Estructura de espaciotiempos globalmente hiperbólicos: descomposición global y embebimientos isométricos en Lorentz-Minkowski

Miguel Sánchez Caja

Universidad de Granada

Ferrol, 29 de Noviembre 2009.

Introducción

Punto de partida:

1. E.t globalmente hiperbólicos: clase más importante de variedades lorentzianas, desde los puntos de vista físico y matemático:
   - Cima de la jerarquía causal de e.t.
   - Ambiente de ecuaciones hiperbólicas –predictabilidad, ecuación de Einstein, Censura Cósmica...
2. Teorema clásico de Nash:
   - extensible al caso semi-riemanniano (Greene'70, Clarke'70)
   - pero la extensión a variedades lorentzianas (M,g) no reducible al caso riemanniano si (M,g) se va a embeber isom. en $\mathbb{L}^N$ (sólo estudiado por Clarke).

Objetivos (con Müller, arXiv: 0812.4439) :

- **Resultado 1.** Caracterización de var. lorentzianas embebibles isométricamente en $\mathbb{L}^N$:

  aquéllas que admiten una *función temporal empinada* τ $(-g(\nabla\tau, \nabla\tau) \geq 1)$

  (subclase propia de los e.t. establemente causales).

- **Resultado 2.** Esta subclase incluye a todos los e.t. globalmente hiperbólicos:

  admitir una tal τ —relacionado con los problemas "folclóricos" de diferenciabilidady

  Se solucionará analizando las estructuras métrica y conforme de los e.t. glob. hiperb.

Estructura de e.t. globalmente hiperbólicos (M,g):

1. Hito: existencia de una función Cauchy tiempo (R. Geroch, JMP'70)

   $\Longrightarrow$ Desdoblamiento topológico $M \cong_{\text{top}} \mathbb{R} \times S$ (niveles hip. Cauchy acausales)

2. Existencia de una hip. Cauchy espacial (AN Bernal, M.S, CMP'03)

   $\Longrightarrow$ Desdoblamiento suave $M \cong_{\text{smooth}} \mathbb{R} \times S$

3. Existencia de una función Cauchy temporal (AN Bernal, M.S, CMP'05)

   $\Longrightarrow$ Desdoblamiento ortogonal $(M,g) \equiv (\mathbb{R} \times S, g = -\beta dt^2 + g_t)$

4. Existencia de una función Cauchy temporal empinada (O. Müller, M.S, '09)

   $\Longrightarrow$ Desdoblamiento ortogonal con "lapso" acotado

   $(M,g) \equiv (\mathbb{R} \times S, g = -\beta dt^2 + g_t), \beta < 1$

   $\longrightarrow$ Embebimiento isométrico en $\mathbb{L}^N$ por medio de una reducción al Teorema de Nash.

Contenido:

1. Fundamentos:
   - *a*) Convenios preliminares
   - *b*) Funciones volumen construidas causalmente
   - *c*) Relación con la escala de e.t.
   - *d*) Construcción de Geroch
   - *e*) Problemas de suavidad
2. Embebilidad isométrica en $\mathbb{L}^N$ para un e.t. general
3. Existencia de una función Cauchy temporal *empinada* en el caso globalmente hiperb.

1.- Fundamentos

(a) Convenios preliminares

- (M,g) e.t.: n-var lorentziana conexa, orientada temp $(-,+\ldots,+)$.

  (No restrictivo: toda var. lorentziana isométricamente embebible en $\mathbb{L}^N$ es temporalmente orientable.

- Carácter causal de un vector tagte $v \in T_pM$ (id. curvas, hipersuperficies):

  - v es causal si temporal $g(v,v) < 0$, or luminosos $g(v,v) = 0, v \neq 0$
  - De otro modo, espacial: $g(v,v) > 0$, or $v = 0$.

- Las curvas temporales (resp. causales) definen la relación cronológica $\ll$ (resp. causal $\leq$)

  Se consideran suaves, excepto si consideramos *curvas causales continuas* (localmente totalmente ordenadas por $\leq$ en entornos convexos), que son localmente Lipschitz con vector tangente c.p.d. (siempre dirigido al futuro o pasado).

- Futuro y pasado de puntos (analog. subconjuntos)
  - Futuro cronológico $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$
  - Futuro causal $J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\}$
  - Analog. $I^-(p), J^-(p)$.
  - Para un abierto $U \subset M$ considerado como e.t.: $I^+(p,U), J^-(p,U)$...
  - $J(p,q) = J^+(p) \cap J^-(q)$ $(J(p,S) = J^+(p) \cap J^-(S))$
- Para cada $p, q \in M$:

  $\mathscr{C}_{p,q} := \{\gamma : [0,1] \to M$ curva causal-continua dirigida al futuro de p a q (a velocidad constante c.p.d.) $\}$

  [topologizada o bien por la distancia máxima como aplicaciones o para cualquier métrica riemanniana completa auxiliar (Choquet-Bruhat) o bien por la topología C^0, imponiendo causalidad (Geroch).]

- Separación temporal (distancia lorentziana):

  $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty]$

$$d(p,q) = \begin{cases} 0, \text{ if } \mathscr{C}_{p,q} = \emptyset \\ \sup\left\{L(\alpha), \alpha \in \mathscr{C}_{p,q}\right\}, \text{ if } \mathscr{C}_{p,q} \neq \emptyset \end{cases}$$

(b) Funciones volumen causalmente construidas

- **Def.** Medida de Borel *admisible* sobre M (Dieckmann '88):

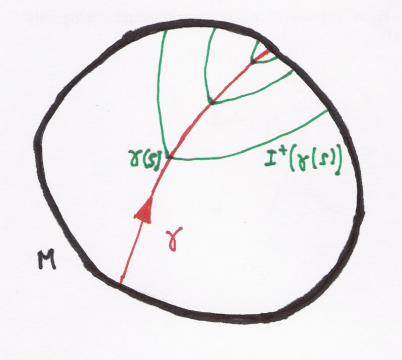
  1. $m(M) < \infty$,
  2. $m(U) > 0$ if $U \neq \emptyset$ is open
  3. $m(\partial I^{\pm}(z)) = 0, \forall z \in M$.

  P. ej.: la asociada a cualquier métrica riemanniana con volumen finito.

- **Def.** Funciones *volumen* pasado/futuro sobre M:

  - $t^{-} : M \to \mathbb{R}$, $t^{-}(p) = m(I^{-}(p))$
  - $t^{+} : M \to \mathbb{R}$, $t^{+}(p) = -m(I^{+}(p))$

Sea $\gamma : (a,b) \to M$ causal fut.: $s \to t^{\pm}(\gamma(s))$ es no decreciente.



- **Def.** Sea $M \to \mathbb{R}$ una función (no neces. contin.) sobre M:
  - Función tiempo generalizada: t estrictamente creciente sobre toda curva causal.
  - Función tiempo: función tiempo generalizada continua.
  - Función temporal: función tiempo suave con gradiente temporal ∇t.
- **Observ.**: en general, $t^{\pm}$ no son funciones tiempo generalizadas (p.ej.: una tal función previene la existencia de curvas temp. cerradas).

  Para entender exactamente su papel...

(c) Relación con la escala causal de e.t.

- Conjunto de condiciones estrictamente más restrictivas sobre la estructura conforme global un e.t:

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

CRONOLOGICO

- **Defn.** E.t. Cronológico sin curvas temporales cerradas,
- **Characterization**: (M,g) es cronológico $\Longleftrightarrow t^-$ (resp. t^+) es estrictamente crecientes sobre curvas temporales dirigidas al futuro.

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

CAUSAL

- **Defn.** E. t. causal: sin curvas causales cerradas,
- **Obs.**: (M,g) cronológico no-causal $\Longrightarrow$ existe una geodésica luminosa cerrada.

  $\rightsquigarrow$ en principio, la causalidad no es detectable por $t^{\pm}$

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

DISTINGUIDOR

- **Defn.** E.t. distinguidor (futuro, pasado) $p \neq q \Rightarrow I^{\pm}(p) \neq I^{\pm}(q)$

  i.e. las funciones con valores en $\mathscr{P}(M)$ (conj. partes de M)

  $$I^{\pm} : M \to \mathscr{P}(M), \quad p \mapsto I^{\pm}(p)$$

  son inyectivas.

- **Characterization**: (M,g) distinguidor $\iff$ t^-, t^+ son estrictamente crecientes sobre cualquier curva causal dirigida al futuro,

  i.e. $t^{\pm}$ funciones tiempo generalizadas (no necesariamente continuas).

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

FUERTEMENTE CAUSAL

- **Defn.** E.. fuert. causal, alternativamente:

  - No existen curvas cerradas "casi cerradas":

    para cada $p \in M$ y entorno $U \ni p$, existe otro entorno $(p \in)V \subset U$ tal que toda curva causal con puntos finales en V está enteramente contenida en U

    (o equivalentemente a posteriori: toda curva causal cruza V en un intervalo conexo de su dominio)

  - Los futuros y pasados cronológicos generan la topología de M:

    La topología de Alexandrov (generada por $\{I^{\pm}(p) : p \in M\}$) coincide con la de M.

    o equivalentemente a posteriori: la topología de Alexandrov es Hausdorff.

- **Obs.**: no caracterization en términos de $t^{\pm}$ sino compatibilidad natural

  topología $\longleftrightarrow$ cronología

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

ESTABLEMENTE CAUSAL

- **Defn.** E.t. (M,g) es establ. causal si, equivalentemente:

  1. $\exists g' \in \mathrm{Lor}(M)$ tal que $g < g'$ y g' es causal.
     (i.e. "un e.t causal que permanece causal tras abrir ligeramente sus conos de luz")
  2. hay un entorno C^0 $U(g)$ de g en $\mathrm{Lor}(M)$ tal que cada $g' \in U(g)$ es causal.
     (i.e. "e.t. que permanece causal bajo perturbaciones C^0")

- Definible alternativamente en términos de funciones tiempo –¡ojo!: con problema de diferenciabilidad que afectaba a la escala causal.

- **Teorema**. Es equivalente:

  (1) Ser establ. causal

  (2) Admitir una función tiempo t (continua, estrictamente creciente sobre toda curva causal al futuro)

  (3) Admitir una función temporal $\mathscr{T}$ (suave con gradiente temporal pasado doquiera)

  About the Proof.

  - (1) $\Rightarrow$ (2) (Hawking) Aunque $t^{\pm}$ son sólo funciones tiempo generalizadas, una verdadera función tiempo (continua) se obtiene integrando las t^{-} de métricas próximas con conos más anchos.

$$t(p) = \int_0^1 t_\lambda^-(p)d\lambda.$$

  - (2) $\Rightarrow$ (3) Una de las "cuestiones folclóricas de diferenciabilidad" (Bernal, MS'05).
  - (3) $\Rightarrow$ (1) No difícil

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

CONTINUIDAD CAUSAL

- **Def.** E.t. (M,g) causalmente continuo si (equivalently):

  (1) Las aplicaciones $I^{\pm} : M \to \mathscr{P}(M)$ son
  - inyectivas
  - continuas (topología en $\mathscr{P}(M)$: la que admite por abiertos $\mathscr{U}_K \in \mathscr{P}(M)$ para $K \subset M$ compact: $A \in \mathscr{U} \iff K \cap A = \emptyset$)

  (2) El e.t. es
  - Distinguidor
  - con funciones volumen continuas $t^{\pm}$

  (3) Las funciones volumen $t^{\pm}$ son funciones tiempo

- **Obs.** Los e.t. "totalmente viciosos" tienen $I^{\pm}$ continuos $\rightsquigarrow$ (imponer "distinguidor" es razonable!)

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

SIMPLICIDAD CAUSAL

- **Obs.** Cuando $I^{\pm}$ no son continuos, algún $J^{\pm}(p)$ no es cerrado.
- **Def.** Un e.t. (M,g) es caus. simple si:
  - Tiene $J^{\pm}(p)$ cerrados
  - Es distinguidor $\rightsquigarrow$ causal (Bernal, MS CQG'07)
- **Obs.**: Causalmente simple $\Rightarrow$ Causalmente continuo pero el recíproco es falso: basta con suprimir un punto de $\mathbb{L}^2$!

  $\rightsquigarrow$ la simplicidad causal no es detectable de $t^{\pm}$.
- Y, aunque el comportamiento causal sea bueno quizás...
  - $d(p,q) = \infty$ para algún $p,q \in M$
  - $p \leq q$ no conectables por una geodésica causal

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

HIPERBOLICIDAD GLOBAL

- **Def. 1** Leray '53 (M,g) is glob. hiperbólico si

  $\mathscr{C}_{p,q}$ es compacto para todo $p,q \in M$

- **Obs. 1**. Desarrollado por Choquet-Bruhat '68: hip. glob implica causalidad fuerte y Geroch '70.

  (Trivialmente: $p < q \iff$ geodésica conectante maximizante causal de p a q, d is finita –y continua).

- **Obs. 2**. Defn 1 involucra el espacio de curvas. Alternativa en M:

- **Defn. 2** (M,g) es glob. hiperbólico si verifica:

  fuert. causal + compacto $J(p,q)(:= J^+(p) \cap J^-(q)), \forall p,q \in M$.

- **Obs.**. Fácilmente entonces, Defn 2 equivale a Defn 1, y teniendo encuenta la escala causal, sólo la causalidad será suficiente (Bernal, MS. CQG'07)

- **Defn. 3** (M,g) es glob. hiperbólico si cumple:

  causal + compacto $J(p,q), \forall p,q \in M$.

- **Obs**. (a) La anterior definición está bien ajustada. Hay contraejemplos no distinguidores y Galloway demostró que, bajo causalidad fuerte, la compacidad del cierre $\overline{J^+(p) \cap J^-(q)}$ is es suficiente, pero existe un contraejemplo si sólo se impone causalidad.

  (b) Ambas condiciones tienen una interpretación sencilla:

  ninguna información viaja al pasado + no hay singularidades desnudas (no pérdidas de información de p a q).

- **Definición alternativa:** existencia de una hipersuperficie de Cauchy –además de que $\log(-t^-/t^+)$ sea una función Cauchy tiempo –pero este es el núcleo del teorema de Geroch.

(d) Construcción de Geroch (JMP'70)

- **Dfn.** Hipersuperficie de Cauchy: $S \subset M$ que es intersecado exactamente una vez por toda curva inext. causal ("el 'espacio' en ub instante de tiempo")
- **Obs**. Necesariamente, S es entonces una hipers, *topológica embebida*
- **Teorema.** (M,g) glob.hiperbólico $\Leftrightarrow$ admite una hip. de Cauchy

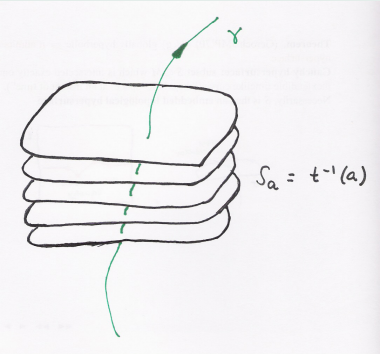
  ($\longrightarrow$ definición alternativa de hiperb. global)

- **Teorema**. Si M es glob. hip., existe una ("función Cauchy tiempo") $t : M \to \mathbb{R}$ continua y sobre tal que:

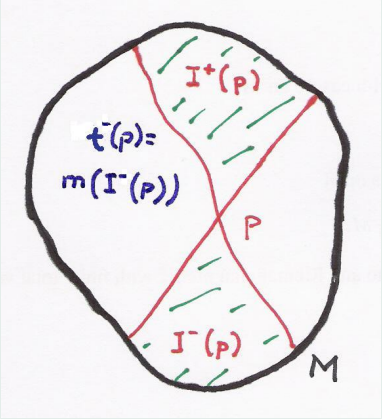
  (1) t crece estrictamente sobre toda curva causal futura (función tiempo).

  (2) $S_a := t^{-1}(a)$ Hip. Cauchy $\forall a \in \mathbb{R}$.

  (En consecuencia, M es homeomorfo a $\mathbb{R} \times S$).

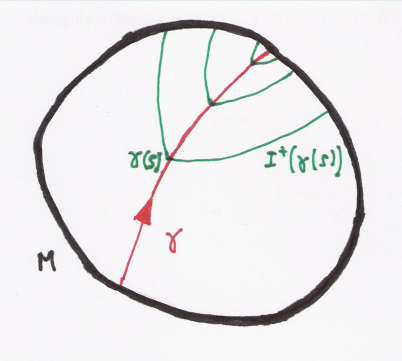


- **Idea dem**. Se consideran las funciones $t^{\pm}$



Si $\gamma : (a,b) \to M$ es causal, dir. fut. e inextensible:

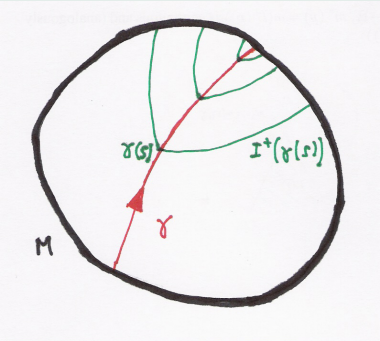
1. $s \to t^+(\gamma(s))$ (resp. $t^-(\gamma(s))$) es estrictamente creciente
   [t^-, t^+ eran funciones tiempo]
2. $\lim_{s\to b} t^+(\gamma(s)) = 0 = \lim_{s\to a} t^-(\gamma(s))$
3. $\lim_{s\to a}(-t^+(\gamma(s))), \lim_{s\to b} t^-(\gamma(s)) > 0$



Función “Cauchy tiempo” requerida:

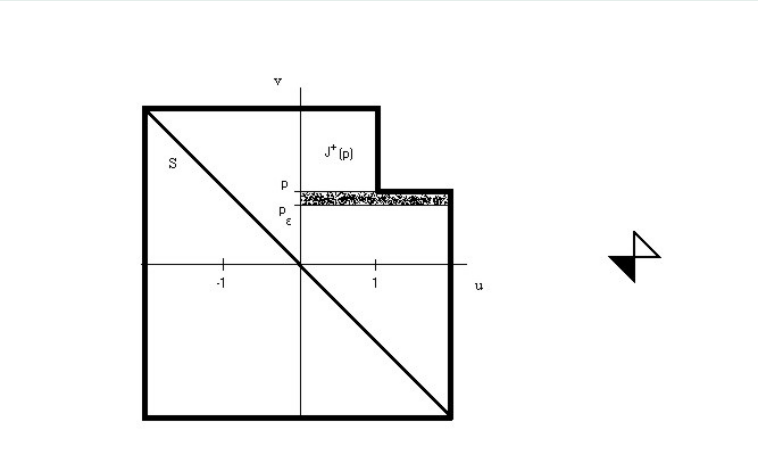
$$t(z) = \log\left(-t^{-}(z)/t^{+}(z)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{s\to b} t(\gamma(s)) = \infty \\ \lim_{s\to a} t(\gamma(s)) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow t = \text{const. is Cauchy}$$



(e) Problemas de diferenciabilidad

- **Obs**. De la prueba constructiva, t no siempre es diferenciable:



$M \subset \mathbb{L}^2$, (coord. luminosas u, v) Diagonal S hip. Cauchy t^+ no diferen. en p.

- Dados los resultados de Geroch, *cuestiones folclóricas* para espaciotiempos glob. hip.:

  (1) Encontrar una hip. Cauchy espacial (suave).

  (2) Encontrar una función Cauchy **temporal** (i.e. additionalmente t suave con gradiente temporal pasado)

  $\rightsquigarrow$ una tal función produciría el desdobl. ortogonal

  (y si t fuera empinada $|\nabla t| \geq 1$ solucionaría el problema del embebimiento isom.)

- Dificultades para solucionarlo con los conceptos estrictamente involucradas:

  1. Intentar aproximar la función tiempo de Geroch por funciones suaves (Seifert):

     incluso si es diferenciable, una hipersuperficie de Cauchy puede ser degenerada.

  2. Intentar usar una medida admisible para que resulte diferenciable (Dieckmann):

     para el problema de diferenciabilidad de funciones tiempo, ninguna medida admisible puede hacer que las funciones volumen $t^{\pm}$ sean funciones tiempo (esto ocurría sii el e.t. era causalmente continuo).

- El procedimiento ideado por AN Bernal, MS. '03, '05 genera la función Cauchy temporal (y una función temporal en el cso establemente causal)

  Aquí, **construiremos una función Cauchy temporal empinada mediante una modificación del procedimiento que redemuestra y simplifica el caso glob. hip.**

- El punto de vista de Clarke en ’70 es algo diferente al nuestro, y usa funciones causalmente construidas que eventualmente serían funciones temporales empinadas:

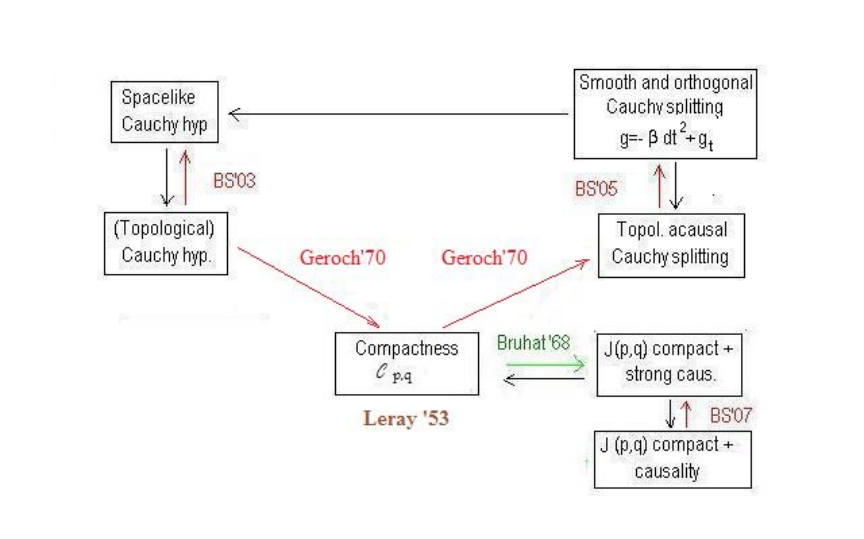
$$f(x) = \int_{H^+(\tau(x),\sigma(x))} \mu$$

Aquí, τ es una función Cauchy temporal que desdobla el s.t., σ una suerte de coordenada espacial radial y

$$H^+(t,s) = J^+(\tau^{-1}(0)) \cap J^-(\tau^{-1}(t) \cap \sigma^{-1}([0,s])).$$

Sería bueno determinar la diferenciabilidad de esta función.

- Resumen


Spacelike Cauchy hyp
Smooth and orthogonal Cauchy splitting
g=- β dt^2+g_t
BS'03
BS'05
(Topological) Cauchy hyp.
Geroch'70
Geroch'70
Topol. acausal Cauchy splitting
Compactness
C p,q
Bruhat'68
J(p,q) compact + strong caus.
Leray '53
BS'07
J (p,q) compact + causality

2.- Embedibilidad isométrica para $\mathbb{L}^N$ para un s-t. general

Resultado general:

- **Teor. 1** Para una variedad lorentziana (M,g), es equivalente:
  (i) (M,g) admite un embebimiento isométrico en $\mathbb{L}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.
  (ii) (M,g) e.t. establ. causal con una *función temporal empinada* τ ($g(\nabla\tau,\nabla\tau) \leq -1$).

- **Teor. 1** Para una variedad lorentziana (M,g), es equivalente:

  (i) (M,g) admite un embebimiento isométrico en $\mathbb{L}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

  (ii) (M,g) es un e.t. establ. causal con una *función temporal empinada* τ ($g(\nabla\tau,\nabla\tau) \leq -1$).

Demost. (ii) $\Rightarrow$ (i)

1. *Lemma*. Si (M,g) admite una función temporal τ entonces la métrica g admite una descomposición

$$g = -\beta d\tau^2 + g_\tau,$$

g_{τ_0}: métrica riemanniana en $S_{\tau_0} = \tau^{-1}(\tau_0)$ (la topología depende de τ_0)

En particular, si τ es empinada entonces $\beta \leq 1$.

Proof. Descomposición: restrínjase g.
Valor de β: $d\tau(\nabla\tau) = g(\nabla\tau,\nabla\tau) = -\beta\,(d\tau(\nabla\tau))^2$.

1. *Lemma*. Si (M,g) admite una función temporal τ entonces la métrica g admite una descomposición

$$g = -\beta d\tau^2 + g_\tau,$$

(g_{τ_0}: métrica riemanniana en $S_{\tau_0} = \tau^{-1}(\tau_0)$

En particular, si τ es empinada entonces $\beta \leq 1$.

2. La métrica riemanniana auxiliar

$$g_R := (4-\beta)d\tau^2 + g_\tau.$$

admite un embebimiento isométrico de Nash

$$i_{\text{nash}} : (M, g_R) \hookrightarrow \mathbb{R}^{N_0}$$

3. Y el que necesitamos nosotros $i : (M,g) \hookrightarrow \mathbb{L}^{N_0+1}$ es sólo:

$$i(\tau, x) = (2\tau, i_{\text{nash}}(\tau, x)).$$

1. *Lemma*. Si (M,g) admite una función temporal τ entonces la métrica g admite una descomposición

$$g = -\beta d\tau^2 + g_\tau,$$

(g_{τ_0}: métrica riemanniana en $S_{\tau_0} = \tau^{-1}(\tau_0)$

En particular, si τ es empinada entonces $\beta \leq 1$.

2. La métrica riemanniana auxiliar

$$g_R := (4-\beta)d\tau^2 + g_\tau.$$

admite un embebimiento isométrico de Nash

$$i_{\text{nash}} : (M, g_R) \hookrightarrow \mathbb{R}^{N_0}$$

3. Y el que necesitamos nosotros $i : (M,g) \hookrightarrow \mathbb{L}^{N_0+1}$ es sólo:

$$i(\tau,x) = (2\tau, i_{\text{nash}}(\tau,x)).$$

- **Teor. 1** Para una variedad lorentziana (M,g), es equivalente:

  (i) (M,g) admite un embebimiento isométrico en $\mathbb{L}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

  (ii) (M,g) es un e.t. establ. causal con una *función temporal empinada* τ $(g(\nabla\tau,\nabla\tau) \leq -1)$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii). Directo de (a) en la siguiente proposición:

- **Prop.** Si $i : M \to \mathbb{L}^N$ es una inmersión isométrica entonces:

  (a) la coordenada temporal natural $t = x^0$ de $\mathbb{L}^N$ induce una función temporal empinada en M, y

  (b) d of (M,g) toma valores finitos.

Dem. (a) $x^0 \circ i$ es claramente temporal, y empinada $1 \equiv |\nabla^0 x^0|(i(M)) \leq |\nabla(x^0 \circ i)|$ (la última porque $\nabla(x^0 \circ i)_p$ es la proyección de $\nabla^0 x^0_{i(p)}$ sobre $di(T_pM)$ (y su ortogonal $di(T_pM)^\perp$ in $T_{i(p)}\mathbb{L}^N$ es espacial).

(b) La finitud de d es consecuencia de la finitud de la separación temporal d_0 en $\mathbb{L}^N$ y $d(p,q) \leq d_0(i(p),i(q))$ ■

- **Corolario**

  (1) Una variedad lorentziana es establ. causal sii admite un embebimiento conforme en algún $\mathbb{L}^N$.

  (2) En este caso, hay un representante de su clase conforme cuya separación temporal es finita

  (3) Un e.t. establ. causal es conforme a uno no isométricamente embebible en $\mathbb{L}^N$ si (y sólo si) es no glob. hiperbólico.

Proof. (1) Sea τ cualquier función temporal. Entonces τ es temporal para toda métrica conforme, y empinada para $g^* = \sqrt{|\nabla t|}g$ ($|\nabla^*\tau|^* \equiv 1$).

(2) Para el g^* anterior, (M, g^*) es isom. embeb. y, entonces, la separación temporal d^* es finita.

(3) Tales e.t. son conformes a uno con d infinita-valuada –y, así, no existe isom. embeb. ■

- **Obs**. A diferencia del caso riemanniano, existe una obstrucción nítida para la existencia de embeb. isom.

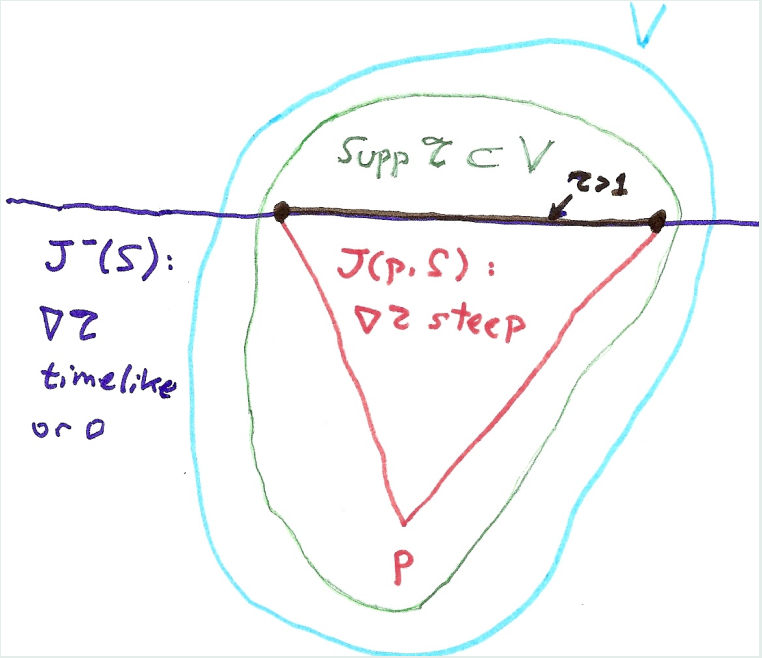
3.- Existencia en e.t. glob. hiperbólicos

(a) Herramientas técnicas

1. Existencia de la función Cauchy tiempo t de Geroch (cada $S_a = t^{-1}(a)$ Cauchy).

2. Función
$$j_p : M \to \mathbb{R}, \quad j_p(q) = \exp(-1/d(p,q)^2).$$
Restringida a entornos convexos de p, es una versión suavizada de la distancia a p (suave incluso en 0).

3. Para cualquier Cauchy $S = S_a$, $p \in J^-(S)$ y $V \supset J(p,S)$, existe una función temporal empinada τ sobre $J(p,S)$ con soporte en V ("τ empinada sobre el cono adelante $J(p,S)$").


V
Supp τ ⊂ V
τ>1
J⁻(S):
∇τ
timelike
or 0
J(p, S) :
∇τ steep
p

Prop. Sea S una hip. Cauchy, $p \in J^-(S)$. Para todo entorno V de $J(p,S)$ existe una función suave $\tau \geq 0$ tal que:

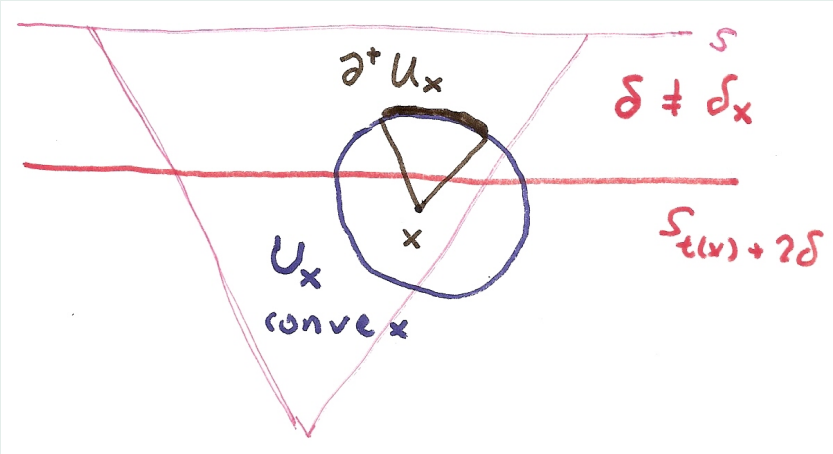
(i) $\operatorname{supp} \tau \subset V$

(ii) $\tau > 1$ en $S \cap J^+(p)$.

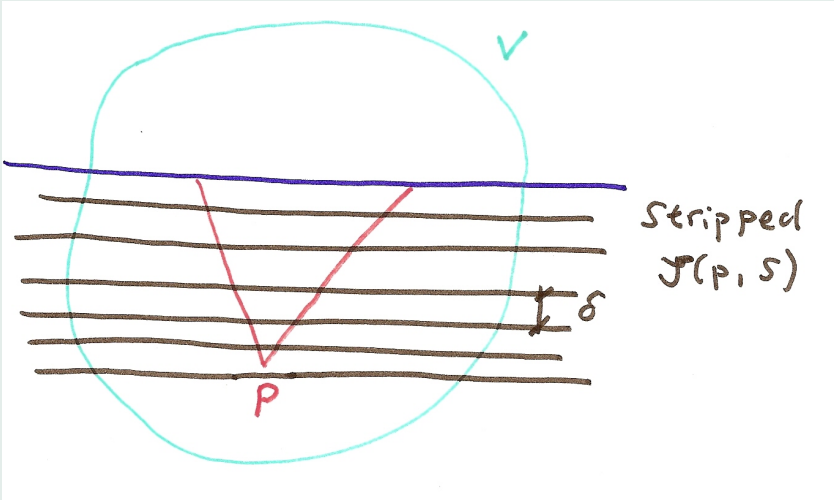
(iii) $\nabla\tau$ es temporal y dir.-pasado en Int(Supp $(\tau) \cap J^-(S)$).

(iv) $g(\nabla\tau, \nabla\tau) < -1$ en $J(p,S)$.

Idea de la dem. Tómese un K compacto, $J(p,S) \subset \mathrm{Int}(K)$, $K \subset V$ y $\delta > 0$ s.t.: $\forall x \in K$, $\exists U_x \subset V$ convexo con $\partial^+ U_x \subset J^+(S_{t(x)+2\delta})$ (donde $\partial^+ U_x := \partial U_x \cap J^+(x)$).

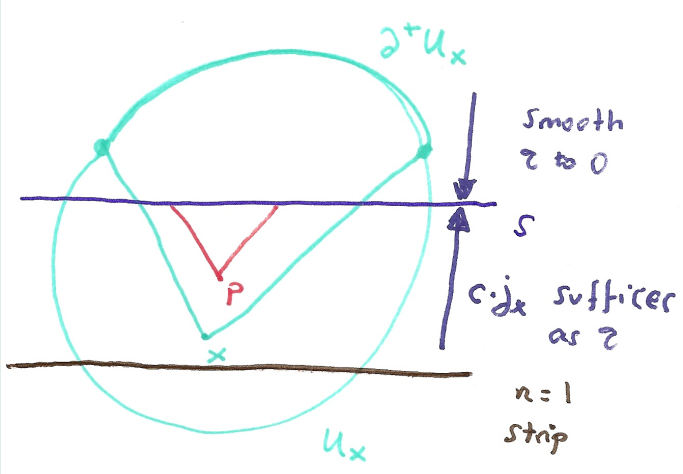


Rebanemos $J(p,S)$ en n tiras, $a_0 < t(p) < a_1 < \ldots < a_n = a$ with $a_{i+1} - a_i < \delta/2$



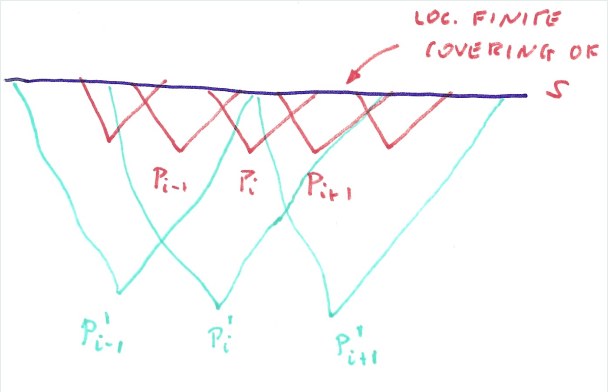
Si $n = 1$ tira es suficiente:

- $\tau = c j_x$ en $J^-(S)$ para c grande y algún cercano $x \ll p$
- τ se suaviza a 0 en $V \cap J^+(S)$.



Para $n > 1$, inducción.

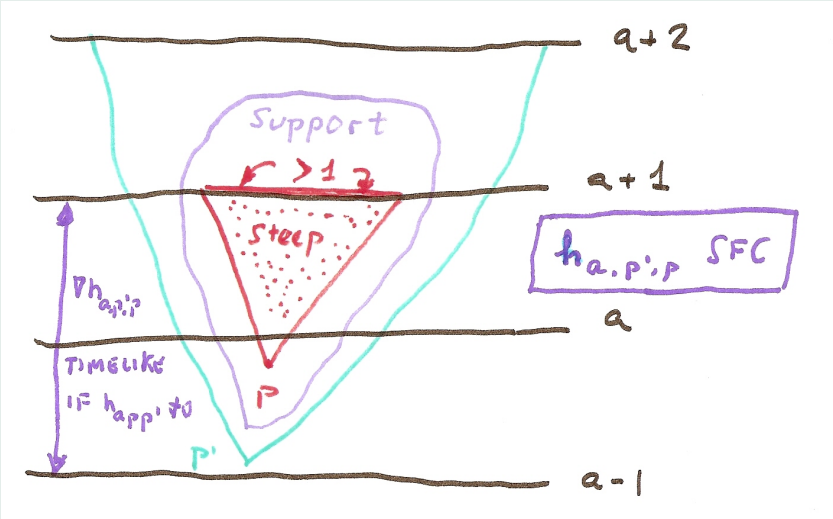
4. Para toda Cauchy S, un *recubrimiento por conos gordos*: sucesión de pares de puntos $p_i' \ll p_i, i \in \mathbb{N}$ tales que $\mathscr{C}' = \{I^+(p_i') : i \in \mathbb{N}\}$ y $\mathscr{C} = \{I^+(p_i) : i \in \mathbb{N}\}$ producen un recubrimiento localmente finito de S.



Pasos de la dem.

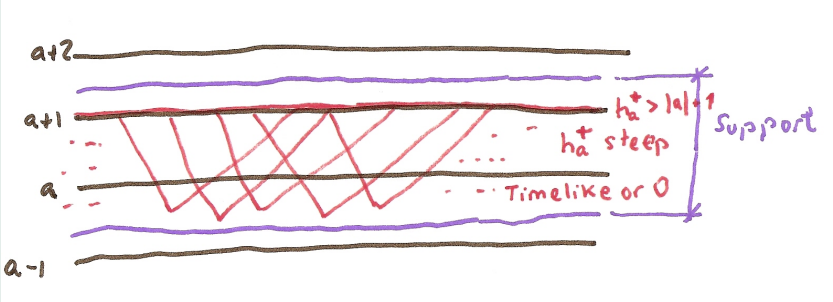
- Paso 1: para cada $a \in \mathbb{R}$ y $p' \ll p$, $p, p' \in J(S_{a-1}, S_a)$, construir una *función cono adelante empinada* (FCAE) $h^+_{a,p',p} : M \to [0, \infty)$ que satisface:

1. $supp(h^+_{a,p',p}) \subset J^+(p', S_{a+2})$,
2. $h^+_{a,p',p} > 1$ en $S_{a+1} \cap J^+(p)$,
3. Si $x \in J^-(S_{a+1})$ y $h^+_{a,p',p}(x) \neq 0$ entonces $\nabla h^+_{a,p',p}(x)$ is temporal dirpasado, y
4. $g(\nabla h^+_{a,p',p}, \nabla h^+_{a,p',p}) < -1$ en $J(p, S_{a+1})$.


a+2
Support
>1
a+1
Steep
$h_{a,p',p}$ SFC
$\nabla h_{a,p',p}$
a
TIMELIKE
IF $h_{app'} \neq 0$
p
p'
a-1

- Step 2: usando un recubrimiento de conos gordos $\{p'_i \ll p_i | i \in \mathbb{N}\}$ para $S = S_a$, ajustar un suma localmente finita de FCAE para obtener algún $h_a^+ > 0$ que satisfaga:

1. $supp(h_a^+) \subset J(S_{a-1}, S_{a+2})$,
2. $h_a^+ > |a| + 1 \ S_{a+1}$, [esto asegurará que la función temporal final sea Cauchy]
3. Si $x \in J^-(S_{a+1})$ y $h_a^+(x) \neq 0$ entonces $\nabla h_a^+(x)$ es temporal dir.-pasado, y
4. $g(\nabla h_a^+, \nabla h_a^+) < -1$ on $J(S_a, S_{a+1})$.



- Paso 3:

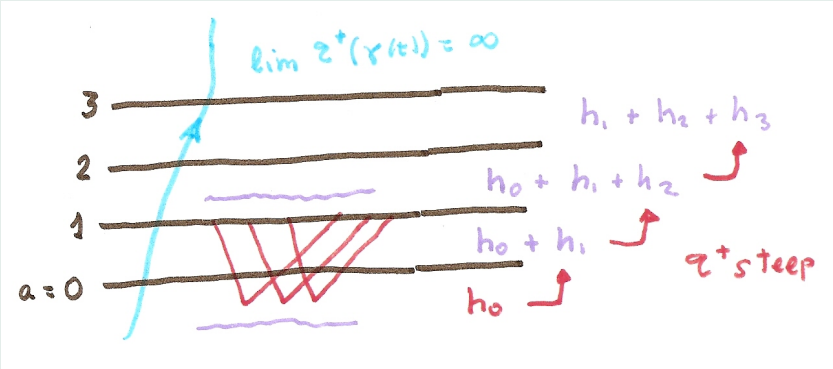
1. dada $h_a^+ \geq 0$ asegurar que h_{a+1}^+ puede escogerse tal que

$$g(\nabla(h_a^+ + h_{a+1}^+), \nabla(h_a^+ + h_{a+1}^+)) < -1 \qquad \text{on } J(S_{a+1}, S_{a+2}) \quad (0.1)$$

   Así, $h_a^+ + h_{a+1}^+$ está empinada en todo $J(S_a, S_{a+2})$).

2. Inductivamente, construir una función Cauchy empinada $\mathscr{T}^+ \geq 0$ sobre $J^+(S_0)$ con $\mathscr{T}^+(S_a) \geq a$ para $a = 1, 2, \ldots$.

3. Invirtiendo la orientación temporal y trabajando en $J^-(S_0)$, obtener la función Cauchy empinada $\mathscr{T} = \mathscr{T}^+ - \mathscr{T}^-$ sobre todo M.


$\lim \tau^+(\gamma(t)) = \infty$
3
2
1
a = 0
$h_1 + h_2 + h_3$
$h_0 + h_1 + h_2$
$h_0 + h_1$
h_0
τ^+ steep