.

1. Sucesiones de Gysin;
2. Nuestro resultado
3. Ejemplos de acciones singulares de $\mathbb{S}^3$.

## Multiplicación-acción $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^3$

Consideramos la acción de Hopf $\varphi_{\mathcal{H}}\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ a derecha, es decir, $\varphi_{\mathcal{H}}(z,(z_1,z_2)) = (z_1 \cdot z, z_2 \cdot z)$. Consideramos también el espacio cociente $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_S: & \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & (g,[h]) & \longmapsto & [g \cdot h]. \end{array}$$

Es una acción transitiva. Todos los subgrupos de isotropía son conjugados a $\mathbb{S}^1$.

$$\mu(z,w) = (z_1,z_2)\cdot(\omega_1,\omega_2) = (z_1\cdot\omega_1 - \omega_2\cdot\overline{z_2}, \overline{z_1}\cdot\omega_2 + z_2\cdot\omega_1).$$

es la multiplicación de $\mathbb{S}^3$.

# Acción sobre $\mathbb{CP}^2$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{S}^3 \times \mathbb{CP}^2 & \longrightarrow & \mathbb{CP}^2 \\ & g.[z_1, z_2, z_3] & \longmapsto & [\mu(g, (z_1, z_2)), z_3] \end{array}$$

Tres tipos de estratos:

- 1 punto fijo: $(F = \{[0, 0, *]\})$.
- Isotropía $\mathbb{S}^1$: $\Sigma \backslash F = \Sigma' = \{[z_1, z_2, 0]\} \cong \mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$
- Puntos “libres”$(m = [z_1, z_2, z_3]$ con $(|z_1| + |z_2|) \cdot z_3 \neq 0)$. Se tiene

$$M \backslash \Sigma \cong \mathbb{S}^3 \times (0, 1)$$

- $\mathbb{CP}^2$ se puede ver como un Mapping Cylinder

$$\mathbb{CP}^2 \cong \left(\mathbb{S}^3 \times [0, 1]\right) / \sim$$

## $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$

Pegando 2 copias de la estructura anterior, tenemos otra 4-variedad. Los estratos esta vez son:

- Puntos móviles: $M \backslash \Sigma \cong \mathbb{S}^3 \times (0,1)$
- $\Sigma = \Sigma' = \mathbb{S}^2 \bigsqcup \mathbb{S}^2$

Es otro Mapping cylinder, con otras identificaciones en los extremos.

## Sucesión de Gysin en estos casos: $M^{\mathbb{S}^1}$

En el caso de la acción de $\mathbb{S}^3$ sobre $\mathbb{S}^2$, tenemos $(\mathbb{S}^2)^{\mathbb{S}^1} = \{N, S\}$.

$\mathbb{Z}_2$ actúa:

$$\mathbb{Z}_2 \times \{N, S\} \longrightarrow \{N, S\}$$

intercambiando los polos.

En el caso de $M = \mathbb{CP}^2$, tenemos $\mathbb{CP}^2/\mathbb{S}^3 \cong [0, 1]$ y $(\mathbb{CP}^2)^{\mathbb{S}^1} = \{N, S, *\}$.

La sucesión de Gysin nos dice:

$$0 \to H^0([0, 1]) \xrightarrow{\cong} H^0(\mathbb{CP}^2) \to 0$$

$$0 \to H^2(\mathbb{CP}^2) \xrightarrow{\cong} \left(H^0(\{N, S\} \cup \{*\})\right)^{-\mathbb{Z}_2} \to 0$$

$$0 \to H^4(\mathbb{CP}^2) \xrightarrow{\cong} H^1([0, 1], \{0, 1\}) \to 0$$

## Sucesión espectral de $\mathcal{F}$. Dualidad

$(M, \mathcal{F})$ foliación riemanniana (regular)

Filtrando el complejo $\Omega^*(M)$ por el grado básico o transverso, tenemos una sucesión espectral de primer cuadrante.

$$E_r^{s,t}(\mathcal{F})$$

que converge a la cohomología $H^*(M)$.

Si la foliación riemanniana (de dimensión $k$ y codimensión $l$) es regular, se cumple una propiedad de dualidad [**J.A.Álvarez, 1989**]

$$E_2^{s,t}(\mathcal{F}) \cong E_2^{k-s,l-t}(\mathcal{F})$$

Si $\mathcal{F}$ es singular, cabría esperar una versión perversa de la dualidad, tomando perversidades duales $\overline{p}, \overline{q}$:

$${}_{\overline{p}}E_2^{s,t}(\mathcal{F}) \cong_{\overline{q}} E_2^{k-s,l-t}(\mathcal{F})$$

## Ejemplos anteriores: suc. espectrales

$$
\begin{array}{c|ccl}
\vdots & \vdots & & \\
0 & \mathbb{R} & \cdots & < f(t)\chi \wedge e \wedge dt > \\
\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & 0 & \cdots & < t \cdot e, (1-t) \cdot e > \\
0 & 0 & \cdots & \\
\mathbb{R} & 0 & \cdots & < 1 > \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccl}
\vdots & \vdots & & \\
0 & \mathbb{R} & \cdots & < f(t)\chi \wedge e \wedge dt > \\
\mathbb{R} & 0 & \cdots & < t \cdot e > \\
0 & 0 & \cdots & \\
\mathbb{R} & 0 & \cdots & < 1 > \\
\hline
\end{array}
$$

$E_2(\mathbb{CP}^2 \sharp \mathbb{CP}^2, \mathscr{F})$ $E_2(\mathbb{CP}^2, \mathscr{F})$

$\overline{p} = \overline{0}$ autodual.

## Conclusión:

La aplicación directa:

$$_{\overline{p}}E_2^{s,t}(\mathscr{F}) \cong_{\overline{q}} E_2^{k-s,l-t}(\mathscr{F})$$

No se cumple en los ejemplos calculados.

## Referencias

**G.E. Bredon**, *Introduction to Compacct Transformation Groups*, Academic Press, New York, (1972).

**M. Saralegi**, *A Gysin sequence for semifree actions of* $\mathbb{S}^3$, Proceedings of the A.M.S. **38** (1993), 1335–1345.

**J.I. Royo Prieto, M. Saralegi**, *The Gysin Sequence for* $\mathbb{S}^3$*-actions on manifolds*, preprint.

# Eskerrik asko. Graciñas.

http://www.ehu.es/joseroyo